

جواب‌های عددی یک مدل ریاضی از دینامیک پلانکتون - اکسیژن با استفاده از یک روش بدون شبکه

شبنم قایدی، احمد شیرزادی^۱، منصور صفرپور، قربانعلی باقری بردی

گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۴/۱۲

چکیده: این مقاله به بررسی جواب‌های عددی یک مدل ریاضی از دینامیک پلانکتون-اکسیژن می‌پردازد. حدود هفتاد درصد اکسیژن جو توسط فعالیت فتوسنتزی فیتوپلانکتون‌ها تولید می‌شود و فعالیت فیتوپلانکتون تحت تأثیر دینامیک اقیانوس است. لذا، نرخ تولید اکسیژن وابسته به دمای آب بوده و بنابراین تحت تأثیر گرمایش جهانی قرار می‌گیرد. یک مدل که دینامیک پلانکتون-اکسیژن را شرح می‌دهد در نظر گرفته شده است. برای گسسته سازی مدل که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است، ترکیبی از روش‌های تفاضلات متناهی و بدون شبکه به کار برده شده است. متغیر زمان با استفاده از روش تفاضلات متناهی پیشرو گسسته شده است. با توجه به دقت بالای جواب‌های عددی حاصل از روش‌های بدون شبکه، در مدل وابسته به مکان، یک روش بدون شبکه برای گسسته سازی متغیر مکانی پیشنهاد شده است. روش بدون شبکه معرفی شده از فرم قوی معادله و هم‌محلی برای گسسته سازی استفاده می‌کند. توابع پایه‌ای شعاعی که در اینجا استفاده شده چند ربعی می‌باشد که دارای قدرت تقریب‌نمایی است. نتایج عددی نشان می‌دهند که در یک دامنه خاصی از تولید اکسیژن سیستم پایدار است، اما گرمایش جهانی بر سیستم تأثیر گذاشته و باعث کاهش اکسیژن و انقراض پلانکتون می‌شود. **واژه‌های کلیدی:** پلانکتون، گرمایش جهانی، معادلات دیفرانسیل، روش‌های تفاضلات متناهی، روش‌های بدون شبکه.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۵L۱۲، ۶۵P۹۹

۱-مقدمه

معادلات دیفرانسیل نقش مهمی در علوم و مهندسی ایفا می‌کنند. در حقیقت، اکثر پدیده‌های طبیعی با تغییر زمان یا مکان تغییر می‌کنند و مدل کردن این تغییرات منجر به معادلات دیفرانسیلی می‌شود. این امر ارتباط تنگاتنگ معادلات دیفرانسیلی با دنیای واقعی را نشان می‌دهد. این مقاله ابتدا به بررسی و معرفی یک مدل ریاضی از دینامیک پلانکتون-اکسیژن [۱] پرداخته و سپس یک روش عددی برای به دست آوردن جواب‌های این مدل که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی است، می‌پردازد. به هر توده‌ای از جانداران تک‌سلولی (جانوران، گیاهان، آغازیان یا باکتری) که در قسمت بالای دریاها و اقیانوس‌ها یا آب شیرین زندگی می‌کنند پلانکتون گفته می‌شود. پلانکتون‌ها نقش مهمی در چرخش انرژی و مواد در طبیعت دارند به گونه‌ای که بدون آن‌ها تداوم حیات میسر نیست. اکثر پلانکتون‌ها توانایی شنا کردن ندارند و به وسیله موج‌ها یا جریان‌های آب انتقال پیدا می‌کنند. همچنین به‌عنوان اولین حلقه زنجیره غذایی می‌باشند. از نظر اقتصادی مهم بوده و بقای آن منطقه را تضمین می‌کنند. از پلانکتون‌ها اغلب به‌عنوان شاخص سلامت آبی و محیطی نیز استفاده می‌شود. پلانکتون‌ها به دو گروه فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون تقسیم‌بندی می‌شوند. فیتوپلانکتون‌ها شامل باکتری‌ها و گیاهان میکروسکوپی و زئوپلانکتون‌ها شامل جانوران میکروسکوپی می‌باشند. فیتوپلانکتون‌ها که در واقع همان پلانکتون‌های گیاهی هستند، از جمله جانداران تک‌سلولی می‌باشند که در اقیانوس‌ها زندگی می‌کنند، اما محل دقیق زندگی آن‌ها در نزدیکی سطح اقیانوس‌ها است، چراکه آن‌ها نیز مانند گیاهان سبزی که در خشکی زندگی می‌کنند به نور خورشید نیاز دارند. فیتوپلانکتون‌ها (پلانکتون گیاهی) طی عمل فتوسنتز، آب و دی‌اکسید کربن را مصرف و اکسیژن را به‌عنوان مواد زائد و پسماند آزاد می‌کنند؛ این یکی از دلایل اهمیت آن‌ها برای اقیانوس‌ها و کل سیاره زمین می‌باشد. فیتوپلانکتون‌ها علاوه بر نور، برای رشد و باروری به انواع مواد محلول موجود در آب دریا نیاز دارند، مانند دی‌اکسید کربن، کلسیم، سدیم، پتاسیم، منیزیم و سولفات. همچنین به مواد دیگری بخصوص ترکیبات نیتروژن، فسفر و سیلیس که معروف به مواد مغذی می‌باشند و در آب دریا کمیاب هستند نیازمند هستند. در آب‌های سطحی که نور خورشید به فراوانی حضور دارد، مواد مغذی در طی مراحل رشد گیاهان به مصرف می‌رسند؛ بنابراین کمبود مواد مغذی در آب‌های سطحی از رشد فیتوپلانکتون‌ها در طول تابستان جلوگیری می‌کند. فیتوپلانکتون‌ها می‌توانند رشد سریع جمعیت را تحمل کنند که تقریباً هر بهار اتفاق می‌افتد هم‌زمان با این فرایند، توده‌های جلبکی که یکی از گروه‌های اصلی فیتوپلانکتون‌ها می‌باشند در حضور مواد غذایی و افزایش دما افزایش می‌یابد. همان‌گونه که زیاد بودن فیتوپلانکتون‌ها به رشد ارگانسیم‌های دیگر در آن منطقه کمک می‌کنند، مقدار خیلی زیاد فیتوپلانکتون‌ها هم می‌تواند به سلامت کل یک منطقه زیستی ضرر بزند. چراکه افزایش جلبک‌ها باعث مردن بیشتر فیتوپلانکتون‌ها شده و آن‌ها را به زیر آب، جایی که آن‌ها

