روش‌های تکراری برای محصور کردن مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری

مرضیه دهقانی مدیسه[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۸/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۵

چکیده: در این مقاله، معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری $A(p)X + XB(p) = C(p)$ را که عناصر آن توابعی خطی از پارامترهای متغیر در بازه‌ها هستند بررسی می‌کنیم. ابتدا چند ویژگی از مجموعه جواب این معادله پارامتری را بیان می‌کنیم و سپس به کمک این ویژگی‌ها چند شرط کافی برای کرانداری مجموعه جواب ارائه می‌کنیم. پس‌ازآن بر پایه خصوصیات مطرح‌شده برای مجموعه جواب، دو روش تکراری برای یافتن حصارهایی برای آن معرفی می‌کنیم. روش‌های تکراری مطرح‌شده دارای این ویژگی هستند که هزینه‌های محاسباتی را در مقایسه با دیگر روش‌ها به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهند. درنهایت با حل چند مثال عددی، کارایی روش‌های پیشنهادشده را نشان خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های پارامتری شده، معادله ماتریسی سیلوستر، مجموعه جواب پارامتری

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۵G۴۰، ۱۵A۲۴

۱- مقدمه

معادله ماتریسی سیلوستر[۲]

$$AX + XB = F, \qquad (1)$$

را که A و B به ترتیب ماتریس‌های مربعی معلوم از مرتبه m و n و F و X به ترتیب ماتریس سمت راست و ماتریس مجهول از مرتبه $m \times n$ هستند، در نظر بگیرید. همان‌طور که

۱- آدرس الکترویکی نویسنده مسئول مقاله: m.dehghani@scu.ac.ir

2- Sylvester matrix equation

می‌دانید این معادله به همراه معادله ماتریسی لیاپانوف[1] (یعنی معادله $AX+XA^T=F$) که حالت خاصی از آن به شمار می‌رود، نقش اساسی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، علوم و مهندسی ایفا می‌کنند. کاربردهای وسیع این دسته از معادلات را می‌توان در نظریه کنترل[2]، پردازش تصویر[3]، تبدیل مدل[4]، نظریه پایداری و پایداری قوی[5] و بسیاری دیگر از زمینه‌ها دید [۱، ۲ و ۳].

اگرچه معادلات ماتریسی از نوع معادله (۱) به‌اندازه قابل‌توجهی در نوشته‌ها و مقالات بررسی‌شده‌اند، اما به انواع عدم قطعیت‌هایی که می‌تواند در اجزای این معادله یعنی درایه‌های ماتریس‌های A، B و F اتفاق بیفتد، توجه کمتری شده است. همان‌طور که می‌دانید عناصر ورودی معادله ماتریسی (۱) در عمل از آزمون‌ها و اندازه‌گیری‌های فیزیکی حاصل می‌شوند و ازآنجاکه ظهور خطا به دلیل نادقیق بودن ابزارهای اندازه‌گیری امری طبیعی است، لذا این عناصر به‌طور اجتناب‌ناپذیری با خطا همراه خواهند بود. یکی از ابزارهای نشان‌دهنده این خطاهای طبیعی، استفاده از بازه‌هاست و بنابراین با معادله ماتریسی سیلوستر بازه‌ای $\boldsymbol{A}X+X\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}$ مواجه خواهیم شد که در آن $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{F}$ ماتریس‌هایی با درایه‌های به‌صورت بازه هستند. در عمل ممکن است ماتریس‌های موجود در $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{F}$ به‌طور مستقل عمل نکنند و اجزای آن‌ها به‌صورت توابعی خطی از تعدادی پارامتر به هم وابسته باشند. در این صورت معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری زیر را خواهیم داشت

$$A(p)X+XB(p)=F(p), \qquad p\in\boldsymbol{p}, \tag{۲}$$

که وابستگی $A(p)$، $B(p)$ و $F(p)$ به پارامترهای $p_1,\ldots,p_s$ به‌صورت زیر است

$$A(p)=\sum_{k=1}^{s}p_kA^k, \qquad B(p)=\sum_{k=1}^{s}p_kB^k, \qquad F(p)=\sum_{k=1}^{s}p_kF^k, \tag{۳}$$

که در آن‌ها $A^k\in\mathbb{R}^{m\times m}$، $B^k\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $F^k\in\mathbb{R}^{m\times n}$ برای $k=1,\ldots,s$، داده‌شده‌اند و پارامترهای $p_1,\ldots,p_s$ در درایه‌های بردار بازه‌ای $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_s)^T$ تغییر می‌کنند. توجه کنید که به‌راحتی با تعریف پارامتر $p_0=[1,1]$، ماتریس‌های پارامتری خطی (۳)، ماتریس‌های پارامتری خطی آفین

1- Lyapunov matrix equation
2- Control theory
3- Image processing
4- Model reduction
5- Stability and robust stability

$$A^{\circ} + \sum_{k=1}^{s} p_k A^k, \qquad B^{\circ} + \sum_{k=1}^{s} p_k B^k, \qquad F^{\circ} + \sum_{k=1}^{s} p_k F^k,$$

را نیز به‌عنوان حالت خاص خود شامل می‌شوند.

وابستگی‌های خطی به این شکل در محاسبات بازه‌ای، تاکنون توسط محققین مختلفی بررسی‌شده است. یکی از اولین مقاله‌ها درزمینه‌ی دستگاه معادلات پارامتری توسط جانسون ارائه‌شده است [۴]. همچنین مسئله کلی دستگاه معادلاتی که وابستگی خطی به پارامترهای بازه‌ای دارند برای اولین بار توسط رامپ مطرح شد [۵]. ازآن‌پس کارهای بسیاری درزمینهٔ این‌گونه مسائل انجام‌شده است. مسائلی همچون توسیع تخمین نوع αBB [1] به ماتریس‌های هسین [2] پارامتری خطی [۶]، ارائه یک خوش‌حالت کننده بهینه برای روش گاوس-سایدل [3] پارامتری بازه‌ای [۷]، یافتن یک پوشش درونی برای مجموعه جواب معادلات خطی پارامتری [۸]، توصیف صریح یک رده از سیستم‌های بازه‌ای پارامتری [۹] و محصور کردن مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی پارامتری به کمک تعمیمی از روش‌های باور-اسکیل [4] و هنسن-بلایک-روهن [5] [۱۰]، ازجمله کارهایی است که توسط لدیک انجام‌شده است. بسیاری دیگر از تحقیقات درزمینهٔ معادلات خطی پارامتری توسط پوپوا و همکارانش انجام‌شده است، مسائلی همچون توصیف صریح مجموعه جواب‌های AE [6]، تعیین کران مجموعه جواب‌ها، کیفیت مجموعه جواب‌ها و بسیاری رویکرد دیگر که برای محصور کردن مجموعه جواب به‌کاربرده‌اند [۱۱ الی ۱۷]. یک روش تکراری و یک روش مستقیم به ترتیب در [۱۸] و [۱۹] برای پوشش دادن مجموعه جواب معادلات خطی پارامتری ارائه‌شده است. یک رویکرد یکنواختی در کارهایی جداگانه توسط روهن [۲۰] و اسکالنا [۲۱] مطرح‌شده است. برای مواجهه با سیستم‌های خطی پارامتری یک روش مستقیم توسط اسکالنا [۲۲] و کولو [۲۳] و اخیراً یک روش تکراری توسط اسکالنا و لدیک [۲۴] پیشنهادشده است. همچنین معادله ماتریسی پارامتری $A(p)X = B(p)$ (با چند طرف ثانی) و روش‌هایی برای محصور کردن مجموعه جواب آن در [۲۵ و ۲۶] موردمطالعه قرارگرفته شده است.

اما اغلب روش‌هایی که در بالا به آن اشاره شد، برای بررسی دستگاه معادلات خطی پارامتری مطرح‌شده‌اند. در این مقاله، ما یک مسئله کلی‌تر که همه حالات قبل را در برمی‌گیرد یعنی

1- αBB -type underestimation
2- Hessian
3- Gauss-Seidel
4- Bauer-Skeel
5- Hansen-Bliek-Rohn
6- AE-solution sets

معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را موردبررسی قرار می‌دهیم. این معادله نه‌تنها معادلات خطی پارامتری بلکه حالت بازه‌ای آن‌ها را نیز شامل می‌شود.

معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را می‌توان به کمک ضرب کرونکر $\otimes$ به دستگاه معادلات خطی پارامتری زیر تبدیل کرد

$$G(p)x = f(p), \qquad p \in \boldsymbol{p}, \tag{۴}$$

که در آن

$$G(p) = I_n \otimes A(p) + B^T(p) \otimes I_m, \quad x = \operatorname{vec}(X), \quad f(p) = \operatorname{vec}(F(p)).$$

در دستگاه فوق $\operatorname{vec}(X)$ عملگری است که ماتریس $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ را به بردار $x \in \mathbb{C}^{mn}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌کند

$$\operatorname{vec}(X) = (X_{۱۱}, \dots, X_{m۱}, X_{۱۲}, \dots, X_{m۲}, \dots, X_{۱n}, \dots, X_{mn})^T.$$

همچنین I_n و I_m به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های همانی از مرتبه n و m هستند. درواقع به‌راحتی می‌توان دید که ماتریس پارامتری $G(p)$ و بردار پارامتری $f(p)$ در دستگاه (۴) برای $p \in \boldsymbol{p}$ به‌صورت زیر هستند

$$G(p) = \sum_{k=۱}^{s} p_k G^k, \qquad G^k = I_n \otimes A^k + B^{kT} \otimes I_m,$$
$$f(p) = \sum_{k=۱}^{s} p_k f^k, \qquad f^k = \operatorname{vec}(F^k).$$

یک رویکرد متداول برای مواجهه با معادلات از نوع (۲) این است که ابتدا آن را به شکل کرونکری معادلش در (۴) تبدیل کنیم و سپس از روش‌های مطرح‌شده قبلی، دستگاه معادلات خطی پارامتری (۴) را حل کرده و به کمک جواب به‌دست آمده برای آن، جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را به‌دست آوریم. اگرچه این رویکرد درست و منطقی است اما یکی از مشکلاتی که وجود دارد این است که به دلیل بزرگ بودن ابعاد ماتریس‌های درگیر در معادله (۴)، هزینه‌های محاسباتی این روش‌ها بسیار بالا خواهد بود. در واقع به‌کارگیری روش‌هایی همچون روش کرافچیک پارامتری[1]، روش باور-اسکیل تعمیم‌یافته، روش هنسن-بلایک-روهن تعمیم‌یافته و بسیاری دیگر از این روش‌ها روی معادله پارامتری (۴) دارای پیچیدگی محاسباتی $\mathrm{O}(m^۳n^۳)$ می‌باشند. هدف این مقاله ارائه روش‌هایی است که پیچیدگی محاسباتی را به‌اندازه قابل‌توجهی به $\mathrm{O}(m^۳ + n^۳)$ تقلیل می‌دهند.

1- Parametric Krawczyk method

نمادگذاری. در این مقاله کمیت‌های بازه‌ای با حروف برجسته و غیر بازه‌ای با حروف معمولی نمایش داده می‌شوند. میدان اعداد حقیقی و مختلط به ترتیب با $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مشخص می‌شوند. نماد $\mathbb{IR}$ ($\mathbb{IC}$) برای فضای اعداد بازه‌ای حقیقی (مختلط) استفاده می‌شود. مجموعه شامل ماتریس‌های بازه‌ای حقیقی (مختلط) از بعد $m\times n$ با $\mathbb{IR}^{m\times n}$ ($\mathbb{IC}^{m\times n}$) نمایش داده می‌شود. همچنین $\mathbb{IR}^n$ ($\mathbb{IC}^n$) مجموعه بردارهای n-بعدی بازه‌ای حقیقی (مختلط) است. عدد بازه‌ای $\boldsymbol{x}=[\underline{x},\overline{x}]$ را که $\underline{x}$ کران پایین و $\overline{x}$ کران بالای آن است در نظر بگیرید. نقطه مرکزی $\boldsymbol{x}$ که با $\mathrm{mid}(\boldsymbol{x})$ یا x^c نمایش داده می‌شود عبارت است از $\mathrm{mid}(\boldsymbol{x})\equiv x^c:=\frac{\overline{x}+\underline{x}}{۲}$. شعاع $\boldsymbol{x}$ که با $\mathrm{rad}(\boldsymbol{x})$ یا x^Δ نمایش داده می‌شود به‌صورت $\mathrm{rad}(\boldsymbol{x})\equiv x^\Delta:=\frac{\overline{x}-\underline{x}}{۲}$ تعریف می‌شود. همچنین اندازه بزرگی $\boldsymbol{x}$ که با $\mathrm{mag}(\boldsymbol{x})$ یا $|\boldsymbol{x}|$ نمایش داده می‌شود عبارت است از بزرگ‌ترین عضو موجود در بازه $\boldsymbol{x}$ از حیث قدر مطلق یعنی $\mathrm{mag}(\boldsymbol{x})\equiv|\boldsymbol{x}|:=\max\{|x|:x\in\boldsymbol{x}\}$. مفاهیم مرکز، شعاع و اندازه بزرگی برای بردارها و ماتریس‌های بازه‌ای به‌صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف می‌شود. قطر یک ماتریس مربعی مفروض $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ عبارت است از بردار n-بعدی $\mathrm{diag}(A)=(A_{۱۱},\ldots,A_{nn})^T$. همچنین برای یک بردار n-بعدی $a=(a_۱,\ldots,a_n)^T\in\mathbb{C}^n$، ماتریس قطری از بعد $n\times n$ با درایه‌های قطری $a_۱,\ldots,a_n$ توسط $\mathrm{Diag}(a)=\mathrm{Diag}(a_۱,\ldots,a_n)$ نشان داده می‌شود. برای یک ماتریس پارامتری دلخواه $C(p)=\sum_{k=۱}^{t}p_kC^k$، $p\in\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_۱,\ldots,\boldsymbol{p}_t)$، ماتریس بازه‌ای $\boldsymbol{C}$ متناظر با آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{C}:=\sum_{k=۱}^{t}\boldsymbol{p}_kC^k.$$

در ادامه ساختار مقاله به این شکل است: در بخش ۲ ابتدا مفهوم مجموعه جواب را برای معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) تعریف می‌کنیم و سپس چند ویژگی از این مجموعه جواب بیان خواهیم کرد. بعدازآن به کمک ویژگی‌های بیان‌شده، چند شرط کافی برای کرانداری مجموعه جواب ارائه خواهیم کرد. همچنین بر پایه خصوصیات مطرح‌شده دو روش تکراری با هزینه محاسباتی بسیار پایین برای محصور کردن مجموعه جواب ارائه می‌کنیم. کارایی روش‌های پیشنهادشده با حل چند مثال عددی و مقایسه با روش‌های دیگر در بخش ۳ بررسی می‌شود. در پایان مقاله را با یک جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش ۴ خاتمه می‌دهیم.

۲- نتایج اصلی

۲-۱ مجموعه جواب و ویژگی‌های آن

معادله پارامتری (۲) در حقیقت یک خانواده از معادلات ماتریسی سیلوستر است. درواقع برای هر $p \in \boldsymbol{p}$، معادله ماتریسی سیلوستر $A(p)X + XB(p) = F(p)$ عضوی از این خانواده است. مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) به‌عنوان مجموعه شامل جواب‌های اعضای این خانواده تعبیر می‌شود.

تعریف ۱. مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) عبارت است از

$$\Xi := \{X \in \mathbb{R}^{m\times n} : A(p)X + XB(p) = F(p),\ p \in \boldsymbol{p}\}.$$

لم ۱ [۲۷]. برای ماتریس بازه‌ای $\boldsymbol{A}$ و ماتریس نقطه‌ای حقیقی X، داریم

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}X) = \mathrm{rad}(\boldsymbol{A})\,|X|, \qquad \mathrm{rad}(X\boldsymbol{A}) = |X|\,\mathrm{rad}(\boldsymbol{A}).$$

قضیه ۱. اگر $X \in \Xi$ آنگاه

$$|A(p^c)X + XB(p^c) - F(p^c)| \le A^\Delta |X| + |X| B^\Delta + F^\Delta. \qquad (۵)$$

اثبات. فرض کنید $X \in \Xi$. در این صورت یک عضو $p \in \boldsymbol{p}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$A(p)X + XB(p) = F(p). \qquad (۶)$$

از طرفی برای $p \in \boldsymbol{p}$ مفروض، با توجه به این‌که $A(p^c) = A^c$ و $A(p) \in \boldsymbol{A}$ پس به‌وضوح می‌توان گفت $|A(p^c) - A(p)| \le A^\Delta$ و به همین ترتیب $|B(p^c) - B(p)| \le B^\Delta$ و $|F(p^c) - F(p)| \le F^\Delta$. پس با توجه به این مطالب و رابطه (۶) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
|A(p^c)X + XB(p^c) - F(p^c)| &= |A(p^c)X - A(p)X + XB(p^c) - XB(p) - F(p^c) + F(p)| \\
&= |(A(p^c) - A(p))X + X(B(p^c) - B(p)) - (F(p^c) - F(p))| \\
&\le |A(p^c) - A(p)||X| + |X||B(p^c) - B(p)| + |F(p^c) - F(p)| \\
&\le A^\Delta |X| + |X| B^\Delta + F^\Delta.
\end{aligned}$$

