یک مدل جدید برای فرآیندهای همبسته دوره‌ایی با پراکندگی متغیر شرطی

روح‌اله رمضانی[1]*، سعید رضاخواه ورنوسفادرانی** و مجید فرهادی***

*گروه آمار، دانشگاه دامغان

**گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

***گروه ریاضی، دانشگاه دامغان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۵

چکیده: در این مقاله با فرض ساختار دوره‌ایی برای فرآیند LARCH کلاس جدیدی از یک مدل سری زمانی با ساختار همبسته دوره‌ایی، واریانس شرطی و حافظه طولانی معرفی می‌شود. همچنین، برای این سری زمانی ساختار وابستگی درون فصلی و بین فصلی موردمطالعه قرار می‌گیرد. تحت فرض‌های ارائه‌شده، سری زمانی هر فصل دارای ویژگی حافظه طولانی است. در انتها با استفاده از شبیه‌سازی کارایی برآوردگر R/S، در برآورد پارامتر حافظه طولانی هر فصل نشان داده‌شده است.

واژه‌های کلیدی: سری زمانی، حافظه طولانی، وابستگی دوره‌ایی، مدل LARCH

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۶۲M۱۰، ۹۱B۷۰.

۱- مقدمه

در تحلیل بسیاری از سری‌های زمانی اقتصادی، هواشناسی و مسائل مهندسی این واقعیت وجود دارد که این سری‌ها از یک رفتار مانا تبعیت نمی‌کنند. مدل‌های اولیه ارائه‌شده در مدل‌سازی سری‌های زمانی توسط باکس و جنکینز [۱] بر این فرض استوار بودند که سری مشاهدات مانا باشد. فرآیندهایی که دارای وابستگی دوره‌ای هستند دارای ویژگی مانایی نیستند. گلادیشف [۲] برای اولین بار ساختار مشخصه تابع خودهمبستگی و نمایش طیفی فرآیندهای همبسته دوره‌ایی را تبیین کرد. مطالعات انجام‌شده در مورد سری‌های زمانی با ساختار دوره‌ایی در زمینه‌های مختلف از جمله، در هواشناسی توسط قنبر زاده و همکاران [۳] و همچنین لاند و همکاران [۴]، در علوم آب توسط سالس و همکاران [۵]، در مهندسی مکانیک توسط ویلومانسکا

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: r_ramezani@du.ac.ir

و همکاران [۶]، و در مخابرات و مباحث شبکه توسط یاوروسکی و همکاران[۷] موردمطالعه قرارگرفته است.

فرآیند تصادفی X_t با گشتاور متناهی مرتبه دو یک فرآیند همبسته دوره‌ایی با دوره T نامیده می‌شود هرگاه T کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که به ازای همه اعداد صحیح t و s تابع میانگین و کواریانس این فرآیند در رابطه زیر صدق کند:

$$E[X_t] = E[X_{t+T}], \qquad Cov(X_{t+T}, X_{s+T}) = Cov(X_t, X_s) \tag{۱}$$

عبارت "همبسته دوره‌ایی" توسط گلادیشف [۲] بر مبنای ویژگی تابع چگالی چنین فرآیندهایی انتخاب‌شده است. در حوزه زمان نیز عبارت "مانای دوره‌ایی" در مراجع [۸] و [۹] معرفی‌شده است.

فرض کنید X_t یک فرآیند همبسته دوره‌ایی با دوره T باشد، آنگاه میانگین فصلی و تابع اتوکوواریانس فرآیند X_t به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_\nu = E[X_{nT+\nu}], \qquad \gamma_\nu(h) = Cov(X_{nT+\nu}, X_{nT+\nu-h}) \tag{۲}$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که μ_ν و $\gamma_\nu(h)$ به فصل ν و تأخیر h وابسته بوده ولی تابعی از n نیستند. برخلاف تابع اتوکوواریانس یک سری مانا، $\gamma_\nu(h)$ برحسب h متقارن نیست ولی براساس رابطه (۲) برای هر $h \geq 0$، $\gamma_\nu(-h) = \gamma_{\nu+h}(h)$ و $\gamma_\nu(h)$ دارای دوره T نسبت به ν است. درنتیجه تابع خودهمبستگی این فرآیند X_t

$$\rho_\nu(h) = Corr[X_{nT+\nu}, X_{nT+\nu-h}] = \frac{\gamma_\nu(h)}{\sqrt{\gamma_\nu(0)\gamma_{\nu-h}(0)}} \tag{۳}$$

نیز تابعی دوره‌ایی با دوره T نسبت به ν خواهد بود. مدل PARMA معرفی‌شده توسط وکیا [۱۰]، یکی از مدل‌های متداول برای مدل‌سازی مشاهدات همبسته دوره‌ایی است. X_t یک سری PARMA با دوره T و میانگین فصلی μ_ν است هرگاه یک حل ایستای دوره‌ای با دوره T برای معادله بازگشتی زیر برای $\nu = 1, \dots, T; n \in N$ موجود باشد:

$$X_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^{p(\nu)} \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} = \sum_{k=0}^{q(\nu)} \theta_k(\nu) Z_{nT+\nu-k} \tag{۴}$$

Z_t یک فرآیند نوفه سفید با واریانس واحد است. در رابطه (۴) مرتبه مدل و پارامترهای آن نسبت به ν متغیر دوره‌ای با دوره T هستند.