مصرف می‌شوند، می‌برند. در آنجا باکتری‌ها از فیتوپلانکتون‌ها تغذیه می‌کنند و با افزایش باکتری‌ها مقدار اکسیژن حل شده در آب‌های زیرین که برای حیات ارگانسیم‌های دیگر مثل ماهی‌ها و خرچنگ‌ها لازم است کم می‌شود. از فواید مهم دیگر فیتوپلانکتون‌ها این است که به‌عنوان پایه زنجیره غذایی محسوب می‌شوند زیرا بسیاری از ماهی‌های کوچک از آن تغذیه می‌کنند. سپس، ماهی‌های بزرگ‌تر ماهی‌های کوچک‌تر را می‌خورند و زنجیره غذایی ادامه می‌یابد و حتی به ما انسان‌ها نیز می‌رسد، ماهی‌ها یک منبع غذایی برای انسان‌ها محسوب می‌شود، بنابراین انرژی پلانکتون‌ها انرژی انسان‌ها نیز می‌شود. زئوپلانکتون‌ها (پلانکتون‌های جانوری) مانند فیتوپلانکتون‌ها، از شاخص‌های عالی شرایط محیطی به حساب می‌آید چراکه حساس به شرایط کیفی آب هستند. آن‌ها به مقدار اکسیژن حل شده در آب واکنش نشان می‌دهند. همچنین مقدار زیاد مواد غذایی و یا آلودگی‌های سمی و غذای کم و حتی صید زیاد، بر گستردگی آن‌ها تأثیر می‌گذارد. همچنین، با گسترش زئوپلانکتون‌ها در یک منطقه می‌توان گستردگی و تنوع آبی را در آنجا انتظار داشت. در بخش ۳، مدل ریاضی دینامیک اکسیژن-پلانکتون معرفی خواهد شد.

در این مقاله بر پایه‌ی روش‌های بدون شبکه، یک روش عددی برای گسسته‌سازی متغیر مکان در دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل از مدل‌سازی ارائه شده است. در بخش بعدی مقدمه‌ای بر این روش ذکر خواهد شد.

۲- مقدمه‌ای بر روش‌های بدون شبکه

از مسئله درون‌یابی داده‌های پراکنده به‌عنوان زمینه‌ساز اصلی روش‌های بدون شبکه یاد می‌شود. این مسئله یکی از مسائل اساسی در نظریه تقریب و مدل‌بندی داده‌ها می‌باشد. همچنین این روش تقریب، مبنای بسیاری از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال است. در روش‌های بدون شبکه‌بندی به معنای روش‌های المان‌متناهی استفاده نمی‌شود و به‌جای آن تقریب بر اساس مجموعه‌ای از نقاط که با کیفیت مناسب درون ناحیه پراکنده شده‌اند نوشته می‌شود. یکی از مزیت‌های روش‌های بدون شبکه نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی و روش‌های المان‌های متناهی، پیاده‌سازی راحت‌تر، تعمیم ساده‌تر و کم‌هزینه‌تر آن‌ها به ابعاد بالاتر است. روش‌های بدون شبکه دارای دو کلاس اصلی کمترین مربعات متحرک و توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. فرمول‌بندی ریاضی این مسئله به این صورت است که داده‌های

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \text{ با } x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \mathbb{R} \text{ و } X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

داده شده است. هدف یافتن تابع پیوسته $p_{f,x}$ است به‌گونه‌ای که

$$p_{f,x}(x_i) = y_i, i=1,2,\dots,N.$$

در اینجا x_i ها مکان داده‌ها و y_i ها اندازه‌های متناظر (مقدار داده‌ها) می‌باشند که اغلب فرض می‌کنیم این مقادیر توسط نمونه‌گیری از تابع f در مکان داده‌ها به دست آمده است یعنی

$$y_i = f(x_i), i=1,2,\dots$$

ایده معمول برای حل مسئله‌ی داده‌های پراکنده این است که فرض کنیم تابع $p_{f,x}$ ترکیب خطی از توابع پایه‌ای مشخص B_k است یعنی:

$$p_{f,x} = \sum_{k=1}^N c_k B_k(x), x \in \mathbb{R}^d.$$

حل مسئله درون‌یابی تحت این فرض منجر به یک سیستم از معادلات خطی به شکل $Ac = y$ می‌شود که درایه‌های ماتریس درونیاب A به صورت $A_{j,k} = B_k(x_j)$ و بردار $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ مجهول و $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ می‌باشد. مسئله درون‌یابی زمانی خوش تعریف است (جواب موجود و یکتاست) که ماتریس A معکوس پذیر باشد. وقتی بعد فضا بزرگ‌تر از ۱ باشد و نقاط نیز دوجه دو متمایز باشند نمی‌توان به معکوس پذیر بودن ماتریس ضرایب مطمئن بود، به عبارت دیگر هیچ فضای هاری با بعد بزرگ‌تر از یک وجود ندارد؛ اما استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی که مسئله را از بعدها بالاتر به طور ضمنی به مسئله یک بعدی تقلیل می‌دهد باعث حصول اطمینان از معکوس پذیری ماتریس ضرایب خواهد شد. برای اجرای یک روش بدون شبکه ابتدا دامنه‌ی محاسباتی مسئله، با نقاط پوشانده می‌شود. این نقاط می‌تواند منظم یا نامنظم باشند ولی در هر دو صورت باید کل دامنه را پوشش دهند، جواب تقریبی $p_{f,x}$ را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی یا توابع شکل کمترین مربعات متحرک (ضرایب در این حالت مقدار تابع مجهول است) در نظر می‌گیریم. در پروسه تقریب، جواب برحسب جملات پایه بسط داده می‌شود و بنابراین این ضرایب جملات پایه مجهول هستند. برای محاسبه این ضرایب، باید آن را بیازماییم تا در معادلات حاکم صدق کنند. این آزمون می‌تواند به فرم قوی یا فرم ضعیف انجام بگیرد. در آزمون به فرم قوی، تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط (نقاط هم‌محلی) در معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد و این نقاط باید مجزا باشند. در نتیجه، مسئله تبدیل به یک دستگاه معادلات خطی می‌شود که با حل آن ضرایب مجهول به دست می‌آید. این روش آزمون، روشی ساده و سریع است ولی دستگاه‌های نهایی معمولاً ناپایدار هستند.

در آزمون به فرم ضعیف (اجرای روش گالرکین) نیازمند تغییراتی در مسئله هستیم. اعمال یک عملگر انتگرالی بر روی معادلات حاکم بر مسئله، مرتبه عملگرهای دیفرانسیلی ظاهر شده را