قضیه ۲. اگر $X \in \Xi$ آنگاه

$$|A(p^c)X + XB(p^c) - F(p^c)| \le \sum_{k=۱}^{s} p_k^\Delta\, |A^k X + XB^k - F^k|. \qquad (۷)$$

اثبات. فرض کنید $X \in \Xi$. پس $p \in \boldsymbol{p}$ موجود است به‌طوری‌که $A(p)X + XB(p) = F(p)$. حال با توجه به این‌که $|p_k^c - p_k| \le p_k^\Delta$ ، $k = 1,\ldots,s$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |A(p^c)X + XB(p^c) - F(p^c)| &= |A(p^c)X - A(p)X + XB(p^c) - XB(p) - F(p^c) + F(p)| \\ &= |(A(p^c) - A(p))X + X(B(p^c) - B(p)) - (F(p^c) - F(p))| \\ &= \left|(\sum_{k=1}^{s}(p_k^c - p_k)A^k)X + X(\sum_{k=1}^{s}(p_k^c - p_k)B^k) - \sum_{k=1}^{s}(p_k^c - p_k)F^k\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{s}(p_k^c - p_k)(A^kX + XB^k - F^k)\right| \le \sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |A^kX + XB^k - F^k|. \end{aligned}$$

قضیه ۳. قضیه ۲ کران بالای کوچک‌تری نسبت به قضیه ۱ برای عبارت $|A(p^c)X + XB(p^c) - F(p^c)|$ معرفی می‌کند.

اثبات. درواقع باید نشان دهیم

$$\sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |A^kX + XB^k - F^k| \le A^\Delta |X| + |X| B^\Delta + F^\Delta.$$

با استفاده از لم ۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |A^kX + XB^k - F^k| &\le \sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |A^k||X| + \sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |X||B^k| + \sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |F^k| \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |A^k|\Big)|X| + |X|\Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |B^k|\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k^\Delta |F^k|\Big) \\ &= A^\Delta |X| + |X| B^\Delta + F^\Delta. \end{aligned}$$

می‌دانیم که یک مجموعه در صورتی می‌تواند توسط مجموعه متناهی دیگری پوشش داده شود که کران‌دار باشد. در اینجا چون هدف ما یافتن پوشش (حصار) هایی برای مجموعه جواب Ξ است، لذا ابتدا چند شرط کافی برای کران‌داری Ξ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴. مجموعه جواب Ξ کران‌دار است هرگاه

الف. نامساوی

$$|A(p^c)X + XB(p^c)| \le A^\Delta |X| + |X| B^\Delta, \qquad (۸)$$

تنها دارای جواب بدیهی $X = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد.

ب. نامساوی

$$|A(p^c)X+XB(p^c)|\le \sum_{k=۱}^{s} p_k^{\Delta}|A^k X+XB^k|, \tag{۹}$$

تنها دارای جواب بدیهی $X=۰\in\mathbb{R}^{m\times n}$ باشد.

اثبات الف. با استفاده از قضیه ۱، می‌توان گفت که اگر X متعلق به مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری

$$A(p)X+XB(p)=۰,\qquad p\in\boldsymbol{p}, \tag{۱۰}$$

باشد آنگاه X در نامساوی (۸) صدق خواهد کرد؛ اما بنابر فرضیات مسئله، این نامساوی تنها دارای جواب بدیهی $X=۰\in\mathbb{R}^{m\times n}$ است؛ بنابراین مجموعه جواب دستگاه پارامتری (۱۰) عبارت است از مجموعه تک عضوی $\{۰\}$ که این بدین معناست که برای هر $p\in\boldsymbol{p}$ معادله $A(p)X+XB(p)=۰$ تنها دارای جواب $X=۰\in\mathbb{R}^{m\times n}$ است؛ اما می‌دانیم که برای هر $p\in\boldsymbol{p}$، این معادله با شکل کرونکری $G(p)x=۰$ معادل است که در آن $G(p)$ ماتریس پارامتری تعریف‌شده در (۴) است؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر $p\in\boldsymbol{p}$، دستگاه معادلات خطی $G(p)x=۰$ تنها دارای جواب بدیهی $x=۰\in\mathbb{R}^{mn}$ است. از طرفی می‌دانیم که ماتریس دلخواه A نامنفرد است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ تنها دارای جواب بدیهی $x=۰$ باشد. با توجه به این نکته نتیجه می‌گیریم که ماتریس $G(p)$ برای هر $p\in\boldsymbol{p}$ نامنفرد است. روهن [۲۸] با بیان چهل شرط معادل با نامنفرد بودن ماتریس‌های بازه‌ای، نشان داد که در یک خانواده از دستگاه‌های معادلات خطی $Ax=b$ اگر همه ماتریس‌های ضرایب نامنفرد باشند آنگاه مجموعه جواب این خانواده از معادلات، کران‌دار خواهد بود. با توجه به این مطلب و نیز نامنفرد بودن ماتریس‌های $G(p)$ برای هر $p\in\boldsymbol{p}$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $F^k\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $k=۱,\ldots,s$، مجموعه جواب

$$\{x\in\mathbb{R}^{mn}:G(p)x=f(p),\quad p\in\boldsymbol{p}\}$$

که در آن $f(p)=\mathrm{vec}(F(p))$، کران‌دار خواهد بود. ازآنجاکه دستگاه $G(p)x=f(p)$ با شکل $A(p)X+XB(p)=F(p)$ معادل است لذا برگرداندن مجموعه فوق به شکل زیر

$$\{X\in\mathbb{R}^{m\times n}:A(p)X+XB(p)=F(p),\quad p\in\boldsymbol{p}\},$$

کران‌داری مجموعه جواب Ξ را برای هر $F^k\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $k=۱,\ldots,s$، نتیجه می‌دهد.

اثبات ب. اثبات این قسمت کاملاً مشابه با قسمت (الف) است. کافیست که در روند اثبات از قضیه ۲ به‌جای قضیه ۱ استفاده کنیم.

۲-۲ روش‌های تکراری جدید

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، یک رویکرد در برخورد با معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) این است که ابتدا آن را به شکل کرونکری معادلش در (۴) تبدیل کنیم و سپس از روش‌های موجود برای حل دستگاه ثانویه استفاده کنیم؛ اما یکی از بزرگ‌ترین مشکلاتی که در این زمینه وجود دارد، حجم بالای محاسبات موردنیاز است. در اینجا روش‌هایی را ارائه خواهیم کرد که تا حد زیادی هزینه‌های محاسباتی را کاهش می‌دهند.

فرض کنید ماتریس‌های $A(p^c)$ و $B(p^c)$ قطری شدنی باشند یعنی ماتریس‌های وارون‌پذیر $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و ماتریس‌های قطری D_A و D_B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A(p^c) = UD_AU^{-1}, \qquad B(p^c) = V^{-1}D_BV. \tag{۱۱}$$

توجه کنید که درواقع در تجزیه طیفی (۱۱) ستون‌های U بردارهای ویژه‌ی $A(p^c)$ و ستون‌های V بردارهای ویژه $B(p^c)$ هستند. همچنین قطرهای D_A و D_B به ترتیب مقادیر ویژه $A(p^c)$ و $B(p^c)$ می‌باشند.

