مقایسه‌ی برآوردگرهای بوت استرپ، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشتاوری پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی

صدیقه زمانی مهریان*، عبدالرضا سیاره[۱]**

*گروه آمار، دانشگاه رازی

**گروه علوم کامپیوتر و آمار، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۸/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۶/۱۲

چکیده: فرض نرمال بودن خطاها، یکی از فرضیات معمول در مدل‌های سری زمانی است اما در بعضی مواقع با مواردی مواجه می‌شویم که خطاها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کنند. در این مقاله مدل‌های خود بازگشتی در نظر گرفته می‌شوند که در آن خطاها مستقل و هم توزیع هستند و از توزیعی از خانواده‌های نمایی و یا وایبل پیروی می‌کنند. برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، بوت استرپ و گشتاوری پارامترهای مجهول مدل‌های ذکرشده در حالت کلی محاسبه‌شده‌اند. همچنین با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، بوت استرپ و گشتاوری برای این نوع از مدل‌های سری زمانی موردبررسی قرارگرفته است. بر اساس این مطالعه شبیه‌سازی، روش درستنمایی ماکزیمم دارای میانگین مربعات خطای بزرگ‌تری نسبت به سه روش دیگر در مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای نامنفی است. برای تائید نتایج نظری به‌دست‌آمده، داده‌های واقعی شاخص بازار سهام آمریکا، S&P۵۰۰، موردبررسی قرارگرفته است. با توجه به نامنفی بودن مجموعه داده‌ها، مدل‌های رقیب نامنفی پیشنهاد و با استفاده از روش‌های برآوردیابی معرفی‌شده پارامترهای مجهول مدل‌ها برآورد و با در نظر گرفتن معیار اطلاع آکائیک، مدل بهینه انتخاب‌شده است.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر در ستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، برآوردگر گ‌شتاوری، بوت ا سترپ بلوک متحرک، مدل خود بازگشتی.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۰، ۶۲M۱۰.

۱ - آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: asayyareh@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض نرمال بودن مشاهدات و برابری واریانس‌ها دو شرط متداول در بسیاری از مطالعات آماری هستند اما در عمل بسیاری از داده‌ها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کنند. در مدل‌های سری زمانی، معمولاً فرض می شود که خطاها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. این شرط باعث ایجاد محدودیت‌هایی در تحلیل داده‌ها می شود. در سال‌های اخیر، مدل‌های سری زمانی با ساختار خود بازگشتی و خطاهای نامنفی پیشنهادشده است. یکی از مدل‌هایی که مورد توجه محققین قرارگرفته است مدل‌های سری زمانی خود بازگشتی نمایی است که توسط گاور و لوئیس [۱] پیشنهادشده است. از طرفی مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطاهای گاما در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مورداستفاده قرار می‌گیرد. مدل خود بازگشتی، $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$ را در نظر بگیرید که در آن خطاها، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین و واریانس متناهی هستند. با فرض نرمال بودن خطاها، پارامترهای مجهول مدل توسط دو روش درستنمایی ماکزیمم و کمترین مربعات برآورد می‌شوند. واضح است که برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم در برآورد پارامترهای مجهول نسبت به برآوردگرهای حداقل مربعات دارای ویژگی‌های بهتری است. البته در مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای نرمال این دو برآوردگرها یکسان هستند و در حالت ایستایی دارای توزیع مجانبی نرمال هستند. چنانچه داده‌ها نرمال نباشند، روش حداقل مربعات برای برآورد پارامترها روشی مناسب نیست. از طرفی در بعضی از موارد، معادلات درستنمایی برای محاسبه برآوردگرهای درستنمایی دارای جواب صریحی نیستند. یکی از روش‌های برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی، خطی کردن معادلات درستنمایی است که معمولاً منجر به جواب صریحی برای معادلات نمی شوند. روش درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته توسط تیکو [۲] برای برآورد پارامترهای مجهول پیشنهاد شد. این روش بر پایه‌ی خطی کردن معادلات در ستنمایی است که جواب صریح ندارند. تیکو و همکاران [۳] مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای گاما را مطالعه کردند و برآورد درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته را برای برآورد پارامترهای این مدل پیشنهاد دادند. زمانی و سیاره [۴] مدل‌های خود بازگشتی با خطاهایی از خانواده توزیع‌های نمایی یا خانواده توزیع‌های وایبل را موردمطالعه قرار دادند. همچنین نشان دادند که روش‌های انتخاب مدل، ازجمله معیارهای اطلاع، آزمون وونگ، آزمون کاکس و فاصله ردیابی، توانایی انتخاب مدل بهینه را در مدل‌های خود بازگشتی با خطای نامنفی دارد.

افرون [۵] روش بوت استرپ را برای برآورد پارامترهای جامعه معرفی کرد. چون داده‌های تولید شده از مدل‌های خود بازگشتی وابسته هستند، بوت استرپ معرفی‌شده توسط افرون ساختار وابستگی داده‌ها را حفظ نمی‌کند. بنابراین برای برآورد بوت استرپ پارامترها به تعدیل این روش نیاز داریم. کنش [۶] و لیو و سینق [۷]، بوت استرپ بلوک متحرک را برای داده‌های وابسته

معرفی کردند. در این روش فرض می‌شود که b عددی صحیح و کمتر از اندازه نمونه، n، باشد و برای، $i=1,\dots,n-b+1$ ، i-امین بلوک به‌صـــورت $Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_{i+b-1}$ با اندازه b تعریف می‌شـــود. پولیتس و رومانو [۸]، تحت شــرط $b\to\infty$ وقتی‌که $n\to\infty$ اما $\frac{b}{n}\to 0$، خواص مجانبی برآوردگر بوت اســـترپ را موردمطالعه قرار دادند. پاســـکوال و همکاران [۹] مدل ARMA(p,q) را مطالعه و برآوردگرهای بوت اســـترپ را برای مدل‌های موردمطالعه محاســـبه کرده‌اند.

یکی از مشـــکلات برآوردگرهای درســـتنمایی ماکزیمم بهبودیافته، پیچیدگی محاســـبات این برآوردگرها در مدل‌های خود بازگشـــتی مرتبه $p>1$ اســـت. بنابراین برای برآورد پارامترهای مدل‌های خود بازگشـــتی، روش گشـــتاوری نیز در نظر گرفته‌شـــده و مقایســـه بین این دو روش برآورد با مطالعه شبیه‌سازی به عمل‌آورده شده است. در این مقاله با در نظر گرفتن دو خانواده از توزیع‌های نمایی و وایبل، برای جملات خطا، برآوردگرهای در ستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و بوت استرپ پارامترهای مدل خود بازگشتی مرتبه اول محاسبه می‌شوند. همچنین برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای مجهول مدل خود بازگشتی مرتبه $p\geq 1$ با خطاهای نامنفی در شکل کلی بررسی می‌شوند.

در بخش ۲ برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، بوت استرپ و گشتاوری پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی محاسبه شده‌اند. در بخش ۳ برآوردگرهای در ستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشـــتاوری ســـه توزیع گاما، وایبل و لگ-نرمال به‌عنوان توزیعی از خطاها به‌دســـت‌آمده‌اند. در بخش ۴ با اســـتفاده از شـــبیه‌ســـازی عملکرد برآوردگرهای به‌دســـت‌آمده با مقایسه میانگین مربع خطا مربوط به هرکدام از برآوردگرها موردمطالعه قرارگرفته است. آنالیز داده‌های واقعی شاخص بازار سهام آمریکا، S&P۵۰۰، در بخش ۵ ارائه‌شده است.

۲- برآورد پارامترهای مدل

برآورد پارامتر، انتخاب مدل و پیش‌بینی از مهم‌ترین بخش‌های تحلیل داده‌ها هستند. پیش‌بینی صحیح مستلزم انتخاب مدل مناسب و برآورد پارامترهای مدل پیشنهادی است. در این بخش برآوردگرهای درســتنمایی ماکزیمم بهبودیافته، بوت اســترپ و گشــتاوری پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی محاسبه می‌شوند.

۲-۱ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته

روش‌های درســـتنمایی ماکزیمم، کمترین مربعات خطا و گشـــتاوری از معمول‌ترین روش‌های برآورد پارامتر در مدل خود بازگشتی هستند. در مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی بعضی

از معادلات درســـتنمایی دارای جواب صـــریح نیســـتند و روش‌های عددی مورداســـتفاده قرار می‌گیرند. برآوردگرهای به‌د ست‌آمده از روش‌های عددی ممکن ا ست همگرا نبا شند. همگرایی این برآوردگرها به شکل تابع بستگی دارند. به‌عنوان مثال، روش نیوتن-رافسون برای توابع مقعر مورداســتفاده قرار نمی‌گیرد. برای مطالعه بیشــتر به تیکو و همکاران [۳] مراجعه شــود. بنابراین روش درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته برای حل این مشکل معرفی‌شده است. مدل