اینگل[۱۱] و بولرسلو[۱۲] برای اولین بار دسته دیگری از مدل‌ها را برای مدل‌سازی مشاهدات سری زمانی با واریانس شرطی متغیر، با نام‌های ARCH و GARCH معرفی نمودند که به‌طور

گسترده در مدل‌سازی سری‌های زمانی مالی مورداستفاده قرارگرفته‌اند. در این نوع از مدل‌ها، واریانس شرطی مشاهدات با داشتن اطلاعات تا زمان $t-1$ را با $\sigma_t^2 = Var(r_t \mid F_{t-1})$ (F_{t-1} سیگما میدان پیشامدهای تولیدشده توسط $r_s, s \le t$) که σ_t^2 تابعی از توان دوم مشاهدات گذشته بوده و تصادفی است. رابطه کلی مدل GARCH(p,q) عبارت است از:

$$r_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j r_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, t \in Z \qquad (5)$$

که $\omega > 0$، $\alpha_j \ge 0$ و $\beta_j \ge 0$ (درنتیجه واریانس شرطی در شرط $\sigma_t^2 > 0$ صدق می‌کند). در رابطه بالا اگر $q = 0$ باشد مدل ARCH(p) به دست می‌آید. یکی از ویژگی‌های فرآیندهای GARCH(p,q) و ARCH(p) این است که تابع خودهمبستگی فرایند r_t^2 در تأخیرهای کم به‌سرعت کاهش می‌یابد. به عبارتی فرآیند r_t^2 از یک حافظه کوتاه مدت برخوردار است. ویژگی حافظه کوتاه مدت حتی در مورد فرآیند ARCH(∞) با رابطه بازگشتی نامتناهی زیر نیز برقرار است.

$$r_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j r_{t-j}^2, t \in Z \qquad (6)$$

رفتار کاهشی تابع خودهمبستگی در مدل‌های ذکرشده از کاهش نمایی نیز سریع‌تر است. مطالعات تجربی توسط ویستلر [۱۳] و دینگ و همکاران [۱۴] نشان داده است که فرآیند واریانس شرطی r_t^2 می‌تواند دارای ویژگی حافظه طولانی باشند. یک مدل مناسب که می‌تواند رفتار حافظه طولانی در توان دوم مشاهدات را توصیف نماید با نام LARCH [1] توسط گریتیس و همکاران [۱۵] به‌صورت زیر پیشنهادشده است:

$$r_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad \sigma_t = \omega + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j r_{t-j}. \qquad (7)$$

آن‌ها نشان دادند که اگر $\omega \neq 0$ باشد و متغیرهای تصادفی ε_t ها مستقل با میانگین صفر و واریانس یک باشند و ضرایب α_j در رابطه ذیل صدق کنند

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < 1, \qquad (8)$$

آنگاه رابطه (۷) یک حل منحصربفرد مانا دارد که به‌صورت یک سری ولترا به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

1- Linear ARCH

$$\sigma_t = \omega + \omega \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_k} \varepsilon_{t-j_1} \ldots \varepsilon_{t-j_1-\ldots-j_k} \qquad (۹)$$

و σ_t در رابطه (۷) دارای ویژگی حافظه طولانی است اگر

$$\alpha_j \sim c j^{d-1}, \quad 0 < c < \infty. \quad 0 < d < 0/5 \qquad (۱۰)$$

باشد که d پارامتر حافظه طولانی بوده و c یک مقدار ثابت است و نماد" ~ " به این معناست که حد نسبت چپ و راست به سمت عدد یک میل می‌کند. این ویژگی حافظه طولانی زمانی که $\sigma_t = (1-L)^{-d} r_t$ باشد باعث می‌شود که ضرایب مدل LARCH همان ضرایب مدل ARFIMA(۰,d,۰) گردد. پارامترهای مدل (۷) برخلاف مدل (۶) محدودیت مثبت بودن ندارند و σ_t معنای انحراف معیار را ندارد، بلکه توان دوم آن واریانس شرطی خواهد بود.

در این مقاله یک مدل سری زمانی جدید پیشنهادشده است که ساختار سری زمانی LARCH را داشته و خاصیت دوره‌ایی برای واریانس شرطی σ_t بر مبنای دوره‌ای بودن ضرایب مدل خطی رابطه (۷) برقرار باشد. بنابراین به‌اختصار نام PCLARCH[1] برای آن انتخاب‌شده است. ایده اصلی این روش بر مبنای روش بولرسلو و گیسلز [۱۵] است که مدل PGARCH را معرفی نموده‌اند. آن‌ها از ایده بازنویسی مدل GARCH به‌صورت یک مدل ARMA براساس توان دوم مشاهدات استفاده نموده‌اند. پارامترهای مدل PGARCH همچون مدل‌های همبسته دوره‌ایی به‌صورت زمان-متغیر بوده، ساختار دوره‌ایی دارند و توان دوم مشاهدات را در این مدل می‌توان براساس یک مدل PARMA مدل‌سازی نمود. یکی از تفاوت‌های اساسی دو مدل PCLARCH و PGARCH این است که مدل PCLARCH برخلاف مدل PGARCH توانایی مدل‌سازی مشاهداتی که توان دوم آن‌ها دارای خاصیت حافظه طولانی است را دارد. در ادامه مطالب مقاله به این شکل سازمان‌دهی شده‌اند. در بخش ۲، ساختار مدل PCLARCH معرفی‌شده است. در بخش ۳ ضمن بیان قضایایی در رابطه با گشتاورهای داخل فصلی و بین فصلی مدل، ویژگی حافظه طولانی بودن و دوره‌ایی بودن مدل بررسی‌شده است. بخش ۴ به معرفی برآوردگر R/S برای برآورد پارامتر حافظه طولانی در این فرآیند می‌پردازد. در بخش ۵ در ضمن یک مطالعه شبیه‌سازی کارایی برآوردگر R/S برای برآورد پارامتر حافظه موردبررسی قرار خواهد گرفت و در بخش ۶، خلاصه‌ایی از نتایج به‌دست‌آمده ارائه‌شده است.