حال می‌خواهیم از ماتریس‌های U و V به‌عنوان خوش‌حالت کننده برای سیستم (۲) استفاده کنیم. اگر ماتریس U^{-1} را از سمت چپ و ماتریس V^{-1} را از سمت راست در سیستم پارامتری (۲) ضرب کنیم آنگاه سیستم پارامتری جدید زیر حاصل می‌شود

$$A_\dagger(p)Y + YB_\dagger(p) = F_\dagger(p), \qquad p \in \boldsymbol{p}, \tag{۱۲}$$

که در آن $A_\dagger(p) = U^{-1}A(p)U$ ، $B_\dagger(p) = VB(p)V^{-1}$ ، $F_\dagger(p) = U^{-1}F(p)V^{-1}$ و $Y = U^{-1}XV^{-1}$. در واقع $A_\dagger(p)$ ، $B_\dagger(p)$ و $F_\dagger(p)$ در سیستم پارامتری جدید (۱۲) ماتریس‌های پارامتری به‌صورت زیر هستند

$$A_\dagger(p) = \sum_{k=1}^{s} p_k A_\dagger^{\,k}, \qquad A_\dagger^{\,k} = U^{-1}A^kU,$$

$$B_\dagger(p) = \sum_{k=1}^{s} p_k B_\dagger^{\,k}, \qquad B_\dagger^{\,k} = VB^kV^{-1},$$

$$F_\dagger(p) = \sum_{k=1}^{s} p_k F_\dagger^{\,k}, \qquad F_\dagger^{\,k} = U^{-1}F^kV^{-1}.$$

با توجه به تجزیه طیفی (۱۱)، به‌راحتی می‌توان دید که ماتریس‌های ضرایب $A_{\dagger}(p)$ و $B_{\dagger}(p)$ در مرکز بردار بازه‌ای $\boldsymbol{p}$، قطری هستند، به‌عبارت‌دیگر $A_{\dagger}(p^c)=D_A$ و $B_{\dagger}(p^c)=D_B$. همین امر موجب انعطاف‌پذیری سیستم (۱۲) می‌شود که یکی از مزیت‌های این خوش‌حالت سازی به شمار می‌رود.

اگر ماتریس بازه‌ای $\boldsymbol{Y}$ حصاری برای مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۱۲) باشد (برای هر عضو Y متعلق به مجموعه جواب سیستم پارامتری (۱۲) داشته باشیم $Y\in\boldsymbol{Y}$)، آنگاه با استفاده از ویژگی‌های شمول در محاسبات بازه‌ای به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $X=U\boldsymbol{Y}V$ حصاری برای مجموعه جواب Ξ از معادله پارامتری اولیه (۲) خواهد بود. لذا در ادامه به یافتن حصارهایی برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) می‌پردازیم.

فرض کنید بردارهای $a\in\mathbb{C}^m$ و $b\in\mathbb{C}^n$ به‌گونه‌ای باشند که

$$A_{\dagger}(p^c)=\mathrm{Diag}(a),\qquad B_{\dagger}(p^c)=\mathrm{Diag}(b).$$

اگر Y متعلق به مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۱۲) باشد، آنگاه با استفاده از قضیه ۱، Y در رابطه زیر صدق خواهد کرد

$$|A_{\dagger}(p^c)Y+YB_{\dagger}(p^c)-F_{\dagger}(p^c)|\le A_{\dagger}^{\Delta}|Y|+|Y|B_{\dagger}^{\Delta}+F_{\dagger}^{\Delta}. \qquad (۱۳)$$

حال فرض کنید $\boldsymbol{Y}$ پوششی برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) باشد، در این صورت ازآنجاکه $Y\in\boldsymbol{Y}$، به‌وضوح عبارت سمت راست رابطه (۱۳) کوچک‌تر از یا مساوی با Υ_1 تعریف‌شده در زیر خواهد بود

$$\Upsilon_1:=A_{\dagger}^{\Delta}|\boldsymbol{Y}|+|\boldsymbol{Y}|B_{\dagger}^{\Delta}+F_{\dagger}^{\Delta}.$$

بنابراین

$$|A_{\dagger}(p^c)Y+YB_{\dagger}(p^c)-F_{\dagger}(p^c)|\le\Upsilon_1. \qquad (۱۴)$$

از طرفی اگر $\Theta_n\in\mathbb{R}^n$ و $\Theta_m\in\mathbb{R}^m$ بردارهایی باشند که همه مؤلفه‌های آن‌ها برابر ۱ است، آنگاه با یک محاسبه ساده می‌توان دید

$$A_{\dagger}(p^c)Y+YB_{\dagger}(p^c)=Y\,o\,(a\Theta_n^T+\Theta_m b^T),$$

که o نشان‌دهنده ضرب هادامارد است؛ بنابراین می‌توان گفت که نامساوی (۱۴) با رابطه زیر معادل است

$$|Y\,o\,(a\Theta_n^T+\Theta_m b^T)-F_{\dagger}(p^c)|\le\Upsilon_1.$$

در نتیجه

$$Yo(a\Theta_n^T + \Theta_m b^T) \in [F_\dagger(p^c) - \Upsilon_1, F_\dagger(p^c) + \Upsilon_1],$$

و بنابراین

$$Y \in \left([F_\dagger(p^c) - \Upsilon_1, F_\dagger(p^c) + \Upsilon_1]./(a\Theta_n^T + \Theta_m b^T)\right) \cap \boldsymbol{Y} =: \boldsymbol{Y}^{(1)}, \qquad (۱۵)$$

که در آن ./ نمایشگر تقسیم هادامارد است. چون Y به‌عنوان یکی از اعضای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) به‌دلخواه انتخاب‌شده بود، پس با توجه به (۱۵) می‌توان نتیجه گرفت که $\boldsymbol{Y}^{(1)}$ پوشش دیگری برای این مجموعه جواب خواهد بود. اگر $\boldsymbol{Y}^{(1)}$ به‌دست آمده را جایگزین $\boldsymbol{Y}$ کرده و مراحل قبل را تکرار کنیم آنگاه به یک پوشش بسته‌تر[1] (به‌اصطلاح کیپ‌تر) برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) دست پیدا می‌کنیم. ادامه این روند تا برقراری یک شرط مناسب برای توقف، روش تکراری زیر را برای به‌دست آوردن یک پوشش مناسب برای مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۱۲) پیشنهاد می‌کند

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}^{(0)} := \boldsymbol{Y}, \\ \boldsymbol{Y}^{(k+1)} := \Psi_1(A_\dagger(p), B_\dagger(p), F_\dagger(p), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}^{(k)}), \end{cases} \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$\Psi_1(A_\dagger(p), B_\dagger(p), F_\dagger(p), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}^{(k)}) := \left([F_\dagger(p^c) - \Upsilon_1, F_\dagger(p^c) + \Upsilon_1]./(a\Theta_n^T + \Theta_m b^T)\right) \cap \boldsymbol{Y}^{(k)}.$$

تکرار استدلال بالا با به‌کار بستن قضیه ۲ به‌جای قضیه ۱، روش تکراری دوم زیر را برای دستیابی به یک پوشش مناسب برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) معرفی می‌کند

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}^{(0)} := \boldsymbol{Y}, \\ \boldsymbol{Y}^{(k+1)} := \Psi_2(A_\dagger(p), B_\dagger(p), F_\dagger(p), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}^{(k)}), \end{cases} \qquad (۱۷)$$

که در آن

$$\Psi_2(A_\dagger(p), B_\dagger(p), F_\dagger(p), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}^{(k)}) := \left([F_\dagger(p^c) - \Upsilon_2, F_\dagger(p^c) + \Upsilon_2]./(a\Theta_n^T + \Theta_m b^T)\right) \cap \boldsymbol{Y}^{(k)},$$

1- Tighter enclosure

و

$$\Upsilon_{2} := \sum_{k=1}^{s} p_k^{\Delta} \mid A_{\dagger}^{k} X + XB_{\dagger}^{k} - F_{\dagger}^{k} \mid.$$

شرط توقف تکرارهای (۱۶) و (۱۷) را رسیدن فاصله بین دو تکرار متوالی به یک آستانه تحمل (ε) قرار می‌دهیم.

قضیه ۵. روش‌های تکراری (۱۶) و (۱۷) با هر شروع اولیه‌ای همگرا هستند و حد آن‌ها مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را محصور می‌کند.

اثبات. فرض کنید $\{\boldsymbol{Y}^{(k)}\}$ دنباله حاصل از روش‌های تکراری (۱۶) و (۱۷) باشد. طبق ساختار این روش‌ها، $\{\boldsymbol{Y}^{(k)}\}$ یک دنباله تودرتو از ماتریس‌های بازه‌ای است یعنی $\boldsymbol{Y}^{(k+1)} \subseteq \boldsymbol{Y}^{(k)}$ برای $k = 0,1,\ldots$؛ اما طبق لم ۴/۶ از [۲۹]، هر دنباله بازه‌ای تودرتو به اشتراک اعضایش همگراست. پس دنباله $\{\boldsymbol{Y}^{(k)}\}$ به $\boldsymbol{Y}^{(*)} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}^{(k)}$ همگراست. از طرفی چون تک‌تک اعضای این دنباله مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۱۲) را دربردارنده پس اشتراک آن‌ها که همان حد دنباله است نیز این مجموعه جواب را در بردارد.

قضیه ۶. معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ پوششی برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) باشد. اگر $\boldsymbol{Y}^{*} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ توسط روش‌های تکراری (۱۶) و (۱۷) حاصل‌شده باشد، آنگاه $U\boldsymbol{Y}^{*}V$ مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) را محصور خواهد کرد.

