C^*– جبرها و جبرهای کامیان-پسک تجزیه‌پذیر

مریم کشول رجب زاده و حسین لرکی[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۱۰

چکیده: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری- متناهی و K یک میدان است. در این مقاله، به مطالعه تجزیه‌پذیری جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ و C^*–جبر $C^*(\Lambda)$ متناظر با Λ می‌پردازیم. به‌ویژه، به کمک ویژگی‌های Λ و گروه‌وار G_Λ، شرایط لازم و کافی برای این تجزیه‌پذیری ارائه می‌شود. علاوه بر این نشان می‌دهیم در شرایط خاص می‌توان جبر کامیان-پسک را به‌صورت حاصل جمع مستقیم متناهی از جبرهای کامیان-پسک تجزیه‌ناپذیر نوشت.

واژه‌های کلیدی: k–گراف، جبر کامیان-پسک، C^*–جبر، تجزیه‌پذیری، جبر استنبرگ

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۱۶W۵۰, ۴۶L۰۵.

۱- مقدمه

در سال ۱۹۹۸ کامیان، پسک و رابرن به هر گراف جهت‌دار سطری-متناهی E یک C^*–جبر $C^*(E)$ متناظر کردند [۱]. در ادامه، این مهم برای هر گراف جهت‌دار دلخواه توسیع داده شد [۲]. این C^*–جبرها، C^*–جبرهای گرافی نامیده شدند و ازآن‌پس به‌عنوان یک مرجع بسیار مهم درزمینه C^*–جبرها موردتوجه و مطالعه قرار گرفتند [۲، ۳، ۴ و ۵]. هم‌زمان با پیشرفت‌های به‌دست‌آمده درزمینه‌ی C^*–جبرهای گرافی، جبرهای مسیری لیویت $L_K(E)$ توسط آبرامز و آراندا پینوبرای گراف‌های جهت‌دار E روی میدان K معرفی شدند که به‌عنوان نمونه جبری C^*–جبرهای گرافی شناخته می‌شوند [۶ و ۷].

به‌منظور مدل‌سازی جبر کانتز-کریگر با مرتبه $k \geq ۱$ در [۸ و ۹]، کامیان و پسک در [۱۰] k–گراف‌ها و C^*–جبرهای متناظر با آن‌ها را معرفی کردند. یک k–گراف (یا یک گراف از مرتبه $k \geq ۱$)، یک رسته $\Lambda = (\Lambda^0, \Lambda, r, s)$ به همراه یک ویژگی نمایش یکتاست (بخش دوم را

۱- آدرس الکترویکی نویسنده مسئول مقاله: h.larki@scu.ac.ir

ببینید) که در حالت خاص $k=۱$، Λ همان گراف جهت‌دار است. لذا C^*–جبرهای $C^*(\Lambda)$ در [۱۰] توسیعی از C^*–جبرهای گرافی [۱ و ۲] و جبرهای کانتز-کریگر با مرتبه k در [۸] می‌باشند. از آن زمان، این C^*–جبرها بسیار موردتوجه قرارگرفته‌اند و ساختار آن‌ها موردبررسی قرارگرفته است [۱، ۳، ۱۰ و ۱۱]. باوجود این، ساختار این دسته از C^*–جبرها بسیار پیچیده‌تر از حالت گرافی معمولی است.

فرض کنید Λ یک k–گراف و K یک میدان است. جبرهای کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ نمونه جبری $C^*(\Lambda)$ هستند که ابتدا در [۱۲] برای یک k–گراف سطری- متناهی Λ بدون چشمه تعریف شدند و سپس در [۱۳] و [۱۴] توسیع داده شدند. این جبرها توسیعی از جبر مسیری لیویت $L_K(E)$ نیز می‌باشند که در سال‌های اخیر بسیار موردتوجه قرار گرفتند [۱۵، ۱۶ و ۱۷]. در این مقاله، روی تجزیه‌پذیری جبرهای $KP_K(\Lambda)$ و $C^*(\Lambda)$ متمرکز خواهیم شد. یادآوری می‌کنیم که یک جبر A را تجزیه‌پذیر گوییم هرگاه ایده‌آل‌های ناسره I و J در A موجود باشند به‌طوری‌که $A=I\oplus J$.