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1,\ldots,n \tag{1}$$

را در نظر بگیرید که در آن $(Y_1,\ldots,Y_n)$ بردار n-بعدی از متغیرهای وابسته، $\phi=\left(\phi_1,\ldots,\phi_p\right)^T$ ضرایب خود بازگشتی و خطاها، ε_t، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ_ε و واریانس متناهی V_ε هســـتند که از توزیعی از خانواده نمایی یا وایبل پیروی می‌کنند و از $Y_1,\ldots,Y_{t-1}$ ناهمبسته هستند. فرض کنید فرآیند ایستا باشد، لذا $\sum_{j=1}^{p}\phi_j < 1$ است. با در نظر گرفتن مدل (۱) بعضـــی از معادلات درســـتنمایی جواب صـــریحی ندارند بنابراین برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته پارامترهای این مدل محاسبه خواهند شد. در ابتدا فرض کنید که $p = 1$ و $Y_1 = \varepsilon_1$ باشد و خطاها از خانواده نمایی

$$f^{\eta}(\varepsilon_t) = \exp\left\{\eta^T C(\varepsilon_t) - A(\eta)\right\} h(\varepsilon_t), \quad t = 2,\ldots,n \tag{2}$$

پیروی کنند که در آن $\eta=\left(\eta_1,\ldots,\eta_k\right)^T$ پارامتر کانونی، $C(\varepsilon_t)=\left(C_1(\varepsilon_t),\ldots,C_k(\varepsilon_t)\right)^T$ آماره بسنده، $h(\varepsilon_t)$ و $A(\eta)$ به ترتیب توابعی از پارامتر کانونی و خطاها هستند. با توجه به‌شرط استقلال $f^{\eta}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n) = \prod_{t=2}^{n} f^{\eta}(\varepsilon_t)$ و تبدیل خطی $\varepsilon_t = Y_t - \phi_1 Y_{t-1}$ بین مشـــاهدات و خطاها، توابع چگالی توأم و لگاریتم درســـتنمایی $y_2,\ldots,y_t$ به‌شـــرط $Y_1=y_1$ به ترتیب به‌صـــورت $f^{\eta}(y_2,\ldots,y_n \mid y_1) = f^{\eta}(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ و

$$l(\eta,\phi) = \sum_{t=2}^{n}\eta^T C(\varepsilon_t) - nA(\eta) + \sum_{t=2}^{n}\log h(\varepsilon_t) = \sum_{t=2}^{n}\sum_{i=1}^{k}\eta_i C_i(\varepsilon_t) - nA(\eta) + \sum_{t=2}^{n}\log h(\varepsilon_t) \tag{3}$$

هستند. برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی پارامترهای مجهول مدل با حل معادلات

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} l(\eta,\phi) = \sum_{t=2}^{n} C_i(\varepsilon_t) - n\frac{\partial}{\partial \eta_i} A(\eta) = 0, \quad i = 1,\ldots,k$$

و

$$\frac{\partial}{\partial\phi} l(\eta,\phi) = \sum_{t=2}^{n} \eta^T \frac{\partial}{\partial\phi} C(\varepsilon_t) + \sum_{t=2}^{n} \frac{\partial}{\partial\phi} \log h(\varepsilon_t) = \sum_{t=2}^{n} \left(\eta^T \frac{\partial}{\partial\phi} C\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \log h\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon\right) \right) = 0 \quad (۴)$$

قابل‌محاسبه هستند که در آن $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t - \mu_\varepsilon$ و $\mu_\varepsilon = E(\varepsilon_t)$ است. معادله (۴) جواب صریحی ندارد، لذا عبارت جلو نماد جمع‌بندی در معادله (۴) را با $M\left(\varepsilon_t^*\right)$ نمایش داده بنابراین

$$M\left(\varepsilon_t^*\right) = \eta^T \frac{\partial}{\partial\phi} C\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \log h\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon\right).$$

با استفاده از بسط تیلور، تابع $M\left(\varepsilon_t^*\right)$ به‌صورت

$$M\left(\varepsilon_t^*\right) \cong M\left(\overline{\varepsilon}_d\right) + M'\left(\overline{\varepsilon}_d\right)\left(\varepsilon_t^* - \overline{\varepsilon}_d\right) \quad (۵)$$

خطی می‌شود که در آن $\overline{\varepsilon}_d = \overline{\varepsilon}_t - \mu_\varepsilon$ است. با جایگذاری معادله (۵) در (۴) برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته پارامترهای مجهول مدل از روابط

$$\left.\frac{\partial}{\partial\eta_i} A(\eta)\right|_{\eta=\hat{\eta}} = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^{n} C_i(\varepsilon_t) \quad (۶)$$

و

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} M\left(\overline{\varepsilon}_d\right) + M'\left(\overline{\varepsilon}_d\right)\left(\left(y_t - \mu_y\right) - \overline{\varepsilon}_d\right)}{\sum_{t=2}^{n} M'\left(\overline{\varepsilon}_d\right)\left(y_{t-1} - \mu_y\right)} \quad (۷)$$

قابل‌محاسبه هستند که در آن $\mu_y = E\left(Y_t\right)$ است. به‌طور مشابه برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته برای مدل خود بازگشتی با خطاهایی از خانواده وایبل قابل‌محاسبه هستند. مدل خود بازگشتی مرتبه اول را در نظر بگیرید که خطاها، از خانواده وایبل با تابع چگالی $g^{\lambda,\xi}(\varepsilon_t) = \lambda \exp\left\{-\lambda H\left(\varepsilon_t;\xi\right)\right\} h\left(\varepsilon_t;\xi\right)$ پیروی می‌کنند. $H\left(\varepsilon_t;\xi\right)$ تابعی به‌طور یکنواخت افزایشی و نامنفی بوده و $h\left(\varepsilon_t;\xi\right)$ مشتق $H\left(\varepsilon_t;\xi\right)$ است. اگر $N\left(\varepsilon_t^*\right) = -\lambda \frac{\partial}{\partial\phi} H\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon;\xi\right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \log h\left(\varepsilon_t^* + \mu_\varepsilon;\xi\right)$، تابع لگاریتم درستنمایی $y_2, \dots, y_n$ به‌شرط $Y_1 = y_1$ برابر است با

$$l\left(\lambda,\xi,\varphi\right)=n\log\lambda-\lambda\sum_{t=2}^{n}H\left(\varepsilon_t;\xi\right)+\sum_{t=2}^{n}\log h\left(\varepsilon_t;\xi\right).$$

با صفر قرار دادن معادلات مشتقات تابع درستنمایی داریم

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}l\left(\lambda,\xi,\varphi\right)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{t=2}^{n}H\left(\varepsilon_t;\xi\right)=0,$$

و

$$\frac{\partial}{\partial\xi}l\left(\lambda,\xi,\varphi\right)=-\lambda\sum_{t=2}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi}H\left(\varepsilon_t;\xi\right)+\sum_{t=2}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi}\log h\left(\varepsilon_t;\xi\right)=0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}l\left(\lambda,\xi,\varphi\right)=\sum_{t=2}^{n}N\left(\varepsilon_t^*\right)=0.$$

چون معادله (۸) جواب صـــریحی ندارد، لذا فرم خطی $N\left(\varepsilon_t^*\right)=N\left(\bar{\varepsilon}_d\right)+N'\left(\bar{\varepsilon}_d\right)\left(\varepsilon_t^*-\bar{\varepsilon}_d\right)$ را در معادله (۸) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین برآوردگرهای درســـتنمایی ماکزیمم بهبودیافته با حل معادلات به‌صورت

$$\hat{\lambda}=n\left(\sum_{t=2}^{n}H\left(\varepsilon_t;\xi\right)\right)^{-1}, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}l\left(\lambda,\xi,\varphi\right)=-\lambda\sum_{t=2}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi}H\left(\varepsilon_t;\xi\right)+\sum_{t=2}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi}\log h\left(\varepsilon_t;\xi\right)=0 \qquad (10)$$

و

$$\hat{\varphi}=\frac{\sum_{t=2}^{n}N\left(\bar{\varepsilon}_d\right)+N'\left(\bar{\varepsilon}_d\right)\left(\left(y_t-\mu_y\right)-\bar{\varepsilon}_d\right)}{\sum_{t=2}^{n}N'\left(\bar{\varepsilon}_d\right)\left(y_{t-1}-\mu_y\right)} \qquad (11)$$

قابل‌محاسبه هستند.

۲-۲ برآوردگر بوت استرپ

در این بخش برآوردگرهای درســـتنمایی ماکزیمم بهبودیافته پارامترهای مدل خود بازگشـــتی مرتبه اول

تحت روش بوت استرپ محاسبه می‌شوند. برای این منظور بردار مشاهدات $y_1,\ldots,y_n$ تولید شده توسط مدل (۱) را در نظر بگیرید که به‌صورت

$$\left(y_{۱},...,y_b\right),\left(y_{۲},...,y_{b+۱}\right),...,\left(y_{n-b+۱},...,y_n\right) \qquad (۱۲)$$

در $n-b+۱$ بلوک به طول $b\in N$ د سته بندی شده‌اند، برای مطالعه بی شتر به لیو و سینق [۷] مراجعه شود. برای سادگی فرض کنید $n=kb$ که $k\in N$ و $k=\left[\frac{n}{b}\right]+۱$ است. به‌طور تصادفی k بلوک با نقاط شروع $s_۱,...,s_k$ از $n-b+۱$ بلوک‌های ایجادشده انتخاب می‌شود. لذا نمونه انتخاب‌شده با $y_{s_۱},...,y_{s_۱+b},y_{s_۲},...,y_{s_۲+b},...,y_{s_k},...,y_{s_k+b}$ نمایش داده می‌شود. در هر بلوک انتخاب‌شده با استفاده از روش درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، پارامترهای مجهول مدل برآورد می‌شوند. تحت شرط $\frac{b}{n}\to ۰$ وقتی‌که $n\to\infty$ و $b\to\infty$، اگر $\hat{\gamma}_n$ برآوردگری سازگار برای γ با شد آنگاه $\hat{\gamma}_j^B$ برآوردگری سازگار ا ست. برای مطالعه بی‌شتر به پولیتس [۱۰] مراجعه شود.