اثبات. با توجه به قضیه ۵ می‌دانیم که با فرضیات مسئله $\boldsymbol{Y}^{*}$ پوششی برای مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) است. این بدین معناست که برای هر $p \in \boldsymbol{p}$، جواب Y^{*} از معادله ماتریسی سیلوستر $A_{\dagger}(p)Y + YB_{\dagger}(p) = F_{\dagger}(p)$ در رابطه $Y^{*} \in \boldsymbol{Y}^{*}$ صدق می‌کند که در آن $A_{\dagger}(p) = U^{-1}A(p)U$ ، $B_{\dagger}(p) = VB(p)V^{-1}$ ، $F_{\dagger}(p) = U^{-1}F(p)V^{-1}$ و $Y = U^{-1}XV^{-1}$. با برگرداندن این معادله به شکل معادلش یعنی معادله $A(p)X + XB(p) = F(p)$، نتیجه می‌گیریم که جواب X^{*} از معادله آخر در رابطه $X^{*} = UY^{*}V \in U\boldsymbol{Y}^{*}V$ صدق می‌کند. چون $p \in \boldsymbol{p}$ به‌دلخواه انتخاب‌شده بود پس نتیجه می‌گیریم $\Xi \subseteq U\boldsymbol{Y}^{*}V$ که در آن Ξ مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) است.

نقطه شروع روندهای تکراری (۱۶) و (۱۷) که در واقع پوششی برای مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۱۲) است را می‌توان با حل معادله ماتریسی سیلوستر بازه‌ای متناظرش یعنی $\boldsymbol{A}_{\dagger}Y + Y\boldsymbol{B}_{\dagger} = \boldsymbol{F}_{\dagger}$ به‌دست آورد. ازآنجاکه ماتریس‌های بازه‌ای درگیر در این

معادله بازه‌ای، همه ماتریس‌های پارامتری متناظرشان را شامل می‌شوند پس این اطمینان را داریم که حصار به‌دست آمده برای مجموعه جواب آن، مجموعه جواب معادله پارامتری (۱۲) را نیز پوشش خواهد داد. برای حل معادله ماتریسی سیلوستر بازه‌ای مذکور می‌توان از روش‌های مطرح‌شده در [۳۰، ۳۱ و ۳۲] بهره برد. الگوریتم ۱ روش‌های تکراری پیشنهادشده را برای محصور کردن مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) توصیف می‌کند. در این الگوریتم در خط ششم، به ازای $i=۱$ روش تکراری (۱۶) و به ازای $i=۲$ روش تکراری (۱۷) حاصل می‌شود.. ما برای اختصار هر دو روش را در یک الگوریتم آورده‌ایم. همان‌طور که در قضیه ۵ بیان شد، روش‌های تکراری مذکور با هر نقطه شروعی همگرا هستند لذا این الگوریتم همواره به جواب خواهد رسید. محک توقف الگوریتم را رسیدن به یک تعداد مشخص از تعداد تکرارها و یا کوچک‌تر شدن فاصله دو تکرار متوالی از یک آستانه تحمل دلخواه ε قرار داده‌ایم که در آن فاصله دو تکرار متوالی $\boldsymbol{Y}^{(k)}$ و $\boldsymbol{Y}^{(k+۱)}$ به‌صورت هر نرم دلخواهی از تفاضل شعاع‌هایشان به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{dis}(\boldsymbol{Y}^{(k)},\boldsymbol{Y}^{(k+۱)}) = \|\operatorname{rad}(\boldsymbol{Y}^{(k+۱)}) - \operatorname{rad}(\boldsymbol{Y}^{(k)})\|.$$

الگوریتم ۱. روش‌های تکراری (۱۶) و (۱۷) به ترتیب به ازای $i=۱$ و $i=۲$، برای محصور کردن مجموعه جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲)

Function Iterative_Method_i ($A^k, B^k, F^k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}, \varepsilon$)

1. Use a floating point algorithm for computing U, V and their approximate inverses $U^{-۱}, V^{-۱}$;
2. Compute the interval matrices $\boldsymbol{A}_\dagger, \boldsymbol{B}_\dagger, \boldsymbol{F}_\dagger$;
3. Put $\boldsymbol{Y}^{(۰)} = \boldsymbol{Y}$;
4. Put $ready = ۰;\ k = ۰;\ kmax = ۱۵$;
5. While ($\sim ready$ & $k < kmax$) do
6. Put $\boldsymbol{Y}^{(k+۱)} := \Psi_i(A_\dagger(p), B_\dagger(p), F_\dagger(p), \boldsymbol{p}, \boldsymbol{Y}^{(k)})$;
7. $raedy = (\|\operatorname{rad}(\boldsymbol{Y}^{(k+۱)}) - \operatorname{rad}(\boldsymbol{Y}^{(k)})\| < \varepsilon)$;
8. Put $k = k + ۱$;
9. End While
10. Display "$U\boldsymbol{Y}^k V$ is an enclosure for Ξ ".

قضیه ۷. پیچیدگی محاسباتی روش‌های تکراری مطرح‌شده در الگوریتم ۱، $\mathrm{O}(m^3 + n^3)$ است.

اثبات. هزینه محاسبات تجزیه‌های طیفی مربوط به $A(p^c)$ و $B(p^c)$ در (۱۱) به‌ترتیب $\mathrm{O}(m^3)$ و $\mathrm{O}(n^3)$ است. عملگرهای دیگر شامل ضرب، جمع و تقسیمات نقطه‌به‌نقطه بین ماتریس‌های با ابعاد $m\times m$، $n\times n$ و $m\times n$، حداکثر دارای پیچیدگی $\mathrm{O}(m^3 + n^3)$ محاسباتی است. ازآنجاکه هزینه محاسبات سایر قسمت‌های الگوریتم در مقابل هزینه‌های یادشده قابل‌چشم‌پوشی است لذا در مجموع می‌توان گفت که این الگوریتم نیازمند $\mathrm{O}(m^3 + n^3)$ عملگر محاسباتی است.

۳- مثال‌های عددی

در این بخش برای تشریح کارایی روش‌های تکراری (۱۶) و (۱۷) از چند مثال عددی و مقایسه آن‌ها با چند روش دیگر استفاده می‌کنیم. روش‌های مقایسه شده را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

KRW: روش کرافچیک پارامتری معرفی‌شده در [۳۳]، برای حل سیستم پارامتری تبدیل‌شده (۴).

BS: روش باور-اسکیل تعمیم‌یافته [۱۰]، برای حل سیستم پارامتری تبدیل‌شده (۴).

HBR: روش هنسن-بلایک-روهن تعمیم‌یافته [۱۰]، برای حل سیستم پارامتری تبدیل‌شده (۴).

ITR1: روش تکراری (۱۶).

ITR2: روش تکراری (۱۷).

توجه کنید که روش‌های KRW، BS و HBR ابتدا روی دستگاه معادلات خطی پارامتری (۴) اجرا می‌شوند و سپس بردار به‌دست آمده برای جواب به ماتریس جواب معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری (۲) تبدیل می‌شود.

روش‌های KRW، BS، HBR، ITR1 و ITR2 را از حیث زمان اجرایی و کیفیت حصارهای به‌دست آمده برای مجموعه جواب مسئله موردنظر باهم مقایسه می‌کنیم. معیار سنجش کیفیت پوشش‌های حاصله را میانگین شعاع درایه‌های ماتریس بازه‌ای به‌دست آمده قرار می‌دهیم؛ یعنی برای یک پوشش به‌دست آمده $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ توسط هر یک از روش‌ها، میانگین شعاعی آن را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{Avg} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rad}(\boldsymbol{X}_{ij})}{mn}.$$

در جداول زیر، نماد "OM" به معنای شکست روش به دلیل خارج از حد حافظه بودن عملیات محاسباتی آن است. همچنین زمان‌های اجرایی برحسب ثانیه می‌باشند. در مثال‌ها هنگام استفاده از داده‌های تصادفی[1]، ماشین را روی حالت rng(0,'twister') قرار می‌دهیم. قرار دادن ماشین در این حالت، قابلیت تولید مجدد داده‌ها را تضمین می‌کند.