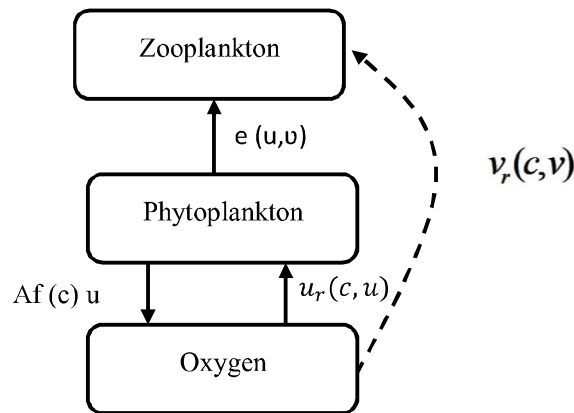
کاهش می‌دهد. این امر موجب افزایش پایداری جواب شده اما هزینه محاسباتی را افزایش می‌دهد. روش‌های بدون شبکه به علت انعطاف‌پذیری بالا و دقت زیاد جواب‌های عددی حاصله، در سال‌های اخیر توجه بسیاری از ریاضیدانان و مهندسان را به خود جلب کرده است. از یک دیدگاه، روش‌های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل به روش‌های محلی و روش‌های سراسری تقسیم می‌شوند. از قدیمی‌ترین روش‌های بدون شبکه‌ی محلی می‌توان به روش بدون شبکه‌ی پتروف-گلرکین محلی و روش بدون شبکه‌ی معادله‌ی انتگرال محلی اشاره کرد که در این روش‌ها هم تقریب جواب و هم آزمودن به روش محلی صورت می‌گیرد [۷ و ۲]. آنچه مسلم است اگر مسئله فقط یک متغیر داشته باشد روش‌های سراسری و روش‌های محلی جواب‌های مشابهی می‌دهند. لذا، در این مقاله از روش‌های بدون شبکه سراسری استفاده شده است. این روش‌ها کاربردهای گوناگونی در علوم و مهندسی داشته‌اند که از جمله آن‌ها می‌توان به [۱۱ و ۸] اشاره کرد.

۳- بررسی مدل و معادلات اصلی سیستم دینامیک اکسیژن-پلانکتون

اکوسیستم واقعی متشکل از معادلات زیادی است و سیستم پیچیده‌ای دارد. در این مقاله یک مدل مفهومی ساده را در نظر می‌گیریم که شامل خود اکسیژن و فیتوپلانکتون به‌عنوان تولیدکننده اکسیژن است. این مدل همچنین شامل زئوپلانکتون نیز می‌باشد. تأثیر زئوپلانکتون بنا به دو دلیل در این سیستم حائز اهمیت است: زئوپلانکتون به‌عنوان یک عامل در کنترل تراکم فیتوپلانکتون می‌باشد به این دلیل که زئوپلانکتون‌ها (پلانکتون‌های جانوری) از فیتوپلانکتون‌ها (پلانکتون گیاهی) تغذیه می‌کنند و از افزایش خیلی زیاد فیتوپلانکتون جلوگیری می‌کنند. دلیل دیگر اینکه زئوپلانکتون اکسیژن را از طریق تنفس مصرف می‌کند. متغیرها و پارامترهای استفاده شده در این مدل به این شرح معرفی می‌شوند:

c غلظت اکسیژن در زمان t است. پس c تابعی از t می‌باشد. u معرف تراکم فیتوپلانکتون و v تراکم زئوپلانکتون در زمان t می‌باشند، بنابراین این دو متغیر نیز تابعی از متغیر زمان t هستند. $Af(c)$ نرخ تولید اکسیژن در هر واحد جرم فیتوپلانکتون و u_r و v_r به ترتیب نرخ مصرف اکسیژن توسط فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون را نشان می‌دهند. $g(c, u)$ نرخ رشد فیتوپلانکتون را توصیف می‌کند که به میزان فتوسنتز وابسته است؛ بنابراین می‌توان فرض کرد که به میزان اکسیژن نیز وابسته است (اکسیژن طی عمل فتوسنتز تولید می‌شود). m نرخ اتلاف اکسیژن به دلایل طبیعی است (مثلاً به دلیل واکنش‌های بیوشیمیایی در آب). e میزان تغذیه زئوپلانکتون از فیتوپلانکتون است که تابعی از هر دو مقدار زئوپلانکتون از فیتوپلانکتون می‌باشد، پس $e = e(u, v)$ نرخ افزایش غلظت اکسیژن حلال به علت انتقالش از سلول‌های فیتوپلانکتون در

آب اطراف را با $f(c)$ نشان داده‌ایم. k ضریب کارایی تغذیه زئوپلانکتون از فیتوپلانکتون می‌باشد. در واقع نسبت مصرف فیتوپلانکتون به تولید زئوپلانکتون، با ثابت k مشخص می‌شود. از طرفی چون تندرستی زئوپلانکتون به غلظت اکسیژن بستگی دارد بنابراین فرض می‌کنیم $k = k(c)$. نرخ مرگومیر طبیعی فیتوپلانکتون σ و نرخ مرگومیر طبیعی زئوپلانکتون μ می‌باشد. ساختار مدل به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است. این شکل ساختار تعامل بین اکسیژن، فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون را توصیف می‌کند و پیکان‌ها جریان‌های ماده در سیستم را نشان می‌دهد. فیتوپلانکتون اکسیژن را از طریق فتوسنتز در طی روز تولید و آن را در طول شب مصرف می‌کند. همچنین نشان می‌دهد که زئوپلانکتون از فیتوپلانکتون تغذیه می‌کند و اکسیژن را از طریق تنفس مصرف می‌کند.



شکل (۱): ساختار تعامل بین اکسیژن، فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون

در بررسی مدل دینامیک پلانکتون-اکسیژن ما دو حالت را بررسی می‌کنیم: در حالت اول فرض می‌کنیم سیستم مستقل از مکان باشد، یعنی فرض می‌کنیم ارگانیسم‌ها تغییر مکان ندارند. پس از بررسی این حالت، سیستم وابسته به مکان نیز در ادامه معرفی خواهد شد. برای شروع ارائه مدل ریاضی توجه داریم که:

نرخ مصرف اکسیژن توسط فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون و اتلاف طبیعی - نرخ کلاکسیژن تولیدی = نرخ تولید اکسیژن

از آنجا که نرخ تولید اکسیژن نسبت به زمان رابطه مستقیمی با نرخ کل تولید اکسیژن توسط فیتوپلانکتون دارد بنابراین نرخ تولید کل اکسیژن برابر است با $Af(c)u$ که A یک ضریب مثبت

می‌باشد. نرخ مصرف اکسیژن توسط فیتوپلانکتون را با $u_r(c, u)$ و نرخ مصرف اکسیژن توسط زئوپلانکتون را با $v_r(c, v)$ و اتلاف طبیعی اکسیژن را نیز با cm نشان می‌دهیم؛ بنابراین داریم:

$$\frac{dc}{dt} = Af(c)u - u_r(c, u) - v_r(c, v) - cm \quad (1)$$

همچنین می‌توان گفت:

نرخ مصرف فیتوپلانکتون توسط زئوپلانکتون و مرگ‌ومیر طبیعی آن - نرخ کل فیتوپلانکتون
تولیدی = نرخ تولید خالص فیتوپلانکتون

پس اگر نرخ کلی رشد فیتوپلانکتون را با $g(c, u)$ ، نرخ تغذیه زئوپلانکتون از فیتوپلانکتون را با $e(u, v)$ و نرخ مرگ‌ومیر طبیعی فیتوپلانکتون را با σu نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dt} = g(c, u) - e(u, v) - \sigma u \quad (2)$$

در خصوص تغییرات زئوپلانکتون داریم:

نرخ مرگ‌ومیر طبیعی آن - نرخ کل تولید زئوپلانکتون = نرخ تولید خالص زئوپلانکتون

پس اگر نرخ کلی رشد زئوپلانکتون را با $k(c)e(c, v)$ و نرخ مرگ‌ومیر طبیعی آن را با $\mu(v)$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dt} = k(c)e(c, v) - \mu(v) \quad (3)$$

بنابراین مدل متناظر از طریق معادلات زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{dc}{dt} = Af(c)u - u_r(c, u) - v_r(c, v) - cm \quad (4)$$

$$\frac{du}{dt} = g(c, u) - e(u, v) - \sigma u \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dt} = k(c)e(c, v) - \mu(v) \quad (6)$$

در معادلات فوق، برخی توابع و پارامترها باید به صورت دقیق تر معرفی شوند. ویژگی‌های کیفی پارامترهای مورد بحث در این مقاله با تئوری بیولوژیکی سینتیک موناد^۱ مطابقت دارد. لذا از این تئوری برای مشخص کردن برخی توابع و ضرایب استفاده می‌کنیم. معادله موناد یک مدل ریاضی

برای رشد میکروارگانیسم‌ها را معرفی می‌کند؛ و معمولاً در مهندسی محیط زیست مورداستفاده قرار می‌گیرد. معادله مونا د به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_s + S}$$

که در آن μ نرخ رشد میکروارگانیسم‌ها، μ_{\max} حداکثر سرعت رشد میکروارگانیسم‌ها، S غلظت محدودکننده برای رشد موجودات زنده‌ای که در آن محیط یا سطح زندگی می‌کنند و k_s مقدار «ثابت نیمه اشباع» پارامتر S می‌باشند و $\frac{\mu}{\mu_{\max}} = 1/2$ است. μ_{\max} و k_s ضرایب تجربی برای معادله مونا هستند که به گونه‌ها و شرایط محیطی وابسته هستند. با این توضیحات و با فرض اینکه C_0 ثابت نیمه اشباع اکسیژن باشد و $c_{\max} = 1$ ، طبق تئوری مونا داریم:

$$f(c) = 1 - \frac{c}{c + c_0} = \frac{c_0}{c + c_0}$$

با در نظر گرفتن تکثیر فیتوپلانکتون، فرض می‌کنیم $g(c, u) = \alpha(c)u - \gamma u^2$ که اولین عبارت رشد خطی فیتوپلانکتون را نشان می‌دهد و عبارت دوم بیانگر رقابت درون گونه‌های فیتوپلانکتون است. $\alpha(c)$ نرخ رشد سرانه و ضریب γ شدت رقابت درون گروهی فیتوپلانکتون‌ها را بیان می‌کند. α باید یک تابع صعودی یکنواخت از c باشد یعنی وقتی $c \rightarrow \infty$ تابع α به سمت یک مقدار ثابت میل کند فرض می‌کنیم α_{\max} همان B باشد. لذا، بنا بر تئوری مونا داریم:

$$a(c) = \frac{Bc}{c + c_1} = B \frac{c}{c + c_1}$$

که B ماکسیمم نرخ رشد سرانه فیتوپلانکتون در حد اکسیژن بالا و c_1 مقدار ثابت نیمه اشباع می‌باشد. با جایگذاری $a(c)$ در معادله $g(c, u)$ داریم:

$$g(c, u) = \frac{Bcu}{c + c_1} - \gamma u^2$$

به طریق مشابه داریم:

$$e(u, v) = \frac{\beta uv}{u + h} = \beta v \frac{u}{u + h}$$

که در آن β نرخ ماکسیمم مصرف فیتوپلانکتون و h تراکم شکار نیمه اشباع است. برای پارامتر u_r که نرخ مصرف اکسیژن توسط فیتوپلانکتون را نشان می‌دهد پارامتر سازی به صورت زیر

انجام می‌شود:

$$u_r(c, u) = \frac{\delta uc}{c + c_p} = \delta u \frac{c}{c + c_p}$$

که در آن δ ماکسیمم سرانه نرخ تنفس فیتوپلانکتون و c_p مقدار ثابت نیمه اشباع است. در خصوص تنفس زئوپلانکتون، برای بسیاری از گونه‌های زئوپلانکتون، مصرف اکسیژن آن‌ها به غلظت اکسیژن بستگی دارد، ساده‌ترین پارامتر سازی برای آن، پارامتر سازی تابع مونا است.

$$v_r(c, u) = \frac{zcv}{c + c_p} = \tau v \frac{c}{c + c_p}$$

که τ نرخ ماکسیمم سرانه تنفس زئوپلانکتون و c_p مقدار ثابت نیمه اشباع است. در نهایت، با توجه به ضریب کارایی تغذیه زئوپلانکتون به عنوان تابعی از غلظت اکسیژن یعنی $k(c)$ استدلال بیولوژیکی کلی وجود دارد که نشان می‌دهد باید شکلی سیگموئیدی داشته باشد؛ یعنی با در نظر گرفتن یک آستانه مشخص، برای غلظت‌های اکسیژن بالا دارای مقداری تقریباً ثابت، اما فوراً برای غلظت زیر آستانه دچار واپاشی می‌شود. در نتیجه آن را به صورت زیر پارامتر سازی می‌کنیم که در آن $0 < \eta < 1$ ماکسیمم کارایی تغذیه است و c_p^γ مقدار ثابت نیمه اشباع است.

$$k(c) = \frac{\eta c^\gamma}{c^\gamma + c_p^\gamma} = \eta \frac{c^\gamma}{c^\gamma + c_p^\gamma}$$

با در نظر گرفتن همه معادلات و با جایگذاری پارامتر سازی‌های انجام شده داریم:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{Acu}{c + c_0} - \frac{\delta uc}{c + c_p} - \frac{\tau cv}{c + c_p} - mc$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{Bc}{c + c_1} - \gamma u \right) u - \frac{Buv}{u + h} - \sigma u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta c^\gamma}{c^\gamma + c_p^\gamma} \frac{Buv}{u + h} - \mu v$$

به دلیل معنای بیولوژیکی پارامترها، تمامی آن‌ها غیر منفی هستند. برای بدون بعد کردن معادلات متغیرهای جدید زیر را در نظر می‌گیریم:

$$t' = tm, \quad c' = \frac{c}{c_0}, \quad u' = \frac{\gamma u}{m}, \quad v' = \frac{Bv}{m}$$

$$\hat{B} = \frac{B}{m}, \hat{A} = \frac{A}{c_0 y}, \hat{\delta} = \frac{\delta m}{\delta y}, \hat{v} = \frac{vm}{Bc_0}, \hat{\sigma} = \frac{\sigma}{m}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{m}, \hat{h} = \frac{\gamma h}{m}, \hat{\eta} = \frac{\eta B}{m}, \hat{c}_i = \frac{c_i}{c_0}; i = 1, 2, 3, 4$$

در نهایت معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{Au}{c + c_0} - \frac{\delta uc}{c + c_1} - \frac{\tau cv}{c + c_2} - c \quad (7)$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{Bc}{c + c_1} - u \right) u - \frac{uv}{u + h} - \sigma u \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta c^2}{c^2 + c_3} \frac{Buv}{u + h} - \mu v \quad (9)$$

اعداد اول و کلاه‌دار برای سهولت برداشته شده‌اند. دامنه پارامترهای بدون بعد متفاوت از پارامترهای اصلی (ابعادی) است. بخصوص کارایی تغذیه بدون بعد η ضرورتاً کمتر از ۱ نیست.