۲- معرفی مدل PCLARCH

1- Periodically Correlated LARCH

مدل‌هایی که بر پایه مدل‌های ARCH توسط اینگل [۱۱] و سایر محققان معرفی‌شده‌اند صرفاً برای سری‌های زمانی مانا بوده و فاقد تغییرات دوره‌ایی می‌باشند. لذا این مدل‌ها برای مشاهداتی که ویژگی دوره‌ایی یا فصلی دارند مناسب نیستند. سری‌های زمانی PCLARCH جهت مشاهدات دوره‌ایی با ویژگی واریانس شرطی دوره‌ایی به شکل زیر پیشنهادشده است:

$$y_t = \varepsilon_n \sigma_t ,$$
$$\sigma_t - a_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\nu) y_{t-jT} \quad n = 0,1,\dots \quad ; \quad \nu = 1,2,\dots,T \; ; \; t = nT + \nu \tag{11}$$

در رابطه بالا T دوره تناوب سری را نشان می‌دهد و $\{\varepsilon_t\}$ها متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس یک هستند، وقتی $t = nT + \nu$. در رابطه (۱۱)، $\{\lambda_j(\nu)\}$ضرایب مدل در فصل νام بوده و لذا ضرایب $\lambda_j(\nu)$ و a_ν دارای ویژگی دوره‌ای نسبت به اندیس ν هستند. بنابراین $\sigma_{nT+\nu}$ و y_t نیز دارای ویژگی دوره‌ای خواهند بود. درنتیجه $Cov(\sigma_{(n-j)T+r}, \sigma_{(n-j)T+s}) = Cov(\sigma_{nT+r}, \sigma_{nT+s})$.

در بخش بعدی ضمن مطالعه ساختار $\sigma_{nT+\nu}$ (قضیه ۱)، میانگین و توابع اتوکوواریانس آن نیز محاسبه خواهد شد. در ادامه با ذکر شرایطی نشان داده می‌شود که فرآیند y_t^2، دارای ویژگی حافظه طولانی بوده (قضیه ۲) و درنهایت ویژگی همبسته دوره‌ایی برای فرآیند $y_{nT+\nu}$ اثبات خواهد شد (قضیه ۳).

۳- بررسی ویژگی‌های مدل PCLARCH

فرض کنید که فرضیات زیر برقرار باشند:

فرضیه ۱. الف) $\{\varepsilon_n\}$ها دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس واحد باشند.

ب) $a_\nu \neq 0, \;\; \nu = 0,1,\dots,T$.

فرضیه ۲. ضرایب مدل در شرایط زیر صدق کنند:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(r) \lambda_j(s) \neq 1, \tag{12}$$

$$\lambda^2(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2(\nu) < 1. \tag{13}$$

فرض کنید که F_t سیگما میدان تولیدشده توسط $\varepsilon_s, s<t$ باشد.

در ادامه با توجه به فرضیه‌های بیان‌شده، قضیه‌هایی ۱ و ۲ در مورد ویژگی‌های فرآیند y_{nT+v} بیان‌شده است. قضیه‌های ۱و ۲، تعمیمی از قضیه‌های ۱-۲ و ۳-۲ از گریتیس و همکاران [۱۶] است.

قضیه ۱. فرض کنید که فرضیه‌های ۱ و ۲ برقرار باشند. بنابراین یک حل ایستای دوره‌ای ضعیف و F_{nT+v} اندازه‌پذیر از σ_{nT+v} وجود دارد.

اثبات: میانگین فصلی فرآیند σ_{nT+v} عبارت است از:

$$E(\sigma_{nT+v}) = a_v, \tag{۱۴}$$

و گشتاور مرتبه دوم فرآیند σ_{nT+v} نیز عبارت است از:

$$E(\sigma^2_{nT+v}) = \frac{a_v^2}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(v)}, \tag{۱۵}$$

بنابراین اگر فرضیه ۲ برقرار باشد واریانس فصلی فرآیندهای σ_{nT+v} و y_{nT+v} متناهی و برابر یک مقدار مثبت خواهد بود. کوواریانس داخل فصلی با تأخیر سالانه $h = mT$ فرآیند σ_{nT+v} برابر است با:

$$Cov(\sigma_t, \sigma_{t-mT}) = \frac{a_v^2}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(v)}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(v)\lambda_{m+k}(v), \tag{۱۶}$$