۲-۳ برآوردگر گشتاوری

برآوردگرهای به‌دست‌آمده از روش گشتاوری ممکن است بهترین برآوردگرها نباشند اما معمولاً برآوردگرهایی سازگار و مجانی نااریب هستند. برآوردگر گشتاوری پارامترهای مجهول با برابر قرار دادن گشتاورهای جامعه و نمونه‌ای و حل دستگاه حاصل محاسبه می‌شوند. در ادامه برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای مجهول مدل (۱) محاسبه خواهند شد. ارتباط بین میانگین مشاهدات و میانگین خطاها عبارت است از $\mu_x=\mu_x\sum_{j=۱}^{p}\phi_j+\mu_\varepsilon$ یا به‌طور معادل

$$\mu_x\left(۱-e^T\phi\right)=\mu_\varepsilon, \qquad (۱۳)$$

که در آن $e=\left(۱,...,۱\right)^T$ و $\phi=\left(\phi_۱,...,\phi_p\right)^T$ بردارهای $\left(p\times۱\right)$ هستند. گشتاورهای مدل (۱) به‌صورت $E\left(Y_tY_{t-k}\right)=\sum_{j=۱}^{p}\phi_jE\left(Y_{t-j}Y_{t-k}\right)+E\left(\varepsilon_tY_{t-k}\right)$ قابل‌محاسبه هستند. با محاسبه گشتاورها برای kهای مختلف، $k=۱,...,p$، دستگاه معادلات $\sigma=\Sigma\phi+\mu_\varepsilon\mu_ye$ به دست می‌آید که در آن $\mu_y=E\left(Y_t\right)$، $\sigma(k)=E\left(X_tX_{t-k}\right)$ و

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma(۰) & \sigma(۱) & \cdots & \sigma(p-۱)\\ \sigma(۱) & \sigma(۰) & \cdots & \sigma(p-۲)\\ \vdots & & & \\ \sigma(p-۱) & \sigma(p-۲) & \cdots & \sigma(۰)\end{bmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}\sigma(۱)\\ \sigma(۲)\\ \vdots\\ \sigma(p)\end{pmatrix}$$

است. با محاسبات جبری ساده‌ای $\hat{\phi}$ از رابطه

$$\hat{\phi} = \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\sigma} - \hat{\mu}_{\varepsilon}\hat{\mu}_{y}\hat{\Sigma}^{-1}e. \qquad (۱۴)$$

محا سبه می شود. در حقیقت جمله اول معادله (۱۴)، برآوردگر معمول یول [۱۲] و والکر [۱۳] برای مدل خود بازگ شتی و جمله دوم این معادله مرتبط با میانگین خطاها ا ست، بنابراین برای برآورد ضرایب خودهمبستگی نیاز به برآورد میانگین خطاها داریم. برای این منظور، با جایگذاری (۱۴) در (۱۳) داریم $\mu_{\varepsilon} = \mu_{y}\left(1 - e^{T}\Sigma^{-1}\sigma\right) + \mu_{\varepsilon}\mu_{y}^{2}e^{T}\Sigma^{-1}e$ یا به‌طور معادل

$$\hat{\mu}_{\varepsilon} = \frac{\hat{\mu}_{y}\left(1 - e^{T}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\sigma}\right)}{1 - \hat{\mu}_{y}^{2}e^{T}\hat{\Sigma}^{-1}e}. \qquad (۱۵)$$

در ادامه برآوردگر گشتاوری واریانس خطاها محاسبه خواهد شد. برای این منظور توجه کنید که ارتباط بین واریانس مشاهدات و خطاها عبارت است از

$$\operatorname{var}(Y_t) = \sum_{j=1}^{p}\phi_j^2 \operatorname{var}(Y_{t-j}) + \sum_{i\neq j}\phi_i\phi_j \operatorname{cov}(Y_{t-i}, Y_{t-j}) + \operatorname{var}(\varepsilon_t) = \phi\Sigma_y\phi^T + \sigma_{\varepsilon}^2,$$

که در آن

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(p-2) \\ \vdots & & & \\ \gamma(p-1) & \gamma(p-2) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

و $\gamma(k) = \left(\left(Y_t - \mu_y\right)\left(Y_{t-k} - \mu_y\right)\right)$ و $\sigma_{\varepsilon}^2 = \operatorname{var}(\varepsilon_t)$ است. بنابراین

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \hat{\sigma}_{y}^2 - \hat{\phi}^T\hat{\Sigma}_y\hat{\phi} \qquad (۱۶)$$

برآوردگر گشـــتاوری به‌دســـت‌آمده، برآوردگری ســـازگار برای واریانس خطاها اســـت که با برآوردگرهای واریانس مشاهدات و پارامترهای مدل در ارتباط است.

۳- برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطای نامنفی

در این بخش برآوردگرهای پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی، گاما و لگ-نرمال از خانواده نمایی و وایبل از خانواده وایبل، به روش‌های برآوردیابی بیان‌شـــده در بخش قبل محا سبه می شوند. مدل خود بازگ شتی (۱) را در نظر بگیرید که $p=1$ و خطاها مستقل و هم توزیع و دارای توزیع م شترک $f(\varepsilon_t, \theta)$ ه ستند. فرض کنید ϕ ضریب خودهمب ستگی، θ

بردار $(q\times ۱)$ پارامترهای توزیع و $\hat{\mu}_{\varepsilon}$ بردار $(q\times ۱)$ بعدی از گشتاورهای نمونه‌ای با شد. ابتدا مدل خود بازگشـــتی مرتبه اول را در نظر بگیرید که خطاها دارای توزیع گاما، $G(\alpha,\beta)$،

$$f_1(\varepsilon_t,\theta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\varepsilon_t^{\alpha-۱}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_t}{\beta}\right\}=\exp\left\{-\eta_{۱۱}\left(y_t-\phi y_{t-۱}\right)+\eta_{۱۲}\log\left(y_t-\phi y_{t-۱}\right)-A\left(\eta_۱\right)\right\}$$

هستند که $\eta_{۱۱}=-\frac{۱}{\beta}$، $\eta_{۱۲}=\alpha-۱$، $h(\varepsilon_t)=۱$ و

$$A\left(\eta_۱\right)=\alpha\log\beta+\log\Gamma(\alpha)=\left(\eta_{۱۲}+۱\right)\log\left(-\frac{۱}{\eta_{۱۱}}\right)+\log\Gamma\left(\eta_{۱۲}+۱\right).$$

برآوردگرهای در ستنمایی ماکزیمم بهبودیافته پارامترهای، α، β و ϕ با ا ستفاده از معادلات (۶) و (۷) و محاســبات جبری به‌صــورت $\Gamma_d=\frac{1}{n}\sum_{t=۲}^{n}\log\left(\varepsilon_t\right)$، که در آن Γ_d تابع دی-گاما است به‌عبارت‌دیگر $\Gamma_d=\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\Gamma\left(\hat{\alpha}_n\right)$، $\hat{\beta}_n=\frac{1}{n\hat{\alpha}_n}\sum_{t=۲}^{n}\left(y_t-\hat{\phi}_{n,۱}y_{t-۱}\right)$ و

$$\hat{\phi}_{n,۱}=\frac{\left(-\bar{\varepsilon}_d+\frac{\bar{\varepsilon}_d^{۲}}{\hat{\beta}_n\left(\hat{\alpha}_n-۱\right)}\right)\sum_{t=۲}^{n}\left(y_{t-۱}-\mu_y\right)}{\sum_{t=۲}^{n}\left(y_{t-۱}-\mu_y\right)^{۲}}+\frac{\sum_{t=۲}^{n}\left(y_{t-۱}-\mu_y\right)\left(y_t-\mu_y-\bar{\varepsilon}_d\right)}{\sum_{t=۲}^{n}\left(y_{t-1}-\mu_y\right)^{۲}}\qquad(۱۷)$$

محاسبه می‌شوند. برای محاسبه برآوردگرهای گشتاوری مدل خود بازگشتی با خطاهای گاما، با برابر قرار دادن میانگین، $\alpha\beta$، و واریانس، $\alpha\beta^{۲}$، با میانگین، $\hat{\mu}_{\varepsilon}$، و واریانس، $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{۲}$، نمونه‌ای خطاها داریم

$\hat{\alpha}=\frac{\hat{\mu}_{\varepsilon}^{۲}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{۲}}$ و $\hat{\beta}=\frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}^{۲}}{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{۲}}{\hat{\mu}_{\varepsilon}}$. برای محاسبه $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نیاز به برآورد میانگین و واریانس خطاها داریم. برای این منظور با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶) روابط $\hat{\mu}_{\varepsilon}=\frac{\hat{\mu}_x\left(۱-e^T\hat{\Sigma}^{-۱}\hat{\sigma}\right)}{۱-\hat{\mu}_x^{۲}e^T\hat{\Sigma}^{-۱}e}=\frac{\hat{\mu}_x\left(۱-C_m\right)}{۱-\hat{\mu}_x^{۲}D_m}$ و $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{۲}=\hat{\sigma}_x^{۲}-\hat{\phi}^T\hat{\Sigma}\hat{\phi}$ به دست می‌آیند که در آن $C_m=e^T\hat{\Sigma}^{-۱}\hat{\sigma}$ و $D_m=e^T\hat{\Sigma}^{-۱}e$ است. بنابراین

$$\hat{\beta}=\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\mu}_{\varepsilon}}=\frac{\hat{\sigma}_{x}^{2}-D_{m}}{\hat{\mu}_{\varepsilon}}+2\hat{\mu}_{x}C_{m}-\hat{\mu}_{\varepsilon}\hat{\mu}_{x}^{2}S_{m}$$
$$=\frac{\hat{\sigma}_{x}^{2}-D_{m}}{\hat{\mu}_{\varepsilon}}\left(\frac{1-\hat{\mu}_{x}^{2}D_{m}}{\hat{\mu}_{x}\left(1-C_{m}\right)}\right)+\hat{\mu}_{x}\left(1+C_{m}\right)-\frac{\hat{\mu}_{x}\left(1-C_{m}\right)}{1-\hat{\mu}_{x}^{2}D_{m}},$$