حال مدل‌سازی سیستم وابسته به مکان را شرح می‌دهیم. یکی از عواملی که دینامیک اکوسیستم را به مکان وابسته می‌کند، حرکت ارگانیزم‌ها می‌باشد. در محیط دریایی، حرکت به این علت روی می‌دهد که ارگانیزم‌ها یا با جریان‌های آبی آشفته جابجا می‌شوند یا دارای توانایی خود حرکتی هستند و یا به این علت که عمل ترکیبی دو مکانیزم روی می‌دهد. فیتوپلانکتون‌ها کاملاً حجیم هستند، اما زئوپلانکتون‌ها می‌توانند به تنهایی حرکت کنند. اهمیت نسبی جریان‌های آبی آشفته و خود حرکتی به مقیاس مکانی و ساختار مکانی محیط آبی بستگی دارد. به‌عنوان مثال، به دلیل طبقه‌بندی اقیانوسی و ضخامت نسبتاً کوچک لایه بالایی اقیانوس، مهاجرت عمودی زئوپلانکتون بسیار مهم است و تأثیری شدید بر توزیع عمودی آن و نرخ‌های تغذیه دارد. در مقابل، تصور می‌شود خود حرکتی افقی نقشی ناچیز را در مقایسه با جریانات آشفته ایفا می‌کند. فرض می‌کنیم توزیع عمودی فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون در لایه‌های نوری، جایی که بیشتر فعالیت فتوسنتز روی می‌دهد یکنواخت است. برای توزیع افقی، یک فضای تک‌بعدی (D) را در نظر می‌گیریم که می‌توان آن را به‌عنوان یک برش عرضی در امتداد یک سطح اقیانوسی ۲ بعدی تفسیر کرد؛ بنابراین در دینامیک مکانی غلظت اکسیژن و تراکم‌های پلانکتون توابعی از x و t می‌باشند؛ یعنی $c(x, t)$ ، $u(x, t)$ و $v(x, t)$. تأثیر خود حرکتی زئوپلانکتون را نادیده می‌گیریم و جابجایی افقی را به‌عنوان عامل اصلی جابجایی مکانی در نظر می‌گیریم. لذا، از معادلات ۷ تا ۹ به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{Bc}{c+c_1} - u \right) - \frac{uv}{u+h} - \sigma u \quad (10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{Au}{c+1} - \frac{\delta uc}{c+c_2} - \frac{\tau cv}{c+c_3} \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\eta c^x}{c^x+c_4^x} \frac{uv}{u+h} - \mu v \quad (12)$$

در اینجا D_T ضریب انتشار $0 < x < 1$ که در آن l اندازه‌ی دامنه است. برای ساده‌تر شدن کار در شبیه‌سازی عددی، با معرفی متغیر جدید $x' = x \sqrt{m/D_T}$ مسئله بدون بعد شده و مقدار ضریب انتشار نیز برابر ۱ خواهد شد یعنی $D_T = 1$.

۴- گسسته سازی مدل‌ها

در این بخش به ارائه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل ظاهر شده در دستگاه معادلات (۹)-(۷) و (۱۵)-(۱۳) می‌پردازیم. ابتدا گسسته‌سازی زمان را با استفاده از روش تفاضلات متناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم سپس از روش توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب جواب استفاده خواهیم کرد. برای گسسته سازی مشتق زمانی از تقریب مرتبه اول زمانی پیشرو استفاده می‌کنیم:

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t},$$

که در آن Δt گام زمانی و U^n مقدار تابع در n امین گام زمانی را نشان می‌دهند. با در نظر گرفتن دستگاه معادلات (۹)-(۷) در گام زمانی n ام، به صورت زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} = \frac{Au^n}{c^n+1} - \frac{\delta u^n c^n}{c^n+c_2} - \frac{\tau c^n v^n}{c^n+c_3} - c^n \quad (13)$$

$$\frac{c^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \left[\frac{Bc^n}{c^n+c_1} - u \right] u^n - \frac{\delta u^n v^n}{u^n+h} - \sigma u^n, \quad (14)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{\eta c^{n^x}}{c^{n^x}+c_4^x} \frac{u^n v^n}{u^n+h} - \mu v^n \quad (15)$$

با جایگذاری مقادیر اولیه در دستگاه فوق جواب دستگاه معادلات (۹)-(۷) حاصل می‌گردد. برای گسسته سازی متغیر مکانی در سیستم وابسته به مکان، یک مجموعه به تعداد N نقطه‌ی

مجزا در بازه $[0, L]$ در نظر می‌گیریم:

$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}.$$

برای به دست آوردن تقریب مناسبی از توابع $c(x, t)$ ، $u(x, t)$ و $v(x, t)$ فرض می‌کنیم هر یک از این توابع به صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی چند ربعی $\phi_i(x) = \sqrt{1 + (x - x_i)^2}$ باشند:

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \sum_{i=1}^N a(t) \phi_i(x) \Rightarrow c(x, t) = \phi a(t), \\ u(x, t) &= \sum_{i=1}^N \beta(t) \phi_i(x) \Rightarrow c(x, t) = \phi \beta(t) \\ v(x, t) &= \sum_{i=1}^N \gamma(t) \phi_i(x) \Rightarrow c(x, t) = \phi \gamma(t). \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_r) & 1 & \dots & \phi_n(x_r) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \phi_1(x_N) & \phi_r(x_N) & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

ضرایب $\alpha(t)$ ، $\beta(t)$ و $\gamma(t)$ در هر گام زمانی مجهول هستند. برای محاسبه این ضرایب در هر گام زمانی باید حداقل معادله داشته باشیم. برای استفاده از روش هم‌مکانی برای آزمودن جواب، ابتدا گسسته سازی زمانی معادلات (۱۵)-(۱۳) را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} c(x, t_{n+1}) &= c(x, t_n) + \Delta t \left[\frac{1}{\tau} D_T \frac{\partial^2 c(x, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} D_T \frac{\partial^2 c(x, t_n)}{\partial x^2} + \frac{A u(x, t_n)}{c(x, t_n) + 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta u(x, t_n) c(x, t_n)}{c(x, t_n) + c_r} - \frac{\tau c(x, t_n) v(x, t_n)}{c(x, t_n) + c_r} - c(x, t_n) \right], \end{aligned}$$

$$u(x, t_{n+1}) = u(x, t_n) + \Delta t \left[\frac{1}{\gamma} D_T \frac{\partial^\gamma u(x, t_{n+1})}{\partial x^\gamma} + \frac{1}{\gamma} D_T \frac{\partial^\gamma u(x, t_n)}{\partial x^\gamma} \right. \\ \left. + \left(\frac{Bc(x, t_n)}{c(x, t_n) + c_1} - u(x, t_n) \right) u(x, t_n) - \frac{\delta u(x, t_n) v(x, t_n)}{u(x, t_n) + h} - \sigma u(x, t_n) \right],$$

$$v(x, t_{n+1}) = v(x, t_n) + \Delta t \left[\frac{1}{\gamma} D_T \frac{\partial^\gamma v(x, t_{n+1})}{\partial x^\gamma} + \frac{1}{\gamma} D_T \frac{\partial^\gamma v(x, t_n)}{\partial x^\gamma} \right. \\ \left. + \frac{\eta c(x, t_n)^\gamma}{c(x, t_n)^\gamma + c_2^\gamma} \frac{u(x, t_n) v(x, t_n)}{u(x, t_n) + h} - \mu v(x, t_n) \right],$$