بنابراین اگر فرضیه ۲ برقرار باشد، کوواریانس داخل فصلی فرآیند σ_{nT+v} متناهی خواهد بود. با توجه به رابطه (۱۱) و اینکه از رابطه (۱۴) داریم که $E(\sigma_{nT+v}) = a_v$ است، رابطه کوواریانسی درون فصلی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} Cov(\sigma_{nT+r}, \sigma_{nT+s}) &= E[(\sigma_{nT+r} - a_r)(\sigma_{nT+s} - a_s)] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)E[y_{(n-j)T+r}\, y_{(n-j)T+s}] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $y_{nT+\upsilon}=\varepsilon_n\sigma_{nT+\upsilon}$ و استقلال ε_nها از $\sigma_{nT+\upsilon}$ها و اینکه $E\left(\varepsilon_n^{۲}\right)=۱$، سمت راست رابطه فوق به‌صورت $\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)E[\sigma_{(n-j)T+r}\sigma_{(n-j)T+s}]$ حاصل می‌شود. درنتیجه با استفاده مجدد از $E(\sigma_{nT+\upsilon})=a_{\upsilon}$ داریم:

$$Cov(\sigma_{nT+r},\sigma_{nT+s})=\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)[Cov(\sigma_{(n-j)T+r},\sigma_{(n-j)T+s})+a_r a_s]$$

به دلیل اینکه فرآیند $\sigma_{nT+\upsilon}$ دارای خاصیت دوره‌ایی است، برای هر مقدار صحیح j تساوی زیر برقرار است

$$Cov(\sigma_{(n-j)T+r},\sigma_{(n-j)T+s})=Cov(\sigma_{nT+r},\sigma_{nT+s})$$

که با جایگذاری در تساوی قبل و ساده کردن رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$Cov\,(\sigma_{nT+r},\sigma_{nT+s})=\frac{a_r a_s}{۱-\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)}\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s). \qquad (۱۷)$$

بنابراین اگر فرضیه ۲ برقرار باشد، کوواریانس بین فصلی فرآیند $\sigma_{nT+\upsilon}$ متناهی خواهد بود. بنابراین با توجه به فرضیه ۲، فرآیند $\sigma_{nT+\upsilon}$ یک فرآیند ایستای ضعیف در فصل υ بوده و با حل رابطه (۱۱) به‌صورت بازگشتی و تکراری، مطابق رابطه (۲-۱) در [۱۶] یک حل از فرآیند $\sigma_{nT+\upsilon}$ براساس سری ولترا عبارت است از:

$$\sigma_{nT+\nu}=a_{\nu}+a_{\nu}\sum_{k=۱}^{\infty}\sum_{j_۱,\ldots,j_k=۱}^{\infty}\lambda_{j_۱}(\nu)\ldots\lambda_{j_k}(\nu)\varepsilon_{n-j_۱}\ldots\varepsilon_{n-j_۱-\ldots-j_k}\quad. \qquad (۱۸)$$

با توجه به قضیه ۱، گشتاورهای فرآیند $y_{nT+\upsilon}$ را می‌توان به‌صورت ذیل به دست آورد. بنابراین داریم:

$$E(y_{nT+\upsilon}^{۲})=E(\sigma_{nT+\upsilon}^{۲}),\ E(y_{nT+\upsilon})=۰,$$

با توجه به رابطه (۱۵) و این موضوع که $\sigma_{nT+\upsilon}$ و $\varepsilon_{nT+\upsilon}$ مستقل از هم هستند، واریانس فصلی فرآیند $y_{nT+\upsilon}$ عبارت است از:

$$Var[y_{nT+\nu}]=E[y^{۲}_{nT+\nu}]=E[\varepsilon^{۲}_{nT+\nu}\sigma^{۲}_{nT+\nu}]$$
$$=E[\varepsilon^{۲}_{nT+\nu}]E[\sigma^{۲}_{nT+\nu}]=\frac{a^{۲}_{\nu}}{۱-\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda^{۲}_{j}(\nu)}, \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی $\{\varepsilon_n\}$ مستقل از هم هستند، کوواریانس داخل فصلی فرآیند $y_{nT+\upsilon}$ عبارت است از:

$$Cov(y_t.y_{t-mT})=E(y_{nT+\upsilon}y_{nT+\upsilon-mT})$$
$$=E(\varepsilon_n\varepsilon_{n-m})E(\sigma_{nT+\upsilon}\sigma_{(n-m)T+\upsilon})=۰, \qquad (۲۰)$$

کوواریانس بین فصلی فرآیند $y_{nT+\upsilon}$ با تأخیر $h=r-s$ عبارت است از:

$$Cov(y_{nT+r},y_{nT+s})=a_ra_s+Cov(\sigma_{nT+r},\sigma_{nT+s})$$
$$=a_ra_s(1+\frac{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)})=\frac{a_ra_s}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)}. \qquad (۲۱)$$

میانگین و واریانس شرطی فرآیند $y_{nT+\upsilon}$ عبارت است از:

$$E[y_{nT+\nu}|F_{nT+\nu-۱}]=۰. \qquad (۲۲)$$

$$Var[y_{nT+\nu}|F_{nT+\nu-۱}]=E[y^{۲}_{nT+\nu}|F_{nT+\nu-۱}]=\sigma^{۲}_{nT+\nu}=(a_\nu+\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j(\nu)y_{t-jT})^{۲}$$

فرض کنید که فرضیه ذیل برقرار باشد:

فرضیه۳. فرض کنید ضرایب مدل (۱۱) در روابط ذیل صدق کنند:

$$\lambda_j(\nu)\sim c(\nu)j^{d(\nu)-۱} \qquad ,j\to\infty$$
$$۰<c(\nu)<\infty. \qquad ۰<d(\nu)<۰/۵ \qquad (۲۳)$$

به‌طوری‌که $d(\nu)$ و $c(\nu)$ مقادیر ثابتی بوده که برای فصل ν تعریف شده‌اند و در شرایط بالا صدق می‌کنند. نماد "~" به این معنا است که در حالت حدی نسبت چپ به راست به یک میل می‌کند.