و

$$\hat{\alpha}=\frac{\hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}=\frac{\hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\sigma}_{x}^{2}-D_{m}+\hat{\mu}_{\varepsilon}\hat{\mu}_{x}\left(1+C_{m}\right)-\hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}}$$
$$=\frac{\hat{\mu}_{x}^{2}\left(1-C_{m}\right)^{2}}{\left(\hat{\sigma}_{x}^{2}-D_{m}\right)\left(1-\hat{\mu}_{x}^{2}S_{m}\right)^{2}+\hat{\mu}_{x}^{2}\left(1-C_{m}^{2}\right)\left(1-\hat{\mu}_{x}^{2}S_{m}\right)-\hat{\mu}_{x}^{2}\left(1-C_{m}\right)^{2}} \tag{۱۸}$$

که در آن $D_m=\hat{\sigma}^T\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\sigma}$ است. برآورد گشتاوری ضریب خود بازگشتی تمام مدل‌های ذکر شده عبارت است از $\hat{\phi}=\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\sigma}-\hat{\mu}_{\varepsilon}\hat{\mu}_{y}\hat{\Sigma}^{-1}e$. در ادامه برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشتاوری پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطاهای لگ - نرمال محاسبه خواهند شد. برای این منظور فرض کنید که خطاها از توزیع لگ-نرمال، $LN\left(\mu,\sigma\right)$، با تابع چگالی

$$f_{2}(\varepsilon_{t},\theta)=\frac{1}{(y_{t}-\phi_{2}y_{t-1})\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\eta_{21}\left(\log(y_{t}-\phi_{2}y_{t-1})\right)^{2}+\eta_{22}\log(y_{t}-\phi_{2}y_{t-1})-A(\eta_{2})\right\}$$

پیروی کنند که در آن $\eta_{21}=-\frac{1}{2\sigma^{2}}$، $\eta_{22}=-\frac{\mu}{\sigma^{2}}$، $h(\varepsilon_{t})=\frac{1}{(y_{t}-\phi_{2}y_{t-1})\sqrt{2\pi}}$ و

$$A(\eta_{2})=\frac{\mu^{2}}{2\sigma^{2}}+\frac{1}{2}\log\sigma^{2}=-\frac{\eta_{22}^{2}}{4\eta_{21}}+\frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2\eta_{21}}\right).$$

با استفاده از معادلات (۵) و (۶) برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم پارامترهای ϕ و $\theta=\left(\mu,\sigma\right)$ به‌صورت $\hat{\mu}_{n}=\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\log\left(y_{t}-\hat{\phi}_{n,2}y_{t-1}\right)$، $\hat{\sigma}_{n}^{2}=\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\left(\log\left(y_{t}-\hat{\phi}_{n,2}y_{t-1}\right)-\hat{\mu}_{n}\right)^{2}$ و

$$\hat{\phi}_{n,2}=\frac{\bar{\varepsilon}_{d}\left(2\sigma_{n}^{2}-2\hat{\mu}_{n}+2\log(\bar{\varepsilon}_{d})\right)\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1}-\mu_{y}\right)}{\left(\hat{\mu}_{n}-\sigma_{n}^{2}-\log(\bar{\varepsilon}_{d})+1\right)\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1}-\mu_{y}\right)^{2}}+\frac{\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1}-\mu_{y}\right)\left(y_{t}-\mu_{y}-\bar{\varepsilon}_{d}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1}-\mu_{y}\right)^{2}} \tag{۱۹}$$

محاسبه می‌شوند همچنین با معادل قرار دادن گشتاورهای جامعه و نمونه‌ای خطاها

$$\hat{\mu} = 2\log\left(\hat{\mu}_{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + \hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}\right)$$

و

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \log\left(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} + \hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}\right) - 2\log\hat{\mu}_{\varepsilon} = \log\left(\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}{\hat{\mu}_{\varepsilon}^{2}} + 1\right) \\ &= \log\left(\left(\hat{\sigma}_{x}^{2} - \hat{\phi}^{T}\hat{\Sigma}\hat{\phi}\right)\left(1 - \hat{\mu}_{x}^{2}S_{m}\right)^{2} + \hat{\mu}_{x}^{2}\left(1 - C_{m}\right)^{2}\right) - 2\log\left(\hat{\mu}_{x}\left(1 - C_{m}\right)\right) \end{aligned} \tag{20}$$

است. در پایان توزیع وایبل برای خطاها در نظر گرفته می‌شود و برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشتاوری پارامترها محاسبه می‌شوند. برای این منظور مدل خود بازگشتی را در نظر بگیرید که خطاها مستقل و هم توزیع هستند و از توزیع وایبل، $W(\upsilon,\tau)$،

$$f_{3}\left(\varepsilon_{t},\theta\right) = \frac{\upsilon}{\tau^{\upsilon}}\left(y_{t} - \phi_{3}y_{t-1}\right)^{\upsilon-1}\exp\left\{-\left(\frac{y_{t} - \phi_{3}y_{t-1}}{\tau}\right)^{\upsilon}\right\}$$

پیروی می‌کنند که در آن $\lambda_{31} = \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\upsilon}$ و $H\left(\varepsilon_{t};\xi\right) = \varepsilon_{t}^{\xi}$ است. با استفاده از معادلات (۱۱)-(۹) و محاسبات جبری، برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته پارامترهای مجهول این مدل به‌صورت $\frac{n}{\upsilon} + \sum_{t=2}^{n}\log z_{t} - \frac{1}{\beta}\sum_{t=2}^{n} z_{t}^{\upsilon}\log z_{t}$ ،

$$\hat{\tau}_{n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t} - \hat{\phi}_{n,3}y_{t-1}\right)^{\hat{\upsilon}_{n}}\right)^{\frac{1}{\hat{\upsilon}_{n}}}$$ و

$$\hat{\phi}_{n,3} = \frac{\bar{\varepsilon}_{d}\left(2\hat{\upsilon}_{n} - 1 - \frac{\hat{\upsilon}_{n}}{\hat{\tau}_{n}^{\hat{\upsilon}_{n}}}\left(2 - \hat{\upsilon}_{n}\right)\bar{\varepsilon}_{d}^{\hat{\upsilon}_{n}}\right)\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \mu_{y}\right)}{\left(\left(\hat{\upsilon}_{n} - 1\right) - \frac{\hat{\upsilon}_{n}}{\hat{\tau}_{n}^{\hat{\upsilon}_{n}}}\left(\hat{\upsilon}_{n} - 1\right)\bar{\varepsilon}_{d}^{\hat{\upsilon}_{n}}\right)\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \mu_{y}\right)^{2}} + \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \mu_{y}\right)\left(y_{t} - \mu_{y} - \bar{\varepsilon}_{d}\right)}{\sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \mu_{y}\right)^{2}} \tag{21}$$

قابل‌محاسبه هستند. برای محاسبه برآوردگرهای گشتاوری با برابر قرار دادن گشتاورهای جامعه و نمونه‌ای خطاها $\hat{\tau}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\upsilon}}\right) - \hat{\mu}_{\varepsilon} = 0$ و

$$\hat{\tau}^{2}\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\upsilon}}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{\upsilon}}\right)\right)^{2}\right) - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = 0 \tag{22}$$

است. چون معادلات حاصل غیرخطی هستند بنابراین برآوردگرهای گشتاوری با استفاده از روش‌های عددی محاسبه می‌شوند.

۴- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد برآوردگرهای ارائه‌شده در بخش‌های قبل با استفاده از شبیه‌سازی مطالعه می‌شود. این شبیه‌سازی شامل دو مرحله است. در مرحله اول، مدل خود بازگشتی مرتبه اول با ضریب خودهمبستگی $\phi=$ ۰/۶ و خطاهای گاما، G(۲و۲) به‌عنوان مدل درست در نظر گرفته شده و نمونه‌ای به اندازه‌های، $n=$۵۰،۱۵۰،۲۵۰،۵۰۰،۱۰۰۰ از مدل در ست تولید شده است. هدف برآورد پارامترهای مجهول مدل با استفاده از روش‌های درستنمایی ماکزیمم، MLE، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، MMLE، بوت استرپ، BE، و گشتاوری، MME، است. در روش بوت استرپ دفعات تکرار بوت استرپ، $b=4\left[n^{\frac{1}{2}}\right]$، است. تعداد تکرارها 10^4 و بر این اساس، میانگین مقادیر برآوردشده پارامترها در تکرارها به‌عنوان مقدار برآورد پارامترها در نظر گرفته شده است. مقادیر برآورد پارامترهای مدل تحت برآوردگرهای پیشنهادشده، میانگین مربع خطا و کارایی آن‌ها در جدول (۱) ارائه شده است که در آن مقدار میانگین مربعات خطا و کارایی مربوط به هر برآوردگر به ترتیب از چپ به راست در پرانتز آمده است. مقادیر کارایی‌های به‌دست‌آمده نسبت به روش بوت استرپ محاسبه شده است. شبیه سازی‌های مشابهی برای مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای وایبل، W(۲و۳) و لگ- نرمال، LN(۰/۸و۳) در نظر گرفته‌شده و مقادیر برآورد پارامترها و میانگین مربعات خطا و کارایی مربوط به آن‌ها با چهار روش برآوردیابی ذکرشده محاسبه و به ترتیب در جدول‌های (۲) و (۳) ارائه‌شده است. همچنین نمودار جعبه‌ای مقادیر برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای گاما، وایبل و لگ- نرمال به ترتیب در شکل‌های (۳)-(۱) ارائه‌شده است.