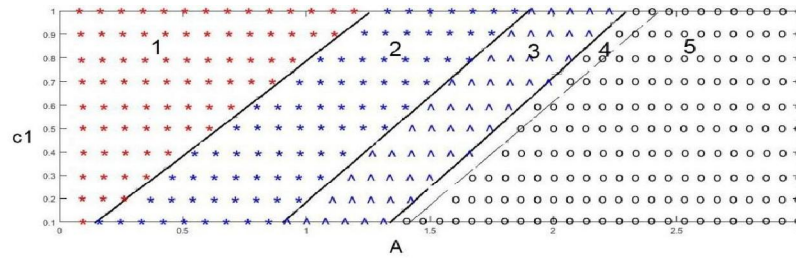
با جایگذاری تقریب‌هایی که در رابطه (۴) بیان گردید و اعمال شرایط مرزی در روابط فوق به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\mathbb{R}x_i - x_j, \mathbb{R}) - \frac{\Delta t D_T}{\gamma} \Delta \varphi(\mathbb{R}x_i - x_j, \mathbb{R}) \\ \frac{\partial \varphi(\mathbb{R}x_i - x_j, \mathbb{R})}{\partial n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

بنابراین در هر گام زمانی به حل یک دستگاه نیازمندیم تا بردار ضرایب مجهول را به دست آوریم. برای به دست آوردن تقریب توابع در هر گام زمانی کافی است بردار ضرایب به دست آمده را در روابط (۴) جایگذاری کنیم.

۵- جواب‌های عددی

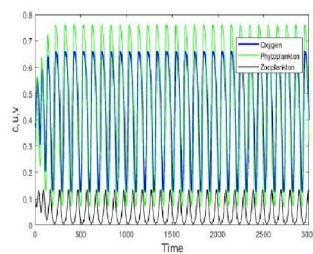
دستگاه معادلات ۷ تا ۹، معرف یک سیستم دینامیکی غیرخطی است. ابتدا باید نقاط تعادل این سیستم را به دست آوریم. این سیستم دارای ۴ نقطه تعادل $E_1 = (0, 0, 0)$ ، $E_2^{(1)} = (\tilde{c}_1, \tilde{u}_1, 0)$ ، $E_3^{(1)} = (\tilde{c}_1, \tilde{u}_1, 0)$ ، $E_4 = (\tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{v})$ می‌باشد. در این نقاط، در صورتی سیستم پایدار است که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین منفی باشد. در نقطه E_1 همه مقادیر صفر است، بنابراین نیاز به بررسی نداریم. در نقطه $E_2^{(1)}$ سیستم ناپایدار است. در نقاط $E_3^{(1)}$ و E_4 پایداری سیستم به پارامترهای A و C_1 وابسته است. این موضوع در مقاله [۱] بررسی شده است.



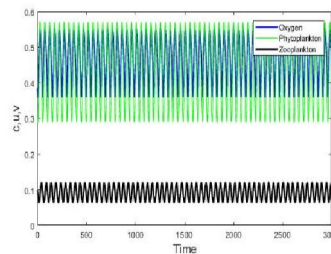
شکل (۲): صفحه پارامتری برای بررسی پایداری

در ادامه، پارامترهای مسئله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

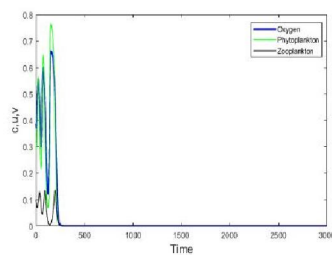
$$B = 1/8 \text{ و } C_1 = 0/7 \text{ و } C_2 = 1 \text{ و } C_3 = 1 \text{ و } C_4 = 1 \text{ و } \eta = 0/7 \text{ و } \nu = 0/01, \mu = 0/1 \text{ و } h = 0/1.$$



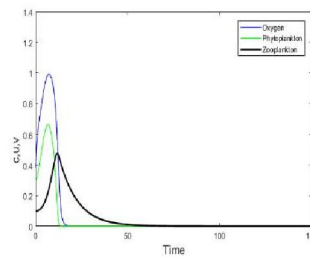
(a) $A = 2/0.54$



(b) $A = 2/0.91$



(a) $A = 2/0.54$



(b) $A = 2/0.91$

شکل (۳): غلظت اکسیژن، تراکم فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون با مقادیر مختلف پارامتر A

در این مدل، میزان تولید اکسیژن توسط پارامتر A تعیین می‌شود. نتایج به دست آمده با مقادیر

مختلف A و شرایط اولیه

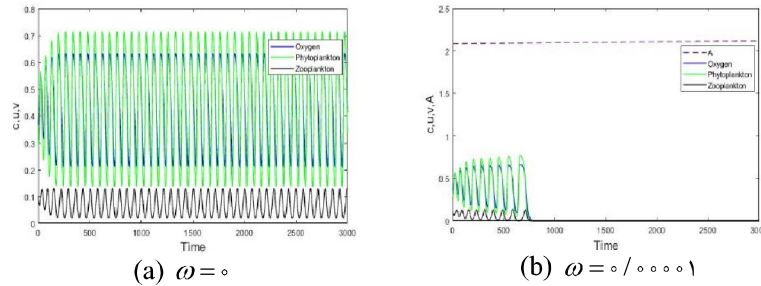
$$C_0 = 0/385, u_0 = 0/3, v_0 = 0/1$$

در شکل ۳ نشان داده شده است. با بررسی این شکل، ملاحظه می‌شود که با افزایش پارامتر A، چون وارد ناحیه ناپایداری می‌شویم، انقراض پلانکتون و تخلیه اکسیژن روی می‌دهد. در قسمت‌های a و b شکل ۳، چرخه حدی پایدار ملاحظه می‌شود در حالی که با افزایش A در قسمت‌های c و d شکل ۳ ملاحظه می‌شود که پس از مدت‌زمان کوتاهی اکسیژن تخلیه شده و پلانکتون‌ها نابود می‌شوند. نتایج عددی با گام زمانی $\Delta t = 0/01$ در معادلات گسسته ۱۳ تا ۱۵ به دست آمده است. نتایج حاصله با نتایج ارائه شده در مقاله [۱] سازگار می‌باشد.