گزاره ۱. اگر فرض‌های ۳و۲،۱ برقرار باشند، رابطه مجانبی زیر نتیجه می‌شود:

$$Cov(\sigma_v,\sigma_{mT+v})\sim c^{۲}_{۱}(v)(mT)^{۲d(\nu)-۱}$$

به‌طوری‌که

$$c_1(\nu) = a_\nu c(\nu)\left(\frac{B((1-d(\nu),2d(\nu)-1)}{1-\lambda^2(\nu)}\right)^{1/2}$$

اثبات: این رابطه مجانبی دقیقاً از رابطه مجانبی محاسبه‌شده (۲-۹) در مقاله گریتیس و همکاران [۱۶]، با جایگزین کمیت‌های متناظر فرض شده در این رابطه به‌صورت $\theta = 1-2d(\nu)$، $a = a(\nu)$ و $b = \lambda(\nu)$ حاصل می‌شود.

فرضیه۴. فرض کنید که گشتاور مرتبه ۴ فرآیند ε_n متناهی بوده و

$$L(E[\varepsilon_0^4])^{1/2}\lambda^2(\nu) < 1. \tag{۲۴}$$

به‌طوری‌که اگر ε_nها نرمال باشند $L=7$ و در غیر این صورت $L=11$. رابطه (۲۴) یک محدودیت شدیدتر بر روی $\lambda(\nu)$ نسبت به فرضیه ۲ است.

قضیه ۲. اگر فرضیه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ برقرار باشند آنگاه زمانی که $m\to\infty$ رابطه زیر در مورد کواریانس فصلی، فصل ν سال اول و فصل νام m سال بعد، برقرار است:

$$Cov(y_\nu^2, y_{mT+\nu}^2) \sim c_2(\nu)^2(mT)^{2d(\nu)-1}, \tag{۲۵}$$

به‌طوری‌که

$$c_2(\nu) = 2\frac{c_1(\nu)}{a(\nu)}E(y_{nT+\nu}^2). \tag{۲۶}$$

اثبات: با توجه به تعریف فرآیندهای همبسته دوره‌ای و مدل (۱۱) برای $t = nT+\nu$ داریم:

$$\begin{aligned}Cov(y_t^2, y_{t-mT}^2) &= E(y_{nT+\nu}^2 y_{nT+\nu-mT}^2)\\ &= E(\varepsilon_n^2)E(\varepsilon_{n-m}^2)E(\sigma_{nT+\nu}^2\sigma_{(n-m)T+\nu}^2) = E(\sigma_{nT+\nu}^2\sigma_{(n-m)T+\nu}^2)\end{aligned}$$

اکنون با فرض $u_t = (\varepsilon_t^2-1)\sigma_t^2$ داریم: $y_t^2 = \varepsilon_t^2\sigma_t^2 = \sigma_t^2 + u_t$ در مقایسه این الگو با رابطه (۲-۱۴) در [۱۶]، مراحل اثبات رابطه مجانبی قضیه دقیقاً مشابه برقراری رابطه (۲-۱۳) در[۱۶] است، لذا با جایگزینی کمیت‌های متناظر فرض شده در گزاره (۱) و رابطه (۲۶) به‌صورت $\theta = 1-2d(\nu)$ و $a = a(\nu)$، $c_j = c_2(\nu)$ و $j=2$ رابطه (۲۵) حاصل می‌شود.

قضیه ۲ نشان می‌دهد که اگر ضرایب $\lambda_j(\nu)$ به‌صورت مناسب مطابق شرایط فرضیه ۳ انتخاب شوند آنگاه فرآیند y_t^2 دارای ویژگی حافظه طولانی در هر فصل است.

در قضیه ذیل اثبات‌شده است که فرآیند PCLARCH یک فرآیند با ویژگی همبسته دوره‌ایی است.

قضیه ۳. اگر y_{nT+v} یک فرآیند PCLARCH باشد که توسط رابطه (۱۱) تعریف‌شده است، بنابراین فرآیند y_{nT+v} یک فرآیند همبسته دوره‌ایی است.