نتایج ارائه‌شده در جداول (۳)-(۱) نشان می‌دهند که با افزایش اندازه نمونه، مقدار میانگین مربعات خطا مربوط به برآوردگرهای ذکرشده کاهش می‌یابد. برای مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای نامنفی معمولاً برآوردگرهای به‌دست‌آمده از روش بوت استرپ دارای کمترین مقدار میانگین مربعات خطا هستند. اگرچه برای اندازه نمونه‌های کوچک برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته نسبت به برآوردگرهای گشتاوری بهتر و دارای میانگین مربعات خطای کمتری هستند.

جدول (۱): مقادیر برآورد و میانگین مربعات خطا پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطای گاما

phi	Second Param	First Param	method	n
۰/۸۴۹۹	۱/۹۲۵۸	۱/۴۵۶۸	MLE	۵۰
(۰/۰۸۲۵ ، ۰/۰۰۴۸)	(۰/۳۸۳۱ ، ۰/۱۴۰۰)	(۰/۵۰۷۱ ، ۰/۲۰۲۰)		
۰/۵۴۸۸	**۲/۱۰۲۴**	۲/۱۵۰۶	MMLE	
(۰/۰۱۶۳ ، ۰/۰۲۴۵)	(۰/۱۸۸۷ ، ۲/۳۴۰۰)	(۰/۱۶۸۵ ، ۰/۰۶۰۸)		
۰/۵۹۴۸	۲/۲۴۱۴	**۱/۹۸۱۱**	BE	
(۰/۰۰۰۴ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۴۳۸۶ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۱۰۲۵ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۴۵۵	۲/۳۹۰۱	۲/۳۹۶۴	MME	
(۰/۰۹۸۰ ، ۰/۰۲۴۵)	(۰/۵۹۷۳ ، ۰/۷۳۴۰)	(۰/۴۳۱۱ ، ۰/۲۳۸۰)		
۰/۸۰۹۵	۱/۹۶۹۰	۱/۵۰۳۵	MLE	۱۵۰
(۰/۰۶۹۰ ، ۰/۰۰۵۸)	(۰/۲۱۲۷ ، ۰/۶۸۶۰)	(۰/۴۳۱۱ ، ۰/۰۷۷۹)		
۰/۵۸۲۵	**۲/۰۴۶۴**	۲/۰۳۴۹	MMLE	
(۰/۰۰۴۷ ، ۰/۰۸۵۱)	(۰/۰۸۰۵ ، ۱/۸۱۰۰)	(۰/۰۵۴۶ ، ۰/۵۵۳۰)		
۰/۵۹۳۶	۲/۱۲۲۴	**۲/۰۱۸۴**	BE	
(۰/۰۰۰۴ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۱۴۵۹ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۳۰۲ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۲۳۸	۱/۸۵۶۳	۲/۱۷۳۴	MME	
(۰/۰۱۱۹ ، ۰/۰۳۳۶)	(۰/۲۰۶۹ ، ۰/۷۰۵۰)	(۰/۲۱۹۵ ، ۰/۱۳۸۰)		
۰/۸۰۴۷	۱/۹۷۴۹	۱/۴۹۴۰	MLE	۲۵۰
(۰/۰۶۶۵ ، ۰/۰۰۴۵)	(۰/۱۶۰۴ ، ۰/۰۷۰۰)	(۰/۳۸۴۸ ، ۰/۰۱۷۹)		
۰/۵۸۹۵	**۲/۰۳۳۶**	۲/۰۱۱۳	MMLE	
(۰/۰۰۲۷ ، ۰/۱۱۱۰)	(۰/۰۵۷۶ ، ۲/۹۸۰۰)	(۰/۰۲۹۵ ، ۰/۲۳۴۰)		
۰/۵۹۴۲	۲/۲۰۷۸	**۱/۹۹۴۶**	BE	
(۰/۰۰۰۳ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۱۷۱۹ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۰۶۹ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۵۳۷	۱/۹۱۲۳	۲/۱۳۷۱	MME	
(۰/۰۰۵۴ ، ۰/۰۵۵۶)	(۰/۱۲۱۰ ، ۱/۴۲۰۰)	(۰/۱۶۳۶ ، ۰/۰۴۲۲)		
۰/۷۸۴۸	۱/۹۶۴۵	۱/۵۳۶۰	MLE	۵۰۰
(۰/۰۵۹۵ ، ۰/۰۰۳۴)	(۰/۰۴۶۵ ، ۰/۲۴۵۰)	(۰/۳۴۸۲ ، ۰/۰۱۵۵)		
۰/۵۹۳۸	۲/۰۲۵۰	۲/۰۰۱۴	MMLE	
(۰/۰۰۱۳ ، ۰/۱۵۰۴)	(۰/۰۳۳۰ ، ۰/۳۴۵۰)	(۰/۰۱۳۳ ، ۰/۴۰۶۰)		
۰/۵۹۵۵	**۲/۰۱۱۵**	**۱/۹۹۱۹**	BE	
(۰/۰۰۰۲ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۱۱۴ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰./۰۰۵۴ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۷۶۸	۱/۹۵۷۹	۲/۱۰۵۲	MME	
(۰/۰۰۱۹ ، ۰/۱۰۵۰)	(۰/۰۵۳۸ ، ۰/۲۱۲۰)	(۰/۲۲۰۲ ، ۰/۰۲۴۵)		
۰/۷۷۲۶	۱/۹۷۸۸	۱/۵۵۵۲	MLE	۱۰۰۰
(۰/۰۵۵۰ ، ۰/۰۰۳۶)	(۰/۰۵۷۱ ، ۰/۱۹۳۰)	(۰/۳۴۷۶ ، ۰/۰۱۵۵)		
۰/۵۹۶۵	۲/۰۱۳۷	۲/۰۰۰۰	MMLE	
(۰/۰۰۰۶ ، ۰/۳۳۳۰)	(۰/۰۱۶۳ ، ۰/۶۷۵۰)	(۰/۰۰۷۰ ، ۰/۷۷۱۰)		
۰/۵۹۶۸	**۲/۰۰۶۹**	**۱/۹۹۹۹**	BE	
(۰/۰۰۰۲ ، ۰/۰۰۰۰)	(۰/۰۱۱۰ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۹۰۹ ، ۰/۰۵۹۴)		
۰/۵۸۷۸	۱/۹۶۹۴	۲/۰۱۳۰	MME	
(۰/۰۰۰۸ ، ۰/۲۵۰۰)	(۰/۰۲۹۱ ۰/۳۷۸۰)	(۰/۰۹۰۹ ، ۰/۰۵۹۴)		

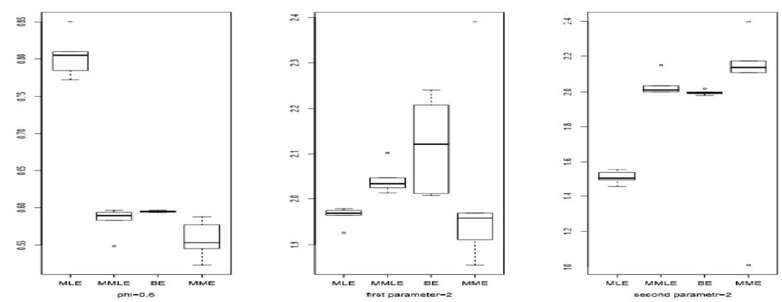
جدول (۲): مقادیر برآورد و میانگین مربعات خطا پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطای وایبل