مثال ۱. معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری زیر را در نظر بگیرید

$$A(p)X + XB(p) = F(p), \qquad p \in \boldsymbol{p},$$

که در آن پارامترهای p_k، $k = ۱,\dots,۵$ ، در بازه $\boldsymbol{p}_k = [۱-\delta, ۱+\delta]$ تغییر می‌کنند و

$$A(p) = \sum_{k=۱}^{۵} p_k A^k, \qquad A^k = k * gallery('parter', n), \quad k = ۱,\dots,۵,$$

$$B(p) = \sum_{k=۱}^{۵} p_k B^k, \qquad B^k = k * gallery('lehmer', n), \quad k = ۱,\dots,۵,$$

$$F(p) = \sum_{k=۱}^{۵} p_k F^k, \qquad F^k = ones(n,n), \qquad k = ۱,\dots,۵.$$

این معادله پارامتری را با روش‌های مختلف و به ازای مقادیر مختلف n و δ حل کرده‌ایم. نتایج حاصل برای زمان‌های اجرایی و کیفیت پوشش‌های به‌دست آمده را می‌توانید به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ملاحظه کنید.

همان‌طور که می‌بینید، اعداد به نمایش در آمده در جدول ۱، نشان‌دهنده سرعت‌بالای اجرای دو روش ITR1 و ITR2 در مقایسه با دیگر روش‌هاست که خود مؤید قضیه ۷ است. در واقع روش‌های ITR1 و ITR2 نیازمند $O(n^۳)$ عملگر محاسباتی می‌باشند حال آن‌که این مقدار برای مابقی روش‌ها $O(n^۶)$ است. روش KRW از بعد ۳۰ به بعد به دلیل کمبود حافظه برای اجرا (سنگین بودن محاسباتش) با شکست مواجه می‌شود. این شکست برای روش‌های BS و HBR از بعد ۱۵۰ به بعد اتفاق می‌افتد. نتایج حاصله در جدول ۲ بیانگر کیفیت بهتر حصارهای به‌دست آمده توسط KRW و BS نسبت به بقیه روش‌هاست. البته کیفیت نتایج حاصل از روش‌های ITR1 و ITR2 نیز در حد بسیار قابل‌قبولی است. روش ITR2 از حیث کیفیت نتایج بهتر از روش ITR1 است که مؤید قضیه ۳ است، حال آن‌که کندتر از روش ITR1 عمل می‌کند.

1- Random data

جدول (۱): زمان‌های اجرایی برای مثال ۱

ITR2	ITR1	HBR	BS	KRW	δ	n
۰/۰۵۲۷	۰/۰۳۹۴	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۵۸	۰/۰۱۲۱	$۱۰^{-۳}$	۵
۰/۰۵۴۹	۰/۰۳۱۶	۰/۰۴۵۶	۰/۰۱۵۲	۰/۰۳۸۳	$۱۰^{-۳}$	۱۰
۰/۰۵۷۵	۰/۰۳۴۴	۰/۱۴۸۴	۰/۰۸۷۶	۰/۳۵۴۳	$۱۰^{-۴}$	۱۵
۰/۰۵۸۶	۰/۰۳۳۰	۰/۴۴۶۰	۰/۳۳۳۲	۲/۳۴۳۳	$۱۰^{-۴}$	۲۰
۰/۰۷۳۸	۰/۰۴۱۰	۱/۴۵۵۷	۱/۳۰۵۸	۴۱۴/۴۵۴۹	$۱۰^{-۴}$	۲۵
۰/۰۷۴۲	۰/۰۳۸۴	۳/۲۹۹۴	۳/۰۸۶۲	OM	$۱۰^{-۴}$	۳۰
۰/۰۹۱۷	۰/۰۴۸۰	۱۶/۱۸۳۳	۱۵/۷۲۷۵	OM	$۱۰^{-۴}$	۴۰
۰/۱۱۹۱	۰/۰۵۸۹	۶۷/۲۳۰۸	۶۵/۱۵۰۴	OM	$۱۰^{-۴}$	۵۰
۰/۱۶۴۵	۰/۰۷۵۷	۱۷۷/۶۵۳۱	۱۸۱/۷۳۲۴	OM	$۱۰^{-۴}$	۶۰
۰/۲۰۸۷	۰/۱۴۱۳	۴۶۲/۵۵۲۶	۴۵۴/۱۴۱۶	OM	$۱۰^{-۴}$	۷۰
۰/۲۵۰۷	۰/۱۵۰۶	۱/۰۵۹۱e+۳	۱/۰۱۶۷e+۳	OM	$۱۰^{-۴}$	۸۰
۰/۳۴۳۷	۰/۱۴۶۰	۲/۳۱۵۷e+۳	۲/۴۵۵۰e+۳	OM	$۱۰^{-۴}$	۹۰
۰/۳۹۷۹	۰/۱۹۷۰	۵/۶۳۷۵e+۳	۶/۳۲۰۸e+۳	OM	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰
۱/۰۳۴۱	۰/۴۰۹۰	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۱۵۰
۲/۱۹۶۰	۰/۷۹۹۳	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۲۰۰
۶/۰۷۸۰	۲/۰۹۵۱	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۳۰۰
۱۵/۰۰۳۲	۵/۰۵۸۹	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۴۰۰
۲۶/۱۳۹۳	۹/۱۰۷۲	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۵۰۰
۴۳/۳۹۴۶	۱۵/۹۹۰۶	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۶۰۰
۶۴/۴۱۰۷	۲۰/۴۶۶۹	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۷۰۰
۹۸/۰۹۹۹	۳۰/۱۳۶۹	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۸۰۰
۱۳۲/۴۳۲۵	۳۸/۷۶۳۷	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۹۰۰
۱۷۸/۳۹۰۱	۵۴/۸۸۷۰	OM	OM	OM	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰۰

جدول (۲): شعاع‌های میانگین برای مثال ۱

ITR2	ITR1	HBR	BS	KRW	δ	n
۹/۶۱۴۷e-۵	۴/۹۶۳۰e-۴	۱/۵۶۳۵e-۴	۳/۱۳۰۲e-۵	۳/۱۴۹۳e-۵	10^{-3}	۵
۱/۲۴۰۶e-۴	۶/۴۲۸۶e-۴	۱/۰۸۶۶e-۴	۲/۱۷۵۴e-۵	۲/۲۰۶۰e-۵	10^{-3}	۱۰
۱/۴۴۳۲e-۵	۷/۴۷۷۴e-۵	۸/۳۲۲۵e-۶	۱/۶۶۴۷e-۶	۱/۶۶۸۳e-۶	10^{-4}	۱۵
۱/۵۸۸۰e-۵	۸/۲۲۷۲e-۵	۶/۷۸۴۴e-۶	۱/۳۵۷۰e-۶	۱/۳۶۰۹e-۶	10^{-4}	۲۰
۱/۷۲۷۹e-۵	۸/۹۵۱۹e-۵	۵/۷۵۵۹e-۶	۱/۱۵۱۳e-۶	۱/۱۵۵۴e-۶	10^{-4}	۲۵
۱/۸۳۶۸e-۵	۹/۵۱۷۳e-۵	۵/۰۱۷۷e-۶	۱/۰۰۳۶e-۶	----	10^{-4}	۳۰
۲/۰۳۳۶e-۵	۱/۰۵۴۰e-۴	۴/۰۲۵۶e-۶	۸/۰۵۲۱e-۷	----	10^{-4}	۴۰
۲/۱۹۹۶e-۵	۱/۱۴۰۱e-۴	۳/۳۸۲۴e-۶	۶/۷۶۵۵e-۷	----	10^{-4}	۵۰
۲/۳۴۵۹e-۵	۱/۲۱۶۱e-۴	۲/۹۲۸۷e-۶	۵/۸۵۷۹e-۷	----	10^{-4}	۶۰
۲/۴۷۸۸e-۵	۱/۲۸۵۱e-۴	۲/۵۸۹۶e-۶	۵/۱۷۹۷e-۷	----	10^{-4}	۷۰
۲/۵۹۷۷e-۵	۱/۳۴۶۹e-۴	۲/۳۲۵۸e-۶	۴/۶۵۲۰e-۷	----	10^{-4}	۸۰
۲/۷۰۸۰e-۵	۱/۴۰۴۱e-۴	۲/۱۱۴۲e-۶	۴/۲۲۸۸e-۷	----	10^{-4}	۹۰
۲/۸۱۴۰e-۵	۱/۴۵۹۱e-۴	۱/۹۴۰۳e-۶	۳/۸۸۱۱e-۷	----	10^{-4}	۱۰۰
۳/۲۵۵۵e-۵	۱/۶۸۸۳e-۴	----	----	----	10^{-4}	۱۵۰
۳/۶۱۲۵e-۵	۱/۸۷۳۵e-۴	----	----	----	10^{-4}	۲۰۰
۴/۱۹۲۸e-۵	2,1745e-۴	----	----	----	10^{-4}	۳۰۰
۴/۶۶۴۴e-۵	2,4192e-۴	----	----	----	10^{-4}	۴۰۰
۵/۰۷۰۶e-۵	۲/۶۲۹۸e-۴	----	----	----	10^{-4}	۵۰۰
۵/۴۳۰۱e-۵	۲/۸۱۶۳e-۴	----	----	----	10^{-4}	۶۰۰
۵/۷۵۶۴e-۵	۲/۹۸۵۵e-۴	----	----	----	10^{-4}	۷۰۰
۶/۰۵۵۲e-۵	۳/۱۴۰۴e-۴	----	----	----	10^{-4}	۸۰۰
۶/۳۳۳۸e-۵	۳/۲۸۴۹e-۴	----	----	----	10^{-4}	۹۰۰
۶/۵۹۴۰e-۵	۳/۴۱۹۸e-۴	----	----	----	10^{-4}	۱۰۰۰