با استفاده از ساختار ایده‌آل‌ها، هنگ در [۳] شرایطی را برای تجزیه‌پذیری C^*–جبر گرافی $C^*(E)$ ارائه نمود. این نتایج در مقالات [۱۸ و ۱۹] برای جبر مسیری لیویت ثابت شدند. در این مقاله، تجزیه‌پذیری و $KP_K(\Lambda)$ را مطالعه می‌کنیم. به‌ویژه در قضیه ۳۰ به کمک ویژگی‌های k–گراف Λ و گروه‌وار نظیر آن G_Λ، تجزیه‌پذیر بودن $C^*(\Lambda)$ و $KP_K(\Lambda)$ را مشخصه‌سازی خواهیم نمود.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲، تعریف k–گراف Λ و برخی مفاهیم مرتبط با آن را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، ابتدا به تعریف جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ پرداخته و سپس شرایط معادلی برای تجزیه‌پذیری آن براساس ویژگی‌های Λ ارائه می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم اگر $KP_K(\Lambda)$ نوتری یا آرتینی باشد، جبر $KP_K(\Lambda)$ به‌صورت حاصل جمع مستقیم تعداد متناهی از جبرهای کامیان-پسک تجزیه‌ناپذیر است. در بخش ۴، تجزیه‌پذیری C^*–جبر $C^*(\Lambda)$ را مشخصه‌سازی خواهیم کرد که متناظر با نتایج بخش ۳ است. در پایان، در بخش ۵، روی جبر استنبرگ تولیدشده به‌وسیله k–گراف Λ متمرکز می‌شویم. این جبر به‌وسیله گروه‌وار G_Λ از Λ تعریف می‌شود. در این بخش، شرایط تجزیه‌پذیری $KP_K(\Lambda)$ در بخش ۳ را با ویژگی‌های گروه‌وار G_Λ توصیف می‌کنیم.

۲ـ k-گراف‌ها

در این بخش، برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی k-گراف‌ها را از [۱۲] یادآوری می‌کنیم که در بخش‌های بعد مورداستفاده قرار می‌گیرند.

در این مقاله، مجموعه اعداد طبیعی شامل صفر را با $\mathbb{N}$ نشان داده و k را عدد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. برای $m,n \in \mathbb{N}^k$ می‌نویسیم $m \le n$ هرگاه برای هر $1 \le i \le k$ رابطه $m_i \le n_i$ برقرار باشد. همچنین، ماکسیمم مؤلفه‌ای m و n را با $m \vee n$ مشخص کرده و عضو $(0,0,\cdots,0) \in \mathbb{N}^k$ را با 0 نشان می‌دهیم.

تعریف ۱: یک k-گراف Λ، رسته شمارش‌پذیر $\Lambda = (\Lambda^0, \Lambda, r, s)$ به همراه یک تابعگر $d : \Lambda \to \mathbb{N}^k$ است که در خاصیت تجزیه یکتا صدق می‌کند. این خاصیت عبارت است از:

برای هر $\lambda \in \Lambda$ و $m,n \in \mathbb{N}^k$ با $d(\lambda) = m + n$، اعضای یکتای $\mu,\nu \in \Lambda$ وجود دارند که $\lambda = \mu\nu$، $d(\mu) = m$ و $d(\nu) = n$.

مثال ۲: گراف جهت‌دار و سطری-متناهی $E = (E^0, E^1, r, s)$ یک ۱ـگراف است. رسته E را به‌صورت $(E^0, P(E), r, s)$ درنظرگرفته که در آن $P(E)$ مجموعه مسیرهای متناهی E است. (توجه کنید هر رأس E یک مسیر با طول صفر خواهد بود.) همچنین برای هر $\mu \in P(E)$، $s(\mu)$ و $r(\mu)$ به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ترکیب مسیرهای μ و ν با شرط $r(\nu) = s(\mu)$ به‌صورت $\mu\nu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_{|\mu|}\nu_1\nu_2 \cdots \nu_{|\nu|}$ تعریف می‌شود.