اثبات: با توجه به تعریف فرآیندهای همبسته دوره‌ایی، بایستی رابطه (۱) در مورد فرآیند y_{nT+v} ثابت شود. میانگین فصلی فرآیند y_{nT+v} در رابطه ذیل صدق می‌کند:

$$E[y_{nT+v+T}] = E[y_{nT+v}] = 0.$$

کوواریانس بین فصلی فرآیند y_{nT+v} عبارت است از:

$$Cov(y_{nT+r}, y_{nT+s}) = \frac{a_r a_s}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)},$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} Cov(y_{nT+r+T}, y_{nT+s+T}) &= E[y_{(n+1)T+r}y_{(n+1)T+s}] = E[\sigma_{(n+1)T+r}\varepsilon_{n+1}\sigma_{(n+1)T+s}\varepsilon_{n+1}] \\ &= E[\varepsilon_{n+1}^2]E[\sigma_{(n+1)T+r}\sigma_{(n+1)T+s}] = E[\sigma_{(n+1)T+r}\sigma_{(n+1)T+s}], \end{aligned}$$

و

$$E[\sigma_{(n+1)T+r}\sigma_{(n+1)T+s}] = a_r a_s + Cov(\sigma_{(n+1)T+r}, \sigma_{(n+1)T+s})$$

براساس سری ولترا در رابطه (۱۸) در مورد فرآیند $\sigma_{nT+\upsilon}$ می‌توان استنباط نمود که رابطه برقرار ذیل برقرار است:

$$Cov(\sigma_{(n+1)T+r}, \sigma_{(n+1)T+s}) = Cov(\sigma_{nT+r}, \sigma_{nT+s})$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} E[\sigma_{(n+1)T+r}\sigma_{(n+1)T+s}] &= a_r a_s + Cov(\sigma_{nT+r}, \sigma_{nT+s}) \\ &= a_r a_s + \frac{a_r a_s}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s) \\ &= \frac{a_r a_s}{1-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(r)\lambda_j(s)} = Cov(y_{nT+r}, y_{nT+s}), \end{aligned}$$

بنابراین

$$Cov(y_{nT+r+T}, y_{nT+s+T}) = Cov(y_{nT+r}, y_{nT+s}),$$

در مورد کوواریانس داخل فصلی نیز رابطه ذیل برقرار است:

$$Cov\,(y_{nT+v+T} \cdot y_{(n-m)T+v+T}) = Cov\,(y_{nT+v} \cdot y_{(n-m)T+v}) = 0.$$

۴- برآورد پارامتر حافظه در مدل PCLARCH

اگر بین مشاهدات سری زمانی در تأخیرهای طولانی همبستگی وجود داشته باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود سری زمانی دارای ویژگی حافظه طولانی است. به‌عبارت‌دیگر، اگر نرخ کاهش تابع خودهمبستگی مشاهدات سری زمانی برابر با نرخ تابع $k^{2d-1}, 0 < d < 1/2$ باشد، بنابراین تابع خودهمبستگی جمع‌پذیر نبوده و سری زمانی دارای ویژگی حافظه طولانی است. تحت شرایط بیان‌شده در قضیه ۲، فرآیند y^2_{nT+v} در هر فصل دارای ویژگی حافظه طولانی است.

یکی از روش‌ها برای برآورد پارامتر حافظه، به‌کارگیری آماره R/S است که توسط هارست [۱۷] و محققان دیگر مانند ماندلبروت [۱۸] توسعه داده‌شده است. فرض کنید $Y_1,...,Y_N$ یکسری مشاهدات باشند. آماره R/S عبارت است از $\hat{R}_N/\hat{S}_N$، به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} \hat{R}_N &= \max_{1\le k \le N} \sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y}_N) - \min_{1\le k \le N} \sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y}_N) \\ \hat{S}_N^2 &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(Y_j - \overline{Y}_N)^2 \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

برآورد پارامتر حافظه بر مبنای آماره R/S عبارت است از:

$$\hat{d}_{R/S} = \frac{\log(\hat{R}_N/\hat{S}_N)}{\log(N)} - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \log(\hat{R}_N/\hat{S}_N) = (\hat{d}_{R/S} + \frac{1}{2})\log(N) \qquad (۲۸)$$

که نشان می‌دهد $1/2+\hat{d}_{R/S}$ شیب‌خط رگرسیون $\log(\hat{R}_N/\hat{S}_N)$ در مقابل $\log(N)$ است. برای برآورد شیب‌خط گذرا از میان نقاط آماره R/S، می‌بایست زیر نمونه‌های $Y_1,...,Y_n$ زیادی با اندازه متغیر $n \le N$ از مشاهدات سری زمانی گرفته شود. مراحل اجرایی برآورد پارامتر حافظه براساس آماره R/S در بخش بعدی توضیح داده‌شده است.

۵- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش نتایج حاصل از برآورد پارامتر حافظه بر روی فرآیند فصلی PCLARCH براساس یک مطالعه شبیه‌سازی ارائه‌شده است. برای این منظور در فرآیند

$$y_k = \varepsilon_n \sigma_k , \quad \sigma_k - a_\nu = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j(\nu) y_{k-jT} \quad k = 1,...,N \quad , \varepsilon_n \sim N(0,1) \quad (۲۹)$$

تعداد فصل‌ها $T = 4$ در نظر گرفته‌شده و دو نمونه با حجم‌های $N = 12000$ و $N = 24000$ شبیه‌سازی‌شده است. برای کاهش اثرات مقادیر اولیه در هر شبیه‌سازی یک سری $y_{-\tau}, y_{-\tau+1},...,y_{-1}, y_0, y_1,..., y_N$ با مقدار $\tau = 12000$ تولیدشده است. به‌طوری‌که مشاهدات $y_{-\tau}, y_{-\tau+1},...,y_{-1}, y_0$ به‌صورت بازگشتی برای مقداردهی اولیه مشاهدات اصلی ایجادشده و سپس از مشاهدات اصلی قطع می‌شوند. مجموع نامتناهی در رابطه (۱۳) با مقدار $q = 5000$ قطع می‌شود. ضرایب مدل از تعمیم فصلی ضرایب مدل ARFIMA(0,d,0) و براساس عملگر $(1-L)^{-d(\nu)}$ به‌صورت ذیل محاسبه خواهند شد.