همان‌گونه که در مقدمه مطرح شد، تغییرات در دمای آب می‌تواند بر میزان فتوسنتز و همچنین میزان اکسیژن خالص تولیدی در چرخه‌ی روزانه تأثیر بگذارد. حال، به‌منظور انعکاس تأثیر دما بر فتوسنتز، A (میزان تولید اکسیژن) را به‌عنوان تابعی از دما معرفی می‌کنیم. دما به‌نوبه خود تابعی از زمان است، بنابراین A نیز به تابعی از زمان تبدیل می‌شود بنابراین، $A = A(t)$ را در نظر گرفته و سایر پارامترها را به خاطر سهولت ثابت در نظر می‌گیریم. ساده‌ترین انتخاب ممکن برای $A(t)$ تابع خطی به فرم زیر می‌باشد:

$$A = A_0 \text{ for } t < t_1, \quad A = A_0 + \omega(t - t_1) \text{ for } t \geq t_1,$$

در اینجا t_1 لحظه‌ای است که گرمایش جهانی شروع می‌شود، A_0 میزان تولید اکسیژن خالص قبل از تغییرات و ω پارامتر متناظر با میزان گرمایش جهانی می‌باشد. حال باید بررسی کنیم که با افزایش دما، میزان تولید اکسیژن توسط فیتوپلانکتون کاهش می‌یابد یا افزایش؛ بنابراین دو حالت احتمالی را در نظر می‌گیریم: (أ) $\omega > 0$ که دمای بالاتر آب تولید اکسیژن را آسان‌تر می‌کند و (ب) $\omega < 0$ که دمای بالای آب مانع تولید اکسیژن می‌شود. از آنجاکه گرمایش جهانی یک فرایند کند است، ω را بسیار کوچک فرض می‌کنیم. برای انتخاب مقدار اولیه‌ی A یعنی A_0 فرض می‌کنیم که قبل از تغییر آب‌وهوا، اکوسیستم در یک حالت پایدار قرار دارد. وقتی $\omega < 0$ یعنی افزایش دمای آب مانع از تولید اکسیژن می‌شود. لذا، کاهش اکسیژن خود باعث نابودی پلانکتون‌ها خواهد شد و این حالت نیاز به بررسی ندارد. اگر $\omega > 0$ ، یعنی افزایش دما باعث تسهیل تولید اکسیژن می‌شود؛ اما نتایج عددی حاصل از مدل معرفی شده نشان می‌دهد که این امر باعث انقراض پلانکتون‌ها و تخلیه اکسیژن می‌شود. در هر دو قسمت شکل ۴ مقدار $A_0 = 2/085$ در نظر گرفته شده است. در قسمت a که ضریب گرمایش جهانی را صفر گرفته‌ایم چرخه پایداری وجود دارد. در قسمت b، همه پارامترها مثل قسمت a در نظر گرفته شده اما ضریب گرمایش جهانی نیز مقدار $w = 0/00001$ لحاظ شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، گرمایش جهانی باعث انقراض پلانکتون و تخلیه اکسیژن می‌شود.



شکل (۴): غلظت اکسیژن، تراکم فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون قبل و بعد از شروع گرمایش جهانی.

حال، به ارائه نتایج مدل وابسته به مکان می‌پردازیم. همان‌طور که در بخش قبلی توضیح داده شد، برای گسسته‌سازی متغیر مکان از روش بدون شبکه استفاده شده است. نتایج با پارامترهای زیر به دست آمده‌اند:

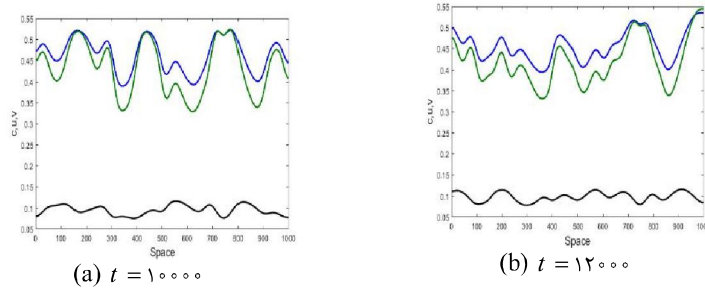
$$B = 1/8, \sigma = 0/1, c_1 = 0/7, c_p = 1, c_v = 1, c_f = 1, \eta = 0.7, \delta = 1, \nu = 0/0.1, \mu = 0/1 \text{ و } L = 1000.$$

برای شرایط اولیه مناسب، نخست توزیع گونه‌های تقریباً یکنواخت زیر را مدنظر قرار می‌دهیم:

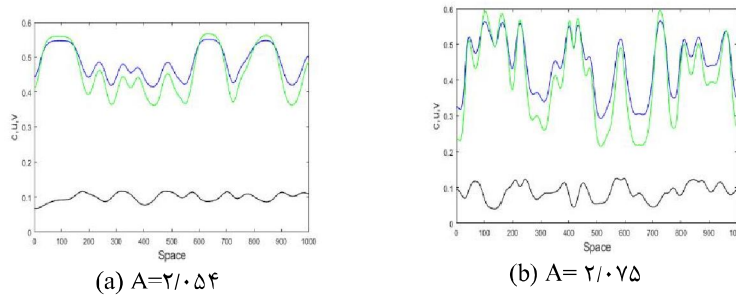
$$c(x, 0) = \bar{c}, u(x, 0) = \bar{u}, v(x, 0) = \left(x - \frac{L}{2}\right) * \frac{\mathcal{E}}{L} + \bar{v}, \quad (16)$$

که در آن، \bar{c} ، \bar{u} و \bar{v} مقادیر حالت پایدار برای سیستم مستقل از مکان هستند. نتایج به دست آمده در زمان دو زمان متفاوت $t = 10000$ و $t = 12000$ به ترتیب در قسمت‌های a و b شکل ۵ نشان داده شده‌اند. این شکل با $A = 2/0.5$ به دست آمده است. با توجه به این شکل، گذشت زمان تأثیری بر چرخه ارگانسیم‌ها نداشته است؛ یعنی، ارگانسیم‌ها با تشکیل یک الگوی مکان-زمانی خاص برای بقای خود مقاومت می‌کنند. همچنین نتایج حاصله به ازای مقادیر مختلف A و در زمان $t = 10000$ در شکل ۶ نشان داده شده است. با توجه به این شکل، دینامیک سیستم متناوب بوده و از الگوی منظمی نیز پیروی نمی‌کند؛ اما در شکل b، یعنی با بزرگ‌تر شدن A ، میزان کاهش یا افزایش غلظت شدیدتر بوده است. به عبارت دیگر عمق نوسانات بیشتر می‌باشد. شکل ۷ تأثیر گرمایش جهانی را بر سیستم نشان می‌دهد؛ یعنی در این شکل پارامتر افزایش دما، w ، مقداری مثبت و برابر 0.00001 در نظر گرفته شده است. با مقایسه شکل ۷ با شکل ۶ (که در آن $w = 0$ می‌باشد) ملاحظه می‌کنیم که در شکل ۷ عمق نوسانات زیادتر شده است. در مدل وابسته به مکان انقراض رخ نداده است و دلیل آن شکل‌گیری الگوهای خاص به دلیل مقاومت پلانکتون‌ها است؛ اما به دلیل نامحدود بودن گرمایش، در نهایت در مدل وابسته به مکان نیز به