phi	Second Param	First Param	method	n
۰/۶۹۴۰	۲/۴۴۸۶	۱/۷۱۸۱	MLE	۵۰
(۰/۰۰۷۷ ، ۰/۰۲۶۰)	(۰/۰۷۵۸ ، ۰/۶۸۲۲)	(۰/۴۵۱۰ ، ۰/۲۳۴۰)		
۰/۵۳۷۰	۳/۴۲۴۶	۲/۴۴۳۴	MMLE	
(۰/۰۱۰۳ ، ۰/۰۱۹۵)	(۰/۰۴۵۱ ، ۱/۱۴۷۶)	(۰/۱۲۱۰ ، ۰/۸۷۱۲)		
۰/۵۹۷۱	**۲/۹۶۴۷**	**۲/۰۷۵۹**	BE	
(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۰۲)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۵۱۷)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۱۰۵۵)		
۰/۵۸۴۴	۳/۵۷۰۲	۲/۴۲۵۳	MME	
(۰/۰۹۰۹ ، ۰/۰۰۲۲)	(۰/۰۳۰۲ ، ۱/۷۱۱۱)	(۰/۱۰۶۰ ، ۰/۹۹۵۸)		
۰/۶۲۹۳	۲/۸۰۸۱	۱/۸۹۱۵	MLE	۱۵۰
(۰/۰۳۱۲ ، ۰/۰۰۶۴)	(۰/۱۲۱۰ ، ۰/۱۸۸۷)	(۰/۸۳۲۰ ، ۰/۰۶۸۳)		
۰/۵۸۳۰	۳/۱۰۹۱	۲/۱۱۶۰	MMLE	
(۰/۰۴۲۶ ، ۰/۰۰۴۷)	(۰/۰۸۱۹ ، ۰/۲۷۹۶)	(۰/۳۰۴۰ ، ۰/۱۸۶۶)		
۰/۵۹۶۲	**۲/۹۴۹۷**	**۲/۰۹۷۷**	BE	
(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۰۲)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۲۲۹)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۵۶۸)		
۰/۵۷۶۰	۳/۱۱۳۶	۲/۲۱۱۹	MME	
(۰/۰۳۳۶ ، ۰/۰۰۴۸)	(۰/۰۹۳۹ ، ۱/۲۴۳۹)	(۰/۲۲۴۰ ، ۰/۲۵۳۰)		
۰/۶۱۴۱	۲/۸۹۱۷	**۱/۹۴۲۳**	MLE	۲۵۰
(۰/۰۷۱۴ ، ۰/۰۰۲۸)	(۰/۰۱۵۶ ، ۰/۰۹۳۷)	(۱/۰۴۰۰ ، ۰/۰۳۴۸)		
۰/۵۸۷۶	۳/۰۷۶۹	۲/۰۷۸۷	MMLE	
(۰/۰۶۹۰ ، ۰/۰۰۲۹)	(۰/۰۸۰۰ ، ۰/۱۸۲۴)	(۰/۰۳۰۳ ، ۰/۱۱۹۰)		
۰/۵۹۶۶	**۲/۹۶۸۲**	۲/۰۱۶۳	BE	
(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۰۲)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۱۴۶)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۳۶۱)		
۰/۵۷۵۷	۳/۱۴۷۱	۲/۱۹۲۲	MME	
(۰/۰۲۱۱ ، ۰/۰۰۹۵)	(۰/۰۶۲۷ ، ۰/۲۳۳۰)	(۰/۱۵۳۰ ، ۰/۲۳۶۶)		
۰/۶۱۴۱	۲/۹۱۱۸	۱/۹۵۳۸	MLE	۵۰۰
(۰/۰۲۹۴ ، ۰/۰۰۳۴)	(۰/۰۸۵۷ ، ۰/۰۸۸۷)	(۰/۹۲۳۰ ، ۰/۰۲۴۷)		
۰/۵۹۳۸	۳/۰۳۷۸	۲/۰۳۸۲	MMLE	
(۰/۰۷۶۹ ، ۰/۰۰۱۳)	(۰/۰۸۹۴ ، ۰/۰۸۵۰)	(۰/۴۰۷۰ ، ۰/۰۵۶۰)		
۰/۵۹۸۰	**۲/۹۷۱۰**	**۱/۹۹۳۲**	BE	
(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۰۱)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۷۶)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰./۰۲۲۸)		
۰/۵۶۳۳	۳/۰۷۱۶	۲/۱۵۲۸	MME	
(۰/۰۳۴۵ ، ۰/۰۰۲۹)	(۰/۰۴۵۳ ، ۰/۱۶۷۸)	(۰/۲۹۵۰ ، ۰/۰۷۷۲)		
۰/۶۰۷۸	۲/۹۴۷۰	۱/۹۶۸۸	MLE	۱۰۰۰
(۰/۰۲۱۱ ، ۰/۰۰۱۹)	(۰/۰۹۳۶ ، ۰/۰۵۰۲)	(۰/۸۸۷۰ ، ۰/۰۱۵۰)		
۰/۵۹۷۰	۳/۰۱۸۸	۲/۰۱۶۵	MMLE	
(۰/۰۶۶۷ ، ۰/۰۰۰۶)	(۰/۱۰۸۰ ، ۰/۰۴۳۳)	(۰/۴۶۲۰ ، ۰/۰۲۸۸)		
۰/۵۹۸۱	**۲/۹۷۹۲**	**۱/۹۹۴۱**	BE	
(۰/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۰۴)	(۱/۰۰۰۰ ، ۰/۰۰۴۷)	(۰/۰۵۹۴ ، ۰/۰۱۳۳)		
۰/۵۸۱۵	۳/۰۳۹۰	۲/۰۷۵۸	MME	
(۰/۰۴۰۰ ، ۰/۰۰۱۰)	(۰/۰۷۵۳ ۰/۰۶۲۴)	(۰/۴۴۳۰ ، ۰/۰۳۰۰)		

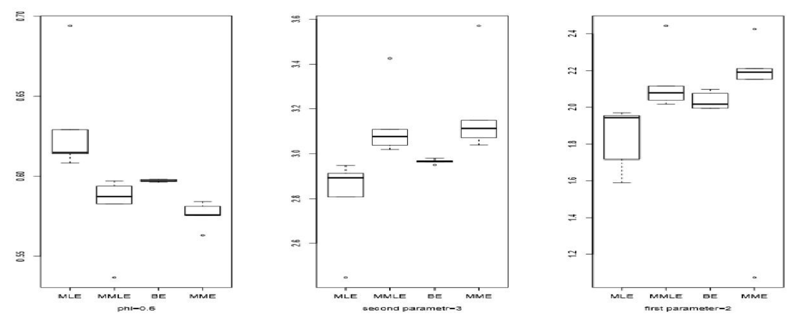
جدول (۳): مقادیر برآورد و میانگین مربعات خطا پارامترهای مدل خود بازگشتی با خطای لگ - نرمال

phi	Second Param	First Param	method	n
۰/۸۳۸۷	۱/۲۸۵۱	۲/۱۸۲۰	MLE	۵۰
(۰/۰۶۱۲ ، ۰/۰۱۱۴)	(۰/۳۰۶۰ ، ۰/۰۶۷۰)	(۰/۷۱۷۹ ، ۰/۰۳۲۰)		
۰/۵۴۲۷	۰/۷۵۷۲	۳/۰۷۲۲	MMLE	
(۰/۰۱۵۰ ، ۰/۰۴۶۷)	(۰/۰۸۴۰ ، ۰/۲۴۴۰)	(۰/۱۶۰۶ ، ۰/۱۴۳۰)		
۰/۵۹۱۶	**۰/۷۶۸۴**	**۲/۹۵۲۱**	BE	
(۰/۰۰۰۷ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۲۰۵ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۲۳۰ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۴۰۹۱	۰/۶۴۵۸	۳/۴۶۰۸	MME	
(۰/۰۶۲۷ ، ۰/۰۱۱۲)	(۰/۲۰۶۶ ، ۰/۰۹۹۲)	(۰/۳۴۴۶ ، ۰/۰۶۶۷)		
۰/۸۴۶۴	۱/۲۱۱۵	۲/۲۲۳۵	MLE	۱۵۰
(۰/۰۶۳۰ ، ۰/۰۱۱۱)	(۰/۱۸۳۵ ، ۰/۰۹۴۳)	(۰/۶۰۱۰ ، ۰/۰۲۱۳)		
۰/۷۹۸	۰/۸۰۱۰	۳/۰۱۸۵	MMLE	
(۰/۰۰۴۰ ، ۰/۱۷۵۰)	(۰/۰۴۸۰ ، ۰/۳۶۰۰)	(۰/۰۷۳۴ ، ۰/۱۷۴۰)		
۰/۵۸۹۵	**۰/۷۹۷۵**	**۲/۹۵۳۹**	BE	
(۰/۰۰۰۷ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۱۷۳ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۱۲۸ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۳۹۶	۰/۷۳۲۲	۳/۱۷۲۶	MME	
(۰/۰۰۸۶ ، ۰/۰۸۱۴)	(۰/۱۰۲۶ ، ۰/۱۶۹۰)	(۰/۰۸۱۵ ، ۰/۱۵۷۰)		
۰/۸۵۱۱	۱/۲۲۰۵	۲/۲۳۷۱	MLE	۲۵۰
(۰/۰۶۴۹، ۰/۰۰۷۷)	(۰/۱۸۵۳ ، ۰/۰۵۹۴)	(۰/۵۹۳۳ ، ۰/۰۱۴۳)		
۰/۵۸۷۴	۰/۸۱۴۸	۳/۰۰۸۵	MMLE	
(۰/۰۰۲۶ ، ۰/۱۹۲۳)	(۰/۰۳۸۰ ، ۰/۲۸۹۵)	(۰/۰۵۲۶ ، ۰/۱۶۱۶)		
۰/۵۸۹۷	**۰/۷۹۶۸**	**۲/۹۶۴۶**	BE	
(۰/۰۰۰۵ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۱۱۰ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۰۸۵ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۶۴۱	۰/۷۵۹۳	۳/۱۰۶۷	MME	
(۰/۰۰۴۵ ، ۰/۱۱۱۱)	(۰/۰۷۶۴ ، ۰/۱۴۴۰)	(۰/۰۴۸۲ ، ۰/۱۷۶۳)		
۰/۸۵۴۹	۱/۲۲۷۲	۲/۲۳۸۷	MLE	۵۰۰
(۰/۰۶۶۲ ، ۰/۰۰۴۵)	(۰/۱۸۶۰ ، ۰/۰۳۸۲)	(۰/۵۸۳۹ ، ۰/۰۰۸۹)		
۰/۵۹۲۱	۰/۸۰۹۴	۳/۰۰۷۷	MMLE	
(۰/۰۰۱۲ ، ۰/۲۵۰۰)	(۰/۰۲۱۸ ، ۰/۳۲۵۷)	(۰/۰۲۸۱ ، ۰/۱۸۵۱)		
۰/۵۹۳۱	**۰/۸۰۸۴**	**۲/۹۶۷۰**	BE	
(۰/۰۰۰۳ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۰۷۱ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰./۰۰۵۲ ، ۱/۰۰۰۰)		
۰/۵۸۱۶	۰/۷۷۷۰	۳/۰۵۷۲	MME	
(۰/۰۰۱۶ ، ۰/۱۸۷۵)	(۰/۰۵۲۸ ، ۰/۱۳۴۵)	(۰/۰۲۱۳ ، ۰/۲۴۴۱)		
۰/۸۵۶۷	۱/۲۴۱۱	۲/۲۳۶۴	MLE	۱۰۰۰
(۰/۰۶۶۷، ۰/۰۰۳۰)	(۰/۱۹۶۵ ، ۰/۰۱۸۸)	(۰/۵۸۵۱ ، ۰/۰۰۵۱)		
۰/۵۹۶۸	۰/۸۱۴۸	۲/۹۹۷۸	MMLE	
(۰/۰۰۰۶ ، ۰/۳۳۳۳)	(۰/۰۱۳۳ ، ۰/۲۷۸۲)	(۰/۰۱۵۹ ، ۰/۱۸۸۷)		
۰/۵۹۳۵	**۰/۸۰۸۹**	**۲/۹۷۳۷**	BE	
(۰/۰۰۰۲ ، ۰/۰۰۰۰)	(۰/۰۰۳۷ ، ۱/۰۰۰۰)	(۰/۰۰۳۰ ، ۰/۰۵۹۴)		
۰/۵۹۱۵	۰/۷۸۹۱	۳/۰۲۷۱	MME	
(۰/۰۰۰۷ ، ۰/۲۸۵۷)	(۰/۰۴۰۰ ۰/۰۹۲۵)	(۰/۰۱۰۸ ، ۰/۲۷۷۸)		