$$\lambda_0(\nu) = 1, \lambda_1(\nu) = d(\nu), \lambda_j(\nu) = \lambda_{j-1}(\nu)(j - 1 + d(\nu)) \quad (۳۰)$$

با توجه به قضیه ۲، چون ε_n از توزیع نرمال تبعیت می‌کند و گشتاور مرتبه چهارم آن متناهی است درصورتی‌که $d(\nu) < 0/225$ باشد فرآیند y_t^2 در هر فصل دارای ویژگی حافظه طولانی است. فرض کنید که

$$\begin{bmatrix} y_1^2, & y_5^2, & \dots & , y_{4n+1}^2 \\ y_2^2, & y_6^2, & \dots & , y_{4n+2}^2 \\ y_3^2, & y_7^2, & \dots & , y_{4n+3}^2 \\ y_4^2, & y_8^2, & \dots & , y_{4n+4}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix}$$

بردار $\boldsymbol{x}_\nu$ نشان‌دهنده توان دوم مشاهدات در فصل ν است. در ادامه شیوه برآورد پارامتر حافظه در هر فصل براساس آماره R/S ارائه‌شده است.

برای محاسبه آماره R/S ابتدا هر نمونه با N مشاهده به B بلوک با اندازه $[N/B]$ تقسیم می‌شود. بنابراین نقاط

$$t_1 = 1, t_2 = [N/B] + 1, ..., t_i = (i-1)[N/B] + 1, ..., t_B = N - [N/B] + 1$$

به دست می‌آید. سپس یک دنباله از بازه‌های $\{[t_i, t_i + k_j]\}_{i=1, j=1}^{B,K}$ با استفاده از K دنباله $\{k_j\}_{j=1}^{K}$ با شرط $t_i + k_j \leq N$ ایجاد می‌شود (برای مطالعه بیشتر می‌توانید رجوع کنید به

مرجع بران [۱۹] صفحات ۸۴-۸۵). مقادیر آماره R/S به ازای مشاهدات موجود در هر بازه $\{[t_i, t_i + k_j]\}_{i=۱, j=۱}^{B,K}$ به‌صورت $\{R/S(t_i, k_j)\}_{i=۱, j=۱}^{B,K}$ می‌باشند. لگاریتم مقدار آماره $\log(R/S(t_i, k_j))$ در مقابل $\log(k_j)$ رسم می‌گردد. فرض کنید $\hat{b}_\nu$ شیب

جدول (۱): نتایج حاصل از برآورد پارامتر حافظه طولانی فرآیند PCLARCH در هر فصل

ν	$d(\nu)$	۱۲۰۰۰	۲۴۰۰۰	$d(\nu)$	۱۲۰۰۰	۴۰۰۰
۱	۰/۰۵	۰/۰۴۸۹	۰/۰۴۷۴	۰/۱۵	۰/۱۴۷۱	۰/۱۵۲۶
		(۰/۰۳۶۰)	(۰/۰۲۸۵)		(۰/۰۴۰۵)	(۰/۰۳۳۲)
۲	۰/۰۷۵	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۸۴	۰/۱۷۵	۰/۱۷۳۷	۰/۱۸۰۰
		(۰/۰۳۷۵)	(۰/۰۳۰۰)		(۰.۰۴۱۲)	(۰.۰۳۴۱)
۳	۰/۱	۰/۱۱۰۱	۰/۱۰۹۴	۰/۲	۰.۱۸۸۶	۰.۱۹۵۸
		(۰/۰۳۸۹)	(۰/۰۳۱۴)		(۰.۰۴۳۲)	(۰.۰۳۴۲)
۴	۰/۱۲۵	۰/۱۱۹۵	۰/۱۲۳۶	۰/۲۲۵	۰/۱۷۸۵	۰/۱۸۷۳
		(۰/۰۳۹۶)	(۰/۰۳۱۸)		(۰/۰۶۲۴)	(۰/۰۵۱۲)

خط رگرسیونی برازش شده براساس روش کمترین مربعات خطا در هر فصل باشد. بنابراین برآورد پارامتر حافظه در هر فصل عبارت است از:

$$\hat{d}_{R/S}(\nu) = \hat{b}_\nu - ۱/۲ \qquad (۳۱)$$

مقدار پارامتر a_ν در هر چهار فصل برابر ۰,۱ در نظر گرفته‌شده است. نتایج حاصل از برآورد پارامتر حافظه طولانی در چهار فصل برای دو فرآیند شبیه‌سازی‌شده در جدول (۱) آمده است. در فرآیند اول مقادیر واقعی پارامتر حافظه در ۴ فصل بین ۰/۰۵ تا ۰/۱۲۵ و در فرآیند دوم بین ۰/۱۵ تا ۰/۲۲۵ در نظر گرفته‌شده است. جذر میانگین مربعات خطای مربوط به هر برآورد در ذیل آن داخل پرانتز آمده است.