با تعریف تابعگر $d : P(E) \to \mathbb{N}$ به‌صورت $d(\mu) = |\mu|$، رسته مسیر $P(E)$ تبدیل به یک ۱ـگراف می‌شود.

مثال ۳: (مقاله [۱۸] را ببینید.) فرض کنید $\Omega_k^0 := \mathbb{N}^k$ و

$$\Omega_k := \{(p,q) : p = (p_i), q = (q_i) \in \mathbb{N}^k, \forall 1 \leqslant i \leqslant k,\ \ p_i \leqslant q_i\}.$$

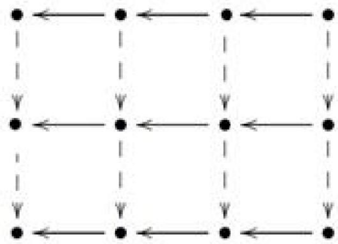
اگر برای هر عضو $(p,q) \in \Omega_k$ نگاشت‌های r، s و d را با ضابطه‌های $s(p,q) = q$، $r(p,q) = p$ و $d(p,q) = q - p$ تعریف کنیم، $\Omega_k = (\Omega_k^0, \Omega_k, r, s)$ یک k-گراف خواهد بود. ترکیب دو عضو آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(p,q)(q,r) = (p,r)$$

به‌طور مشابه برای $m \in \mathbb{N}^k$، k-گراف $\Omega_{k,m}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega^{\circ}_{k,m} := \{p \in \mathbb{N}^k : p \leq m\} \; \Omega_{k,m} := \{(p,q) \in \Omega^{\circ}_{k,m} \times \Omega^{\circ}_{k,m} : p \leq q\}$$

این دو مجموعه به همراه نگاشت‌های d,r,s (که مشابه بالا تعریف می‌شوند)، تشکیل یک k– گراف می‌دهد. به‌عنوان مثال طرح $\Omega_{۲,(۳,۲)}$ به‌صورت زیر است:

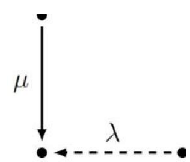


در ادامه به بیان چند نماد رایج برای k– گراف‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴: k–گراف Λ را موضعا محدب گوییم، هرگاه برای هر $v \in \Lambda^{\circ}$، $\lambda \in v\Lambda^{e_i}$ و $\mu \in v\Lambda^{e_j}$ که در آن $i \neq j$ و $۱ \leq i, j \leq k$، مجموعه‌های $s(\lambda)\Lambda^{e_j}$ و $s(\mu)\Lambda^{e_i}$ غیرتهی باشند.

تعریف ۵: فرض کنیم Λ یک k–گراف موضعا محدب است. رأس $v \in \Lambda^{\circ}$ یک چشمه است، هرگاه برای یک $n \in \mathbb{N}^k$، مجموعه $v\Lambda^{\leq n} = \varnothing$ باشد.

مثال ۶: ۲-گراف رسم شده در شکل، موضعا محدب نیست، زیرا مجموعه‌های $s(\mu)\Lambda^{e_۲}$ و $s(\lambda)\Lambda^{e_۱}$ تهی هستند.



برای k– گراف موضعا محدب Λ و $n \in \mathbb{N}^k$، مجموعه $\Lambda^{\leq n}$ را به‌صورت $\{\lambda \in \Lambda : d(\lambda) + e_i \leq n \Rightarrow s(\lambda)\Lambda^{e_i} = \varnothing\}$ تعریف می‌کنیم. k– گراف Λ را سطری-متناهی می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}^k$ و $v \in \Lambda^{\circ}$، $v\Lambda^{\leq n}$ مجموعه‌ای متناهی باشد.