اما با افزایش اندازه نمونه، مقادیر به‌دست‌آمده برای میانگین مربعات خطا برای دو روش، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشتاوری، یکسان هستند. همچنین مشاهده می‌شود که برای مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای نامنفی، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم در برآورد برخی از پارامترهای مدل، برآوردگر مناسبی نیست. مقادیر کارایی به‌دست‌آمده برای هر برآوردگر نتایج فوق را تائید می‌کنند.

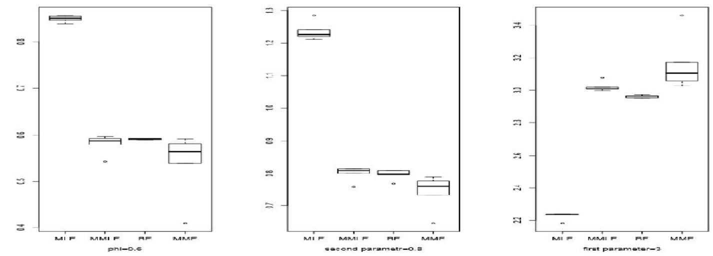


شکل (۱): نمودار جعبه‌ای مقادیر برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای گاما



شکل (۲): نمودار جعبه‌ای مقادیر برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای وایبل

در مرحله دوم شبیه سازی، داده‌ها از مدل خود بازگشتی مرتبه اول با ضریب خودهمبستگی $\phi = ۰/۵$ و خطاهای وایبل، W (۵ و ۳)، تولیدشده‌اند و فرض می‌شود که مدل درست معلوم نباشد. مدل‌های خود بازگشتی مرتبه اول با خطاهای گاما، GAR، وایبل، WAR، و لگ-نرمال، LNAR، به‌عنوان مدل‌های پیشنهادی در نظر گرفته‌شده است.



شکل (۳): نمودار جعبه‌ای مقادیر برآورد پارامترهای مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای لگ-نرمال

جدول (۴): مقادیر میانگین مربعات خطا پارامترهای مدل خود بازگشتی بد – توصیف‌شده

MMLEMSE	MLEMSE	BEMSE	MMEMSE	model	n
۰/۱۰۵۲	۰/۷۳۳۱	۰/۲۱۲۰	۰/۷۰۳۴	GAR	۵۰
۰/۰۶۳۱	۴/۱۴۱۴	۰/۰۳۰۸	۰/۰۴۹۵	WAR	
۸۶/۴۱۸۶	۷۰/۷۹۶۷۳	۵۲/۱۶۱۰	۸۰/۷۶۰۷	LNAR	
۰/۱۸۰۳	۲/۶۱۳۹	۰/۰۵۳۰	۰/۱۸۶۲	GAR	۱۵۰
۰/۰۲۸۳	۲/۰۲۹۸	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۷۴	WAR	
۲۵/۶۶۸۰	۲۶/۴۲۸۹	۱۸/۰۸۰۸	۲۵/۱۸۷۲	LNAR	
۰/۱۰۲۳	۵/۶۷۹۸	۰/۰۲۲۷	۰/۱۱۴۶	GAR	۲۵۰
۰/۰۱۹۸	۲/۰۱۹۲	۰/۰۱۸۹	۰/۰۲۰۲	WAR	
۱۹/۱۹۹۹	۲۱/۶۶۲۸	۱۰/۰۵۶۴	۱۹/۲۵۸۶	LNAR	
۰/۰۵۳۳	۲/۳۹۴۷	۰/۰۱۸۴	۰/۰۶۸۳	GAR	۵۰۰
۰/۰۱۲۰	۱/۵۱۳۲	۰/۰۱۱۴	۰/۰۱۱۶	WAR	
۸/۶۰۹۹	۹/۷۴۹۱	۵/۹۳۳۷	۸/۵۲۵۴	LNAR	
۰/۰۱۸۲	۰/۰۲۹۷	۰/۰۰۷۴	۰/۰۲۹۸	GAR	۱۰۰۰
۰/۰۰۵۴	۰/۸۰۵۹	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۵۵	WAR	
۴/۴۶۲۳	۴/۸۳۸۷	۳/۲۱۹۷	۴/۶۵۲۴	LNAR	

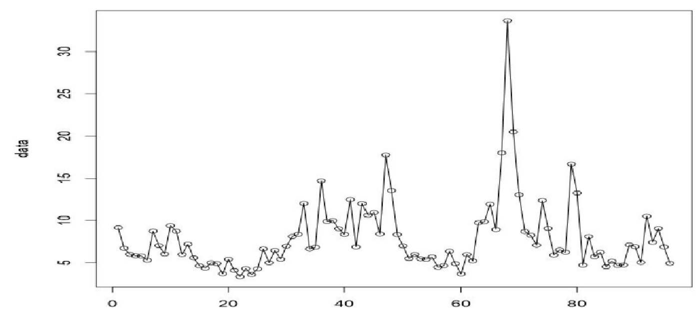
پارامترهای مجهول مدل‌های پیشنهادی با استفاده از روش‌های درستنمایی ماکزیمم، MLE، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، MMLE، بوت استرپ، BE، و گشتاوری، MME، برآورد می‌شوند. میانگین مربع خطا n گام پیش‌بینی مربوط به هرکدام از مدل‌های برآورد شده محاسبه و نتایج به‌دست‌آمده در جدول (۴) ارائه‌شده است. این نتایج نشان می‌دهند که برآوردگرهای بوت استرپ پارامترها دارای کمترین میانگین مربع خطا هستند. همچنین برای مدل خود بازگشتی با خطاهای نامنفی، مقادیر میانگین مربعات خطاهای مربوط به دو برآوردگر

درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گشتاوری تقریباً یکسان هستند و از مقادیر میانگین مربعات خطاهای برآوردگر درستنمایی ماکزیمم کمتر می‌باشند.

۵- آنالیز داده‌های واقعی

مجموعه داده‌های S&P۵۰۰[1] طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۲۰۱۵ را در نظر بگیرید. S&P۵۰۰ ، شاخص بازار سهام آمریکایی، شامل سرمایه ۵۰۰ شرکت بزرگ با سهام معمول موجود در بازار است.

سری VSP با جایگذاری کردن سری D_{sp} در تابع $VSP = ۱۰۰\left(\nabla\left(\log\left(D_{sp}\right)\right)\right)$ قابل‌محاسبه است که در آن $D_{sp} = \left(\sum_{i=۱}^{m}\left(r_{t,i} - \mu_t\right)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$، $r_{t,i}$ نشان‌دهنده i مشاهده روزانه برای ماه t-ام، m تعداد روزهای هر ماه، μ_t میانگین مشاهدات برای هر ماه و ∇ نشان‌دهنده عملگر تفاضل مرتبه اول است. نمودار این داده‌ها در شکل (۴) ارائه شده است. با توجه به نمودارهای تابع خودهمبستگی نمونه‌ای، ACF، و تابع خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای، PACF، مربوط به داده‌ها مدل خود بازگشتی مرتبه اول پیشنهاد می شود. نمودارهای ACF و PACF در شکل (۵) ارائه‌شده است.