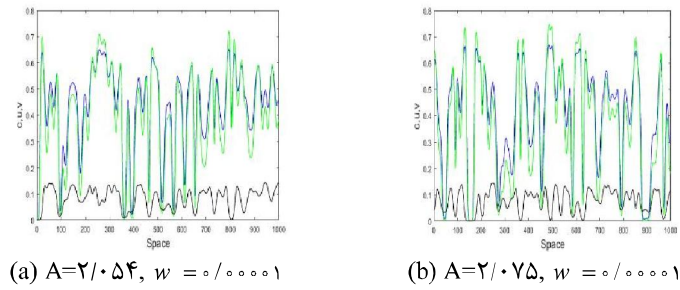
سمت انقراض خواهد رفت.



شکل (۵): غلظت اکسیژن، تراکم فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون نسبت به مکان در دو زمان متفاوت



شکل (۶): غلظت اکسیژن، تراکم فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون نسبت به مکان با دو مقدار متفاوت A



شکل (۷): غلظت اکسیژن، تراکم فیتوپلانکتون و زئوپلانکتون نسبت به مکان با دو مقدار متفاوت A و تأثیر w

۶- نتیجه‌گیری

یک مدل ریاضی، شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی که دینامیک پلانکتون-اکسیژن را شرح می‌دهد بررسی شد. برای به دست آوردن جواب سیستم، دستگاه معادلات مذکور با روش‌های عددی گسسته سازی شدند. متغیر زمان با روش تفاضلات متناهی پیشرو و متغیر مکان نیز با روش بدون شبکه هم‌محلی سراسری گسسته شد. ابتدا یک سیستم غیر وابسته به مکان را در نظر گرفتیم و نتایج عددی نشان‌دهنده این بود که به ازای مقادیر متوسط پارامتر A (مربوط به تولید اکسیژن) سیستم پایدار است و افزایش یا کاهش بیش از اندازه آن باعث انقراض پلانکتون و کاهش شدید اکسیژن خواهد شد. نشان دادیم که گرمایش جهانی بر میزان اکسیژن تولیدی تأثیر مستقیم دارد. سپس، سیستم وابسته به مکان متناظر را بررسی کردیم. نتایج نشان‌دهنده شکل‌گیری الگوهای خاص و مقاومت بیشتر پلانکتون‌ها بود، اگرچه در اینجا نیز افزایش معنادار گرما منجر به انقراض پلانکتون و تخلیه اکسیژن می‌شود. نتایج عددی، با آنچه در مقالات موجود درباره تئوری این موضوع بیان شده است مطابقت دارد [۱]. نتایج دارای مفاهیم مهمی در زمینه تغییرات آب و هوایی است. در واقع یکی از پیامدهای بزرگ گرمایش جهانی، افزایش دمای آب اقیانوس‌ها و در نتیجه انقراض پلانکتون‌ها و تخلیه اکسیژن می‌باشد که بخش عظیمی از حیات را در کل کره زمین نابود خواهد کرد.

منابع

- [1] Sekerci, Y. and Petrovskii, P. (2015). Mathematical Modelling of Plankton-Oxygen Dynamics Under the Climate Change, *Bulletin of Mathematical Biology*, **77**(12), 2325–2353.
- [2] Abbasbandy, S., Sladek, V., Shirzadi, A. and Sladek, J. (2011). Numerical simulations for coupled pair of diffusion equations by MLPG method, *CMES Compt. Model. Eng. Sci.* **71**(1), 5–37.
- [3] Shirzadi, A. and Ling, L. (2013). Convergent overdetermined-RBF-MLPG for solving second order elliptic PDEs, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **5**(1), 78–89.
- [4] Shirzadi, A., Sladek, V. and Sladek, J. (2013). A local integral equation formulation to solve coupled nonlinear reaction-diffusion equations by using moving least square approximation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* **37**(1), 8–14.
- [5] Shirzadi, A., Ling, L. and Abbasbandy, A. (2012). Meshless simulations of the two-dimensional fractional-time convection-diffusion-reaction equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.* **36**, 1522–1527.
- [6] Shirzadi, A., Sladek, V. and Sladek, J. (2013). A meshless simulations for 2d nonlinear reaction- diffusion brusselator system, *CMES: Computer*

- Modeling in Engineering & Sciences*, **95**(4), 259–282.
- [7] Shirzadi, A. and Takhtabnoos, F. (2015). A local meshless collocation method for solving Landau - Lifschitz - Gilbert equation, *Eng Anal Bound Elem*, **61**, 104–113.
- [8] Roohani Ghehsareh, H., Karimi, K. and Zaghian, A. (2016). Numerical solutions of a mathematical model of blood flow in the deforming porous channel using radial basis function collocation method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **38**(3), 709–720.
- [9] Abbasbandy, A., Hayat, T., Ghehsareh, A.R. and Alsaedi, A. (2013). MHD Falkner-Skan flow of Maxwell fluid by rational Chebyshev collocation method, *Applied Mathematics and Mechanics*, **34**(8), 921–930.
- [10] Abbasbandy, A. and Shivanian, E. (2017). Exact closed form solutions to nonlinear model of heat transfer in a straight fin, *International Journal of Thermal Sciences*, **116**, 45 - 51.
- [11] Shivanian, E. (2016). Local integration of population dynamics via moving least squares approximation, *Engineering with Computers*, **32**(2), 331–342.

Numerical Solutions of a Mathematical Model of Plankton–Oxygen Dynamics Using a mMeshless Method

Shabnam Ghayedi, Ahmad Shirzadi, Mansour Safarpour, Ghorban ali Bagheri Bardi

Department of Mathematics, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

Abstract

This paper is concerned with the numerical solutions of a mathematical model of coupled plankton–oxygen dynamics. About 70% of the atmospheric oxygen is produced by the photosynthetic activity of phytoplankton and the phytoplankton activities are affected by the ocean dynamics. So, the rate of oxygen production depends on water temperature and hence can be affected by the global warming. A mode describing plankton–oxygen dynamics is considered. For discretizing the model which is a system of nonlinear differential equations, a combination of finite differences and meshless methods are used. The time variable is discretized by forward finite difference scheme. Because of the high accuracy of meshless methods, in the space dependent model, a meshless approach is proposed for discretizing the space variable. The method uses the strong form equation and collocation approach for discretization. Multiquadrics radial basis functions are used which have the approximation power of exponential order. Numerical results reveal that in a specific domain of oxygen production the model is stable. Also, it is shown that global warming will affect the system, resulting in the oxygen reduction and plankton extinction.

Keywords: Plankton, Global warming, Differential equations, Finite difference methods, Meshless methods.

Mathematics Subject Classification (2010): 65P99, 65L12.