تعریف ۷: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی موضعا محدب است و $m \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^k$. یک تابعگر حافظ درجه $x : \Omega_{k,m} \to \Lambda$ یک مسیر نامتناهی از درجه m

نامیده می‌شود هرگاه، برای هر $p \in \mathbb{N}^k$ و $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ روابط $p \le m$ و $p_i = m_i$ نتیجه دهد $x(p)\Lambda^{e_i} = \varnothing$. درجه مسیر مرزی x با $d(x)$ نشان داده می‌شود. مجموعه مسیرهای مرزی با نماد $\Lambda^{\le\infty}$ و رأس $x(m,m)$ با نماد $x(m)$ نشان داده می‌شوند. برد مسیر مرزی x رأس $r(x) := x(0)$ است. اگر $x \in \Lambda^{\le\infty}$ و $n \le d(x)$، آنگاه یک مسیر مرزی $\sigma^n(x)$ از درجه $d(x)-n$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $p \le q \le d(x)-n$ داشته باشیم

$$\sigma^n(x)(p,q) := x(p+n, q+n).$$

همچنین، برای $\lambda \in \Lambda$، مجموعه $Z(\lambda)$ را به‌صورت $Z(\lambda) = \{x \in \Lambda^{\le\infty} : x(0, d(\lambda)) = \lambda\}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت مجموعه $\{Z(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی $\Lambda^{\le\infty}$ است که در این مقاله $\Lambda^{\le\infty}$ را با این توپولوژی در نظر می‌گیریم[۲۰].

۳-جبرهای کامیان-پسک تجزیه‌پذیر

در این بخش، ابتدا به تعریف جبر کامیان-پسک پرداخته، سپس شرایط تجزیه‌پذیری جبرهای کامیان-پسک را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۸: [۱۳] فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی و موضعا محدب و K یک میدان است. فرض کنید $G_\Lambda = \{\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}$. یک Λ-خانواده کامیان-پسک در جبر A یک تابع به‌صورت $s : \Lambda \cup G(\Lambda) \to A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\{s_v : v \in \Lambda^0\}$ یک خانواده از عناصر خودتوان دوبه‌دو عمود بر هم باشند.

۲) برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ که $r(\mu) = s(\lambda)$ داشته باشیم

$$s_{r(\lambda)} s_\lambda = s_\lambda = s_\lambda s_{s(\lambda)},\ \ s_{s(\lambda)} s_{\lambda^*} = s_{\lambda^*} = s_{\lambda^*} s_{r(\lambda)},\ s_{\mu^*} s_{\lambda^*} = s_{(\lambda\mu)^*},\ s_\lambda s_\mu = s_{\lambda\mu}.$$

۳) برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ که $\lambda, \mu \in \Lambda^{\le n}$ داشته باشیم $s_{\lambda^*} s_\mu = \delta_{\lambda,\mu} s_{s(\lambda)}$.

۴) برای هر $v \in \Lambda^0$ و $n \in \mathbb{N}^k \setminus \{0\}$، $s_v = \sum_{\lambda \in v\Lambda^{\le n}} s_\lambda s_{\lambda^*}$.

جبر کامیان-پسک تولیدشده به‌وسیله Λ با ضرایب در میدان K که با $KP_K(\Lambda)$ نمایش داده می‌شود، یک جبر جامع تولیدشده به‌وسیله یک Λ-خانواده کامیان-پسک $\{s_\lambda, s_{\lambda^*} : \lambda \in \Lambda\}$ است. ویژگی جامع بودن برای جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ بدین معنی است که اگر A یک K-جبر و $\{T_\lambda, T_{\lambda^*}, T_v : v \in \Lambda^0, \lambda \in \Lambda\}$ یک Λ-خانواده کامیان-پسک در جبر A باشد، آنگاه یک K-جبر همریختی $\pi_T : \mathrm{KP}_K(\Lambda) \to A$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\pi_T(s_v)=T_v,\ \ \pi_T(s_\lambda)=T_\lambda,\ \ \pi_T(s_{\lambda^*})=T_{\lambda^*}.$$

وجود این ویژگی جامع برای $KP_K(\Lambda)$ در [۱۲ و ۱۳] بررسی‌شده است.

یادآوری می‌کنیم حلقه R را $\mathbb{Z}^k$–مدرج گوییم هرگاه مجموعه‌ای از زیرگروه‌های جمعی $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R_{n_1}R_{n_2}\subseteq R_{n_1+n_2}$، برای هر $n_1,n_2\in\mathbb{Z}^k$. در این صورت، هر عضو غیرصفر $a\in R$ را می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی و یکتا از عناصر غیرصفر $a_n\in R_n$ نوشت. هر زیرگروه R_n را یک جزء همگن R از درجه n می‌گوییم. اگر R حلقه‌ای مدرج باشد، ایده‌آل I در R را مدرج گوییم هرگاه مجموعه $\{I\cap R_n : n\in\mathbb{Z}^k\}$ یک درجه‌بندی برای I باشد.