مثال ۲. معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری

$$A(p)X + XB(p) = F(p), \qquad p \in \boldsymbol{p},$$

را در نظر بگیرید. در این معادله

$$A(p)=\sum_{k=۱}^{۱۰} p_k A^k, \qquad A^k = gallery('lehmer',n), \quad k=۱,\ldots,۱۰,$$
$$B(p)=\sum_{k=۱}^{۱۰} p_k B^k, \qquad B^k = rand(n,n), \qquad k=۱,\ldots,۱۰,$$
$$F(p)=\sum_{k=۱}^{۱۰} p_k F^k, \qquad F^k = ones(n,n), \qquad k=۱,\ldots,۱۰,$$

و پارامترهای p_k متعلق به بازه $\boldsymbol{p}_k=[۱-\delta,۱+\delta]$ هستند. نتایج حاصل از اجرای چند روش مختلف را به ازای مقادیر مختلفی از n و δ می‌توانید به ترتیب در جداول ۳ و ۴ ملاحظه کنید.

جدول (۳): زمان‌های اجرایی برای مثال ۲

ITR2	ITR1	HBR	BS	KRW	δ	n
۰/۰۵۸۳	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۹۸	۰/۰۱۱۶	$۱۰^{-۴}$	۵
۰/۰۸۶۹	۰/۰۳۸۳	۰/۰۵۰۳	۰/۰۲۴۳	۰/۰۴۲۱	$۱۰^{-۵}$	۱۰
۰/۰۹۱۸	۰/۰۵۸۶	۰/۱۷۶۶	۰/۱۱۷۶	۰/۳۳۳۶	$۱۰^{-۶}$	۱۵
۰/۱۳۳۷	۰/۰۴۲۴	۰/۶۳۶۷	۰/۴۹۱۶	۲/۵۰۶۰	$۱۰^{-۶}$	۲۰
۰/۱۳۰۵	۰/۰۴۶۳	۲/۰۱۲۹	۱/۹۰۱۱	۳۰۰/۱۶۷۰	$۱۰^{-۶}$	۲۵
۰/۱۶۶۸	۰/۰۴۸۹	۴/۹۲۵۸	۴/۷۲۶۲	OM	$۱۰^{-۶}$	۳۰
۰/۱۵۷۰	۰/۰۶۳۰	۲۲/۳۷۸۱	۲۲/۳۵۴۸	OM	$۱۰^{-۶}$	۴۰
۰/۲۴۴۱	۰/۰۸۵۹	۸۵/۶۸۸۳	۸۱/۰۴۵۶	OM	$۱۰^{-۶}$	۵۰
۰/۲۷۰۲	۰/۰۹۶۹	۲۵۰/۰۶۷۱	۲۵۳/۳۳۷۱	OM	$۱۰^{-۶}$	۶۰
۰/۳۴۵۵	۰/۱۲۲۲	۶۱۵/۱۵۴۸	۶۰۲/۲۲۱۷	OM	$۱۰^{-۶}$	۷۰
۰/۴۴۱۶	۰/۱۵۰۱	۱/۹۲۰۷e+۳	۲/۲۱۰۴e+۳	OM	$۱۰^{-۶}$	۸۰
۰/۵۶۰۸	۰/۱۸۱۵	۳/۲۵۰۶e+۳	۳/۸۳۷۷e+۳	OM	$۱۰^{-۶}$	۹۰
۰/۷۰۰۸	۰/۲۱۸۵	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۱۰۰
۱/۸۳۰۷	۰/۵۰۴۵	OM	OM	OM	$۱۰^{-۲}$	۱۵۰
۳/۷۹۲۳	۱/۱۹۰۳	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۲۰۰
۱۱/۷۵۷۳	۳/۱۶۸۹	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۳۰۰
۲۶/۶۳۵۵	۶/۷۷۷۸	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۴۰۰
۴۷/۳۹۴۸	۱۱/۳۵۳۴	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۵۰۰
۸۲/۲۲۰۱	۱۸/۸۲۸۵	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۶۰۰
۱۲۵/۸۸۶۳	۳۰/۷۵۴۷	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۷۰۰
۱۸۰/۷۵۷۶	۳۹/۷۵۸۹	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۸۰۰
۲۵۵/۳۹۱۱	۵۷/۷۶۲۵	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۹۰۰
۳۳۵/۰۷۴۵	۷۲/۹۷۴۴	OM	OM	OM	$۱۰^{-۶}$	۱۰۰۰

جدول (۴): شعاع‌های میانگین برای مثال ۲

ITR2	ITR1	HBR	BS	KRW	δ	n
۳/۶۲۴۴e-۵	۱/۱۰۶۸e-۴	۳/۶۶۷۳e-۴	۱/۸۴۲۱e-۵	۱/۸۸۶۸e۵	$۱۰^{-۴}$	۵
۴/۷۸۷۹e-۶	۱/۷۶۸۰e-۵	۳/۹۳۶۴e-۵	۵/۷۵۴۹e-۷	۵/۷۸۴۸e-۷	$۱۰^{-۵}$	۱۰
۲/۴۸۰۱e-۶	۶/۷۲۱۲e-۶	۱/۵۲۴۱e-۵	۱/۲۴۶۱e-۶	۱/۲۵۲۵e-۶	$۱۰^{-۶}$	۱۵
۱/۴۵۳۵e-۶	۵/۹۱۱۱e-۶	۱/۲۵۴۳e-۵	۲/۶۰۷۵e-۷	۲/۶۲۰۷e-۷	$۱۰^{-۶}$	۲۰
۱/۲۲۴۹e-۶	۵/۳۷۲۵e-۶	۴/۶۱۴۶e-۶	۳/۲۹۵۶e-۸	۳/۳۰۳۶e-۸	$۱۰^{-۶}$	۲۵
۱/۹۵۴۶e-۶	۷/۷۹۶۸e-۶	۹/۷۹۱۱e-۶	۱/۷۳۵۱e-۷	----	$۱۰^{-۶}$	۳۰
۲/۰۹۹۷e-۶	۱/۸۷۴۳e-۵	۷/۷۴۱۳e-۶	۵/۷۲۴۷e-۸	----	$۱۰^{-۶}$	۴۰
۳/۰۹۶۵e-۵	۵/۰۸۰۴e-۵	۱/۴۵۲۴e-۴	۲/۵۴۷۰e-۵	----	$۱۰^{-۶}$	۵۰
۱/۶۹۰۹e-۶	۱/۲۹۰۲e-۵	۱/۲۵۹۷e-۵	۱/۳۳۲۵e-۷	----	$۱۰^{-۶}$	۶۰
۲/۹۵۳۳e-۶	۲/۵۶۰۱e-۵	۱/۹۶۸۸e-۵	۱/۹۶۷۶e-۷	----	$۱۰^{-۶}$	۷۰
۲/۷۹۵۶e-۴	۳/۵۷۸۷e-۴	۰/۰۰۲۰	۲/۲۷۵۴e-۴	----	$۱۰^{-۶}$	۸۰
۵/۴۸۴۶e-۵	۹/۶۸۲۴e-۵	۳/۴۰۴۴e-۴	۴/۲۸۷۸e-۵	----	$۱۰^{-۶}$	۹۰
۳/۳۸۴۹e-۵	۱/۲۹۲۵e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۶}$	۱۰۰
۲/۴۵۷۱e-۴	۳/۸۵۳۷e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۶}$	۱۵۰
۲/۶۲۱۲e-۴	۴/۹۳۲۵e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۶}$	۲۰۰
۴/۴۷۷۹e-۴	۶/۸۳۱۳e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۶}$	۳۰۰
۵/۷۲۶۳e-۵	۴/۲۵۲۹e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۶}$	۴۰۰
۵/۷۴۲۷e-۵	۱/۳۴۹۰e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۵۰۰
۳/۵۰۸۴e-۶	۴/۴۵۹۷e-۵	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۶۰۰
۱/۸۵۰۷e-۵	۱/۰۳۰۸e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۷۰۰
۲/۵۲۶۷e-۵	۱/۰۴۱۴e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۸۰۰
۹/۰۴۶۶e-۶	۸/۵۹۷۴e-۵	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۹۰۰
۱۳/۰۰۰e-۴	۱۴/۰۰۰e-۴	----	----	----	$۱۰^{-۷}$	۱۰۰۰