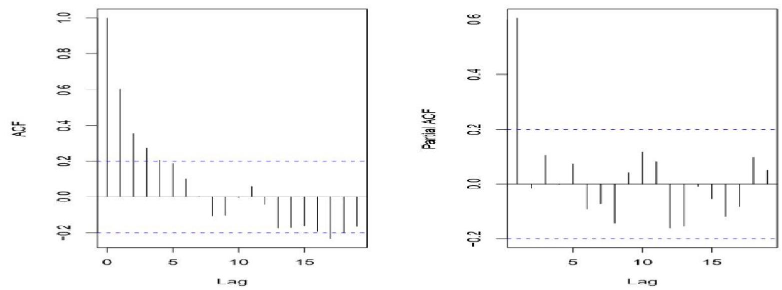


شکل (۴): شکل داده‌های VSP

چون تمامی مشاهدات نامنفی هستند بنابراین مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای گاما، GAR(۱)، مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای وایبل، WAR(۱)، و مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای لگ-

۱- http://finance.yahoo.com/quote/5EGSPC/components?p=5EGSPC

نرمال، LNAR(۱)، به‌عنوان مدل‌های رقیب پیشنهادشده است. پارامترهای مدل‌های رقیب با استفاده از برآوردگرهای به‌دست‌آمده محاسبه و مقادیر پارامترهای برآورد شده در جدول (۵) ارائه‌شده است.



شکل (۵): نمودار تابع خودهمبستگی نمونه‌ای و تابع خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای داده‌های VSP

جدول (۵): مقادیر پارامترهای برآورد شده مدل‌های پیشنهادشده برای داده‌های VSP

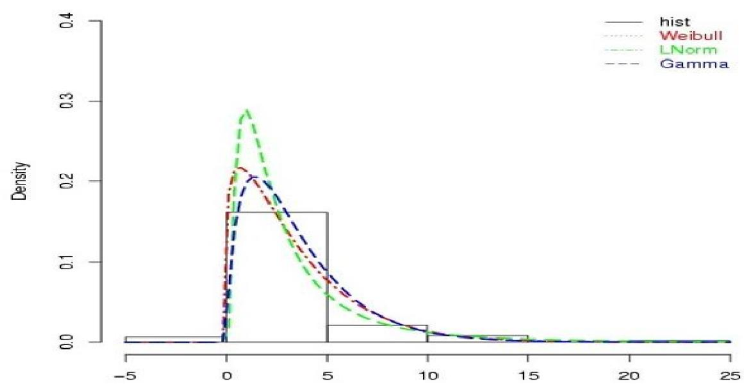
ϕ	Shape Parameter	Scale Parameter		
۰/۶۰۸۸	۲/۰۰۱۹	۱/۵۱۰۴	$G\ (\alpha, \beta)$	MMLE
۰/۶۰۹۳	۳/۱۳۸۶	۱/۰۱۹۴	$W\ (\upsilon, \tau)$	
۰/۶۰۸۴	۰/۹۹۸۰	۰/۷۳۲۶	$LN\ (\mu, \sigma^{۲})$	
۰/۵۹۸۴	۲/۰۹۳۹	۱/۶۷۷۹	$G\ (\alpha, \beta)$	BMLE
۰/۵۹۸۹	۳/۵۳۸۴	۱/۱۵۴۲	$W\ (\upsilon, \tau)$	
۰/۵۸۴۴	۰/۹۴۶۰	۰/۸۲۱۸	$LN\ (\mu, \sigma^{۲})$	
۰/۵۶۱۴	۲/۶۳۳۲	۱/۹۶۲۵	$G\ (\alpha, \beta)$	MME
۰/۶۷۱۵	۳/۱۳۵۲	۱/۵۳۴۸	$W\ (\upsilon, \tau)$	
۰/۵۶۱۴	۰/۸۹۵۷	۰/۷۱۲۴	$LN\ (\mu, \sigma^{۲})$	

با ا ستفاده از مقادیر برآورد شده پارامترهای مدل‌های رقیب و داده‌ها معیار اطلاع آکائیک، پی-مقدار آزمون کلموگرف-اسمیرنف برای مدل‌های رقیب محاسبه و در جدول (۶) ارائه شده است. چون مدل خود بازگشـــتی مرتبه اول با خطای گاما دارای کمترین مقدار معیار اطلاع آکائیک اسـت بنابراین مدل خود بازگشـتی برآورد شـده مرتبه اول با خطای گاما به‌عنوان مدل بهینه از بین مدل‌های رقیب پی شنهاد شده انتخاب شده ا ست. آزمون کلموگرف-ا سمیرنف نیز نتیجه‌ی به‌دست‌آمده را تائید می‌کند.

جدول (۶): مقادیر معیار اطلاع آکائیک و پی-مقدار آزمون کلموگرف-اسمیرنف مدل‌های رقیب

method	LNAR(۱)	WAR(۱)	GAR(۱)
MMLE	۵۱۲/۱۵۷	۴۰۹/۱۷۱۱	۳۹۵/۶۵۲۷
BMMLE	۴۷۱/۶۷۴۳	۴۰۵/۱۷۷۹	۴۰۰/۵۶۱۷
P-Value	۰/۰۷۳۱	۰/۱۴۹۴	۰/۶۵۳۳

در شکل (۶)، نمودار مربوط به هیستوگرام داده‌ها و مدل‌های رقیب پیشنهاد شده رسم شده است. شکل (۶) نشان می‌دهد که مدل خود بازگشتی مرتبه اول با خطای گاما برای برازش بر روی داده‌ها از بین مدل‌های رقیب پیشنهادشده توزیع مناسب‌تری است.



شکل (۶): نمودار هیستوگرام داده‌ها و مدل‌های رقیب پیشنهادشده

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های درستنمایی ماکزیمم، درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته، بوت استرپ و گشتاوری برای برآورد پارامترهای مدل‌های خود بازگشتی با خطای نامنفی بررسی شده است. عملکرد این برآوردگرها با استفاده از شبیه‌سازی براساس میانگین مربعات خطاهای برآوردگرها موردمطالعه قرارگرفته است. برپایه این مطالعه شبیه‌سازی روش درستنمایی ماکزیمم دارای میانگین مربعات خطای بزرگ‌تری نسبت به سه روش دیگر در مدل‌های خود بازگشتی با خطاهای نامنفی است. اگرچه برای اندازه نمونه‌های کوچک برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بهبودیافته نسبت به برآوردگر گشتاوری بهتر و دارای میانگین مربعات خطای کمتری است اما با افزایش اندازه نمونه، مقادیر به‌دست‌آمده برای میانگین مربعات خطا برای دو روش،

در ستنمایی ماکزیمم بهبودیافته و گ شتاوری، یک سان ه ستند. از طرفی برآوردگر بوت ا سترپ دارای کمترین میانگین مربعات خطا ن سبت به سه برآوردگر دیگر ا ست. لذا روش بوت ا سترپ برای برآورد پارامترهای مدل‌های خود بازگشتی با خطای نامنفی پیشنهاد می‌شود.

منابع

[1] Gaver, D. P. and Lewis, P. A. (1980). First-Order Autoregressive Gamma Sequences and Point Processes, *Adv. Appl. Prob*, **2**, 727-745.

[2] Tiku, M. L. (1967). Estimating the Mean and Standard Deviation from a Censored Normal Sample, *Biometrica*, **54**, 155-165.

[3] Tiku, M.L., Wong, W.K. and Bian, G. (1999). Time Series Models with Asymmetric Innovations, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **28(6)**, 1331-1360.

[4] Zamani, S. and Sayyareh, A. (2016). Separated hypotheses testing for autoregressive models with non-negative residuals , *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**, 4, 689-711.

[5] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *Ann. Statist*, **7**, 1-26.

[6] Kunsch, H. R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations, *Ann. Statist*, **17**, 1217-1241.

[7] Liu, R. Y. and Singh, K. (1992). Moving blocks jackknife and bootstrap capture week dependence, *Exploring the Limit of Bootstrap, R. LePage and L. Billard eds*, 225-248, Wiley, New York.

[8] Politis, D. N. and Romano, J. P. (1994). Large sample confidence regions based on subsamples under minimal assumptions, *Ann. Statist*, **22**, 2031-2050.

[9] Pascual, L., Romo, J. and Ruiz, E. (2001). E□ects of parameter estimation on prediction densities: a bootstrap approach, *Intern. J. Forecasting*, **17**, 83-103.

[10] Politis, D. N. (2003). The Impact of Bootstrap Methods on Time series Analysis, *Statistical Science*, **2**, 219-230.

[11] Yule, G. (1927). On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A*, **226**, 267–298.

[12] Walker, G. (1931). On Periodicity in Series of Related Terms, *Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*, **131**, 518–532.

Bootstrap, Modified Maximum Likelihood and Moment Estimators Comparison for Parameters of Autoregressive Model with Non-negative Residuals

Sedigheh Zamani Mehreya* and Abdolreza Sayyareh**

*Department of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran

**Department of Computer science and Statistics, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

Normal residual is one of the usual assumptions in autoregressive model but sometimes in practice we are faced with non-negative residuals. In this paper, we have considered the autoregressive time series model, where the residuals follow exponential and Weibull family. The estimation of the parameters in autoregressive with non-negative residuals are studied based on the modified maximum likelihood, bootstrap and moments estimators. We examine by simulation, the performance of the proposed estimation methods and found that the bootstrap estimator is the better one for autoregressive model with non-negative residuals. As a real data analysis, we have considered the S&P500 data between 1987-2015 as a data set generated from a first order autoregressive model with non-negative residuals and based on the model selection criteria we select the optimal model between the competing models.

Keywords: Autoregressive model, Modified maximum likelihood estimator, Moments estimator, Moving Block bootstrap.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10, 62M10.