تعریف ۹: زیرمجموعه H از Λ° موروثی نامیده می‌شود هرگاه $\lambda\in\Lambda$ و $r(\lambda)\in H$ نتیجه دهد $s(\lambda)\in H$. زیرمجموعه H از Λ° را اشباع می‌گوییم هرگاه برای $v\in\Lambda^\circ$ و $n\in\mathbb{N}^k$ رابطه $s(v\Lambda^{\leq n})\subseteq H$ نتیجه دهد $v\in H$. توجه کنید ویژگی‌های موروثی و اشباع تحت اشتراک بسته هستند. یادآوری می‌کنیم برای یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ°، ایده‌آل I_H به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_H := \operatorname{span}\{s_\mu s_{\lambda^*} : s(\mu)=s(\lambda)\in H\}$$

بنابر [۱۲ و ۱۳]، I_H یک ایده‌آل مدرج در $KP_K(\Lambda)$ است.

تذکر ۱۰: در این مقاله منظور از ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$، ایده‌آلی دوطرفه است.

تعریف ۱۱: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی موضعا محدب و H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° است. بنا به قضیه ۵.۲ در [۲۱]، $\Lambda\setminus H=(\Lambda^\circ\setminus H,\{\lambda\in\Lambda : s(\lambda)\notin H\},r,s)$ نیز یک k–گراف سطری-متناهی موضعا محدب است که به آن k–گراف خارج قسمتی گفته می‌شود.

تعریف ۱۲: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی و موضعا محدب است. Λ را غیر دوره‌ای گوییم هرگاه برای هر $v\in\Lambda^\circ$ یک مسیر مرزی $x\in v\Lambda^{\leq\infty}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\mu\neq v\in\Lambda$ داشته باشیم $\mu x\neq vx$. همچنین k–گراف Λ را به‌طور قوی غیر دوره‌ای است هرگاه برای هر زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ°، $\Lambda\setminus H$ غیر دوره‌ای باشد.

قضیه زیر که در [۱۳] ثابت‌شده است برای محاسبات ما در این مقاله بسیار کلیدی است.

قضیه ۱۳: فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی موضعا محدب و K یک میدان است. آنگاه هر ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$ مدرج است اگر و تنها اگر Λ به‌طور قوی غیر دوره‌ای باشد. در این صورت هر ایده‌آل در جبر $KP_K(\Lambda)$ به شکل I_H برای یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ° خواهد بود.

حال قضیه اصلی این بخش را اثبات می‌کنیم. در این قضیه، جبرهای کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر مشخصه‌سازی می‌شوند.

قضیه ۱۴: فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای و K یک میدان باشد. جبر کامیان- پسک $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر

۱) زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع غیرتهی X و Y در Λ° وجود دارند به‌طوری‌که $X \cap Y = \varnothing$،

۲) برای هر $\nu \in \Lambda^{\circ} \setminus (X \cup Y)$ یک $n \in \mathbb{N}^k$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $s(\nu\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$.

برهان. ابتدا فرض کنیم مجموعه‌های موروثی و اشباع X و Y با ویژگی بیان‌شده وجود داشته باشند. نشان می‌دهیم $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است. دو ایده‌آل مدرج I_X و I_Y را در نظر می‌گیریم. چون $X \cap Y = \varnothing$، داریم $I_X \cap I_Y = I_{X \cap Y} = \{0\}$. قرار می‌دهیم $I = I_X \oplus I_Y$. ادعا می‌کنیم $I = KP_K(\Lambda)$. بدیهی است که I ایده‌آلی دوطرفه در $KP_K(\Lambda)$ است و $I \subseteq KP_K(\Lambda)$. واضح است اگر $\nu \in X \cup Y$ آنگاه $s_\nu \in I$. پس برای عکس شمول، کافی است نشان دهیم برای هر $\nu \in \Lambda^{\circ} \setminus (X \cup Y)$، $s_\nu \in I$. اگر $\nu \in \Lambda^{\circ} \setminus (X \cup Y)$، بنا به فرض $n \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد به‌طوری‌که $s(\nu\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$. لذا برای هر $\mu \in \nu\Lambda^{\leq n}$ داریم $s(\mu) \in X \cup Y$ و $s_{s(\mu)} \in I$. پس بنا بر ویژگی ۴ در تعریف ۸ خواهیم داشت:

$$s_\nu = \sum_{\mu \in \nu\Lambda^{\leq n}} s_\mu s_{\mu^*} = \sum_{\mu \in \nu\Lambda^{\leq n}} s_\mu s_{s(\mu)} s_{\mu^*} \in I$$

و نتیجه می‌شود $I = I_X \oplus I_Y = KP_K(\Lambda)$.

برعکس، فرض کنیم جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است. پس ایده‌آل‌های I و J در جبر $KP_K(\Lambda)$ وجود دارند به‌طوری‌که $KP_K(\Lambda) = I \oplus J$. چون Λ به‌طور قوی غیر دوره‌ای است، بنا بر قضیه ۱۳، هر ایده‌آل آن یک ایده‌آل مدرج است. پس $I = I_X$ و $J = J_Y$ که X و

Y زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° هستند. توجه کنید از اینکه $I_X \cap I_Y = \{\circ\}$ داریم $X \cap Y = \varnothing$. حال فرض کنیم $v \in \Lambda^\circ \setminus (X \cup Y)$. چون $\overline{X \cup Y} = \Lambda^\circ$ (که منظور از $\overline{X \cup Y}$، زیرمجموعه موروثی و اشباع تولیدشده به‌وسیله $X \cup Y$ است) پس با توجه به اینکه $v \notin X \cup Y$ ولی $v \in \overline{X \cup Y}$ و طبق تعریف مجموعه اشباع، $n \in \mathbb{N}^k$ای وجود دارد که $s(v\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$. پس X و Y در شرایط قضیه صدق می‌کنند.■

از قضیه ۱۴ نتایج زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۱۵: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است و K یک میدان است. اگر $KP_K(\Lambda)$ یک‌دار باشد، آنگاه زیرگراف‌های $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ از Λ وجود دارند به‌طوری‌که $KP_K(\Lambda) \cong \oplus_{i=1}^n KP_K(\Lambda_i)$ و هر یک از جبرهای $KP_K(\Lambda_i)$ تجزیه‌ناپذیر است. علاوه بر این، این تجزیه یکتاست.

برهان. اگر جبر $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌ناپذیر باشد، اثبات تمام است. پس فرض کنیم جبر $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر باشد. بنا به قضیه ۱۴، زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع X و Y در Λ° وجود دارند به‌طوری‌که $KP_K(\Lambda) = I_X \oplus I_Y$. پس با توجه به ساختار مربوط به k–گراف‌های خارج قسمتی داریم:

$$I_X \cong \frac{KP_K(\Lambda)}{I_Y} \cong KP_K(\Lambda \setminus Y)$$

$$I_Y \cong \frac{KP_K(\Lambda)}{I_X} \cong KP_K(\Lambda \setminus X)$$

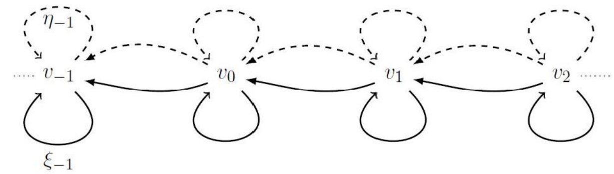
چون $KP_K(\Lambda)$ یک‌دار است، تعداد اعضا Λ° متناهی است. (می‌دانیم جبر $KP_K(\Lambda)$ دارای همانی تقریبی است که به‌صورت مجموعه‌ای از مجموع‌های متناهی از رأس‌های آن است؛ بنابراین وقتی دارای عضو همانی است تعداد رأس‌های آن متناهی است.) اما X و Yغیر تهی بوده و $|\Lambda^\circ \setminus X| < |\Lambda^\circ|$ و $|\Lambda^\circ \setminus Y| < |\Lambda^\circ|$؛ بنابراین حداکثر به‌اندازه $|\Lambda^\circ|$ می‌توان مراحل تجزیه را تکرار کرد و تجزیه‌ای متناهی حاصل می‌شود. به این نکته توجه کنیم که ایده‌آل‌های تولیدشده در هر مرحله از تجزیه، با یک جبر کامیان-پسک یکریخت هستند؛ بنابراین ایده‌آل‌های حاضر در تجزیه دارای همانی موضعی هستند و این مطلب بدین معنی است که اگر I ایده‌آلی در J و J ایده‌آلی در جبر $KP_K(\Lambda)$ باشد، آنگاه I نیز ایده‌آلی در جبر $KP_K(\Lambda)$ است. به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اکنون به اثبات بخش دوم قضیه، یعنی اثبات یکتایی تجزیه، می‌پردازیم؛ بنابراین فرض کنیم $\oplus_{i=1}^{i=n} KP_K(\Lambda_i)$ و $\oplus_{i=1}^{i=m} KP_K(\Lambda_i^{'})$ دو تجزیه برای جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ باشند. لذا یک یکریختی جبری $\varphi: \oplus_{i=1}^{i=n} KP_K(\Lambda_i) \to \oplus_{i=1}^{i=m} KP_K(\Lambda_i^{'})$ وجود دارد. فرض کنید $I_i = \varphi(KP_K(\Lambda_i))$. چون φ یکریختی است، I_iها ایده‌آل‌هایی در جبر $\oplus_{i=1}^{i=m} KP_K(\Lambda_i^{'})$ می‌باشند که $\oplus_{i=1}^{i=n} I_i = \oplus_{i=1}^{i=m} KP_K(\Lambda_i^{'})$. اکنون به‌راحتی با استفاده از لم ۳.۸ در [۲۲] می‌توان نتیجه گرفت $m=n$ و یک جایگشت σ روی مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_i = \varphi(KP_K(\Lambda_i)) \cong KP_K(\Lambda^{'}_{\sigma(i)})$ داریم $1 \le i \le n$ بنابراین برای هر $I_i = KP_K(\Lambda^{'}_{\sigma(i)})$؛ و نتیجه می‌گیریم این تجزیه یکتاست. ■

نتیجه ۱۶: فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است و K یک میدان است. اگر $KP_K(\Lambda)$ یک حلقه نوتری دوطرفه و یا آرتینی دوطرفه باشد، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت حاصل جمع مستقیم متناهی از جبرهای کامیان-پسک تجزیه‌ناپذیر نوشت.

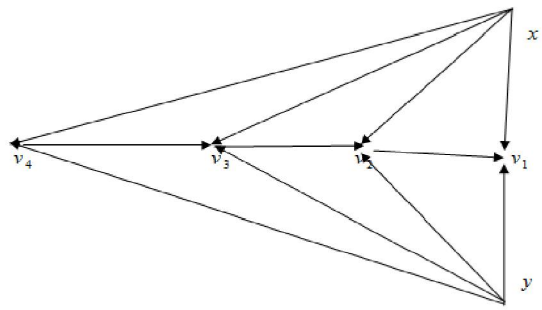
برهان. اگر جبر $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌ناپذیر باشد، اثبات تمام است. پس فرض کنیم جبر $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر باشد. طبق قضیه ۱۴، زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع X و Y در Λ^{0} وجود دارند که $I_1 \cong KP_K(\Lambda \setminus X)$ و $I_2 \cong KP_K(\Lambda \setminus Y)$ و $KP_K(\Lambda) = I_1 \oplus I_2$. اگر ایده‌آل‌های I_1 و I_2 تجزیه‌پذیر نباشند، اثبات تمام می‌شود. حال فرض کنیم I_2 تجزیه‌پذیر باشد؛ بنابراین ایده‌آل‌های غیر بدیهی I_3 و I_4 در $KP_K(\Lambda)$ وجود دارند به‌طوری‌که $I_2 = I_3 \oplus I_4$. چون جبرهای کامیان-پسک دارای همانی موضعی هستند، I_3 و I_4 ایده‌آل‌هایی در جبر $KP_K(\Lambda)$ نیز می‌باشند؛ بنابراین $KP_K(\Lambda) = I_1 \oplus I_3 \oplus I_4$. اگر این تجزیه به همین ترتیب ادامه پیدا کند، یعنی $I_4 = I_5 \oplus I_6$. آنگاه یک زنجیر نامتناهی صعودی $\ldots \subset I_1 \oplus I_3 \oplus I_5 \subset I_1 \oplus I_3 \subset I_1$ در جبر $KP_K(\Lambda)$ حاصل می‌شود که با فرض نوتری بودن $KP_K(\Lambda)$ تناقض دارد؛ بنابراین پس از تعداد متناهی مرحله، یک تجزیه با جمع‌وندهای تجزیه‌ناپذیر برای $KP_K(\Lambda)$ حاصل می‌شود. همچنین اگر جبر $KP_K(\Lambda)$ را آرتینی در نظر بگیریم، اگر تجزیه $KP_K(\Lambda)$ به‌صورت بالا ادامه پیدا کند، یک زنجیر نامتناهی نزولی به‌صورت $KP_K(\Lambda) \supset I_2 \supset I_4 \supset \cdots$ حاصل می‌شود که با فرض آرتینی بودن جبر $KP_K(\Lambda)$ تناقض دارد؛ بنابراین، یک تجزیه متناهی برای $KP_K(\Lambda)$ به دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود.■