نتایج به نمایش در آمده در جدول ۳ حاکی از زمان اجرایی بسیار پایین در روش‌های ITR1 و ITR2 نسبت به بقیه روش‌ها است. روش‌های KRW، BS و HBR به دلیل کمبود حافظه اجرایی به ترتیب از بعد ۳۰، ۱۰۰ و ۱۰۰ به بعد با شکست مواجه شده‌اند. همچنین با توجه به جدول ۴ حصارهای به‌دست آمده توسط روش‌های KRW، BS و ITR2 دارای میانگین شعاعی بهتری نسبت به سایر روش‌ها هستند. در مجموع میانگین شعاعی خوب و سرعت‌بالای اجرای

روش‌های پیشنهادشده در این مقاله، آن‌ها را قابل‌قبول می‌سازد. کیفیت حصارهای به‌دست آمده از روش ITR2 نسبت به ITR1 بهتر است که خود تأییدی بر قضیه ۳ است حال آن‌که نیازمند زمان اجرای بیشتری نسبت به ITR1 است. همان‌طور که می‌بینید به دلیل تعداد بیشتر پارامترهای درگیر در این مثال، روش‌های ITR1 و ITR2 نسبت به مثال قبل نیازمند زمان اجرایی بیشتری هستند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله ماتریسی سیلوستر پارامتری را به دلیل کاربرد بسیار وسیع آن در زمینه‌های مختلف علوم موردبررسی قرار دادیم. این نوع معادله بسیاری دیگر از معادلات نظیر معادلات ماتریسی بازه‌ای و دستگاه معادلات خطی پارامتری را به‌عنوان حالات خاص خود در بردارد. ما ابتدا مفهوم مجموعه جواب را برای آن تعریف کرده و سپس چند ویژگی از این مجموعه ارائه کردیم. پس از آن به دلیل هزینه‌های محاسباتی بسیار بالایی که اجرای روش‌های معمول برای حل دستگاه معادلات خطی پارامتری به‌دست آمده از شکل کرونکری معادل آن دارند، دو روش تکراری پیشنهاد کردیم که به‌طور قابل‌توجهی هزینه‌های محاسباتی را کاهش دادند. در انتها چند مثال عددی مطرح کردیم که به‌وسیله قیاس‌های انجام‌شده با چند روش دیگر، مؤید کارایی روش‌های پیشنهادشده بودند.

منابع

[1] Frommer, A. and Hashemi, B. (2012). Verified error bounds for solutions of Sylvester matrix equations, *Linear Algebra and its Applications*, **436**, 405-420.

[2] Hajarian, M. (2016). Generalized conjugate direction algorithm for solving the general coupled matrix equations over symmetric matrices, *Numerical Algorithms*, **73**, 591–609.

[3] Hajarian, M. (2017). New finite algorithm for solving the generalized nonhomogeneous Yakubovich-Transpose matrix equation, *Numerical Algorithms*, **19**, 164-172.

[4] Jansson, C. (1991). Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side, *Computing*, **46**, 265-274.

[5] Rump, S.M. (1994). Verification methods for dense and sparse systems of equations, in *Elsevier*, Amsterdam.

[6] Hladik, M. (2016). An extension of the aBB-type underestimation to linear parametric Hessian matrices, *Journal of Global Optimization*, **64**, 217-231.

[7] Hladik, M. (2016). Optimal preconditioning for the interval parametric Gauss-Seidel method, in *Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics*, Springer, Cham.

[8] Hladik, M. and Popova, E.D. (2015). Maximal inner boxes in parametric AE-solution sets with linear shape, *Applied Mathematics and Computation*, **270**, 606-619.

[9] Hladik, M. (2008). Description of symmetric and skew-symmetric solution set, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **30**, 509-521.

[10] Hladik, M. (2012). Enclosures for the solution set of parametric interval linear systems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **22**, 561-574.

[11] Popova, E.D. and Hladik, M. (2013). Outer enclosures to the parametric AE solution set, *Soft Computing*, **17**, 1403-1414.

[12] Popova, E.D. and Kramer, W. (2007). Inner and Outer Bounds for the Solution Set of Parametric Linear Systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **199**, 310-316.

[13] Popova, E.D. (2001). On the solution of parametrised linear systems, Kluwer, London, 127-138.

[14] Popova, E.D. (2002). Quality of the solution sets of parameter-dependent interval linear systems, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **82**, 723-727.

[15] Popova, E.D. (2012). Explicit description of AE solution sets for parametric linear systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **33**, 1172-1189.

[16] Popova, E.D. (2014). Improved Enclosure for Some Parametric Solution Sets with Linear Shape, *Computers & Mathematics with Applications*, **68**, 994-1005.

[17] Popova, E.D. and Kramer, W. (2008). Visualizing parametric solution sets, *BIT Numerical Mathematics*, **48**, 95-115.

[18] Kolev, L.V. (2004). A method for outer interval solution of linear parametric systems, *Reliable Computing*, **10**, 227-239.

[19] Kolev, L.V. (2006). Improvement of a direct method for outer solution of linear parametric systems, *Reliable Computing*, **12**, 193-202.

[20] Rohn, J. (2004). A method for handling dependent data in interval linear systems, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, **911**.

[21] Skalna, I. (2008). On checking the monotonicity of parametric interval solution of linear structural systems, in *Springer-Verlag*, Berlin/Heidelberg, 1400-1409.

[22] Skalna, I. (2006). A method for outer interval solution of systems of linear equations depending linearly on interval parameters, *Reliable Computing*, **12**, 107-120.

[23] Kolev, L.V. (2014). Parameterized solution of linear interval parametric systems, *Applied Mathematics and Computation*, **246**, 229-246.

[24] Skalna, I. and Hladik, M. (2017). A new method for computing a p-solution to parametric interval linear systems with affine-linear and nonlinear dependencies, *BIT Numerical Mathematics*, **57**, 1109–1136.

[25] Dehghani-Madiseh, M. and Dehghan, M. (2016). Parametric AE-solution sets to the parametric linear systems with multiple right-hand sides and parametric matrix equation A(p)X=B(p), *Numerical Algorithms*, **73**, 245-279.

[26] Popova, E.D. (2018). Enclosing the solution set of parametric interval matrix equation A(p)X=B(p), *Numerical Algorithms*, **78**, 423-447.

[27] Neumaier, A. (1990). *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge: Cambridge University Press.

[28] Rohn, J. (2009). Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey, *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **18**, 500-512.

[29] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM: Philadelphia.

[30] Rohn, J. VERSOFT: Verification Software in MATLAB/INTLAB, *Available from: http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/matlab/*.

[31] Dehghani-Madiseh, M. and Hladik, M. (2018). Efficient Approaches for Enclosing the United Solution Set of the Interval Generalized Sylvester Matrix Equation, *Applied Numerical Mathematics*, **126**, 18-33.

[32] Dehghani-Madiseh, M. and Dehghan, M. (2014). Generalized solution sets of the interval generalized Sylvester matrix equation and some approaches for inner and outer estimations, *Computers and Mathematics with Applications*, **68**, 1758–1774.

[33] Rump, S.M. (2010). Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic, *Acta Numerica*, **19**, 287-449.

Iterative methods for enclosing the solutions set of the parametric Sylvester matrix equation

Marzieh Dehghani-Madiseh

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this paper, we study the parametric Sylvester matrix equation whose elements are linear functions of some parameters varying within intervals. We first present some characterizations of its solution set, then using these characterizations, we give some sufficient conditions for boundedness of the solution set. We also propose two efficient iterative methods to find some enclosures to the solution set. The introduced iterative methods reduce the computational costs of enclosing the solution set of our problem with respect to the other methods, considerably. Finally, by some numerical methods we show the effectiveness of the proposed methods.

***Keywords*:** Parametric systems, Sylvester matrix equation, Parametric solution set.

Mathematics Subject Classification (2010): 65G40, 15A24.