در حجم نمونه ۲۴۰۰۰، برآوردگر R/S از خطای کمتری نسبت به نمونه با حجم ۱۲۰۰۰ برخوردار است. همان‌طور که در جدول (۱) دیده می‌شود برآوردگر R/S به‌خوبی توانسته مقادیر واقعی را برآورد نماید.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به ایده توسعه مدل PARMA از مدل‌های کلاسیک ARMA، مدل جدیدی تحت عنوان PCLARCH معرفی‌شده است. این مدل در کلاس مدل‌های ARCH قرار دارد و

برای مدل‌سازی تغییرات شرطی مناسب است. براساس قضایای ارائه‌شده، مدل PCLARCH دارای ویژگی همبسته دوره‌ایی است و برای مدل‌سازی مشاهدات فصلی با ویژگی همبسته دوره-ایی نیز مناسب است. براساس قضایای بیان‌شده، با ایجاد محدودیت‌هایی در انتخاب ضرایب مدل در ترکیب خطی مشاهدات گذشته، تابع خودهمبستگی داخل فصلی توان دوم فرآیند از یک رفتار حافظه طولانی تبعیت می‌کند. بنابراین فرآیند PCLARCH در هر فصل دارای وِیژگی حافظه طولانی است. مطالعه شبیه‌سازی نشان داد برآوردگر R/S برای برآورد پارامتر حافظه در هر فصل مناسب بوده و از خطای کمی برخوردار است.

منابع

[1] Box, G.E.P and Jenkins G.M. (1968). Some recent advances in forecasting and control, *Applied Statistics*, **17** (2), 91-109.

[2] Gladyshev, E.G. (1961). Periodically correlated random sequence, *Soviet Math.*, **2**, 385-388.

[3] Ghanbarzadeh, M .and Aminghafari, M. (2014). Prediction of periodically correlated processes by wavelet transform and multivariate methods with applications to climatological data, *Theoretical and Applied Climatology*, **120** (3), 433-444.

[4] Lund, R.B., Hurd, H.L., Bloomfield, P. and Smith R.L. (1995). Climatologyical time series with periodic correlation, *Journal of Climate*, **11**, 2787-2809.

[5] Sales, J.D., Chung, C. and Can celliere, A. (2005). Correlations and Crossing Rates of Periodic-Stochastic Hydrologic Processes, *Journal of Hydrologic Engineering*, **10** (4), 278-287.

[6] Wyłomańska, A., Obuchowski, J., Zimroz, R. and Hurd, H. (2014). Periodic Autoregressive Modeling of Vibration Time Series From Planetary Gearbox Used in Bucket Wheel Excavator. *Cyclostationarity: Theory and Methods*, Springer.

[7] Yavorskyj, I.N., Yuzefovych, R., Matsko, I.Y. and Zakrzewski, Z. (2014). Discrete estimations of cross-correlation components of periodically correlated random signals, *Radioelectronics and Communications Systems*, **57** (2), 78-91.

[8] Gardner, W. and Franks, L.E. (1975). Characterization of cyclostationary random signal processes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **21**, 4-14.

[9] Monin, A.S. (1963). Stationary and periodic time series in the general circulation of the atmosphere, *Proceedings Symposium on Time Series Analysis*, M.Rosenblatt, Ed., 144-151.

[10] Vecchia A.V. (2007). Periodic Autoregressive-Moving Average (PARMA) modeling with applications to water resources, *Journal of the American Water Resources Association*, **21** (5), 721-730.

[11] Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, **50** (4), 987-1008.

[12] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31** (3), 307-327.

[13] Whistler, D.N. (1990). Semiparametric models of daily andintra-daily exchange rate volatility, Ph.D. thesis, University London.

[14] Ding, Z., Granger, C.W.J. and Engle R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *J. Empirical Finance*, **1**, 83-106.

[15] Bollerslev, T., Ghysel, E. (1996). Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Business and Economic Statistics*, **14** (2),139-51.

[16] Giraitis, L., Robinson, P.M. and Surgailis, D. (2000). A model for long memory conditional heteroscedasticity, *The Annals of Applied Probability*, **10**, 1002-1024.

[17] Hurst, H. (1951). Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers,* **116**, 770–799.

[18] Mandelbrot, B.B. and Taqqu, M.S. (1979). Robust R/S analysis of long run serial correlation, 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila, Book 2, 69–99.

[19] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, New York: Chapman and Hall.

A New Model for Periodically Correlated Process with Conditional Heteroscedasticity

Rohollah Ramezani*, Saeid Rezakhah Varnousefaderani** and Majid Farhadi***

*Department of Statistic, Damghan University, Damghan, Iran

**Department of Mathematics, Amirkabir University of technology, Tehran, Iran.

***Department of Mathematics, Damghan University, Damghan, Iran

Abstract

In this paper, we study LARCH processes with periodic structure as a new class of time series with periodic conditional heteroscedasticity and long memory property. We characterize the structure of inter and intra season correlations. Under the proposed assumptions, the long memory property for each season is studied too. Finally, by simulation study the efficiency of the R/S estimator for estimating long memory parameter of each season is shown.

Keyword: Time series, Long Memory, Periodically correlated, LARCH model

Mathematics Subject Classification (2010): 62M10, 91B70.