مثال ۱۷: ۲-گراف Λ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



تمامی زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع Λ° به‌صورت $H_i = \{v_j : j \geq i\}$ می‌باشند. چون همه H_iها باهم اشتراک ناتهی دارند، بنابر قضیه ۱۴، جبر کامیان-پسک نظیر آن تجزیه‌ناپذیر است.

مثال ۱۸: ۱-گراف Λ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



به‌راحتی می‌بینیم که $H_1 = \{x\}$ و $H_2 = \{y\}$ تنها زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° هستند که اشتراکشان تهی است و برای هر رأسی که در $\{x,y\}$ نباشد مانند v_i، $\mu \in \Lambda$ وجود دارد به‌طوری‌که از x یا y شروع‌شده و به v_i ختم می‌شود. پس جبر کامیان-پسک نظیر آن به‌صورت $KP_K(\Lambda) = I_{H_1} \oplus I_{H_2}$ تجزیه‌پذیر است.

۴- C^*–جبرهای تجزیه‌پذیر $C^*(\Lambda)$

در این بخش ابتدا به معرفی C^*–جبرهای k–گرافی می‌پردازیم. سپس تجزیه‌پذیری آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱۹: [۲۳] فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی و موضعا محدب است. یک Λ–خانواده کانتز-کریگر در یک C^*–جبر B، یک خانواده از یک متری‌های جزئی $s = \{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ در B هستند به‌طوری‌که:

۱) $\{s_v : v \in \Lambda^\circ\}$ مجموعه‌ای از تصویرهای دوبه‌دو عمود بر هم باشند،

۲) اگر $s(\lambda) = r(\mu)$، آنگاه $s_\lambda s_\mu = s_{\lambda\mu}$،

۳) برای هر $\lambda \in \Lambda$، $s_\lambda^* s_\lambda = s_{s(\lambda)}$،

۴) برای هر $v \in \Lambda^\circ$ و $n \in \mathbb{N}^k$ داشته باشیم: $s_v = \sum_{\lambda \in v\Lambda^{\leq n}} s_\lambda s_\lambda^*$

برای k-گراف سطری-متناهی (Λ, d)، $C^*(\Lambda)$ به‌صورت C^*-جبر تولیدشده به‌وسیله یک Λ-خانواده کانتز-کریگرجامع $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تعریف می‌گردد. بدین معنی که برای هر Λ-خانواده کانتز-کریگر $\{t_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک *-همریختی $\pi: C^*(\Lambda) \to C^*(\{t_\lambda\})$ وجود دارد به‌طوری‌که $\pi(s_\lambda) = t_\lambda$ برای هر $\lambda \in \Lambda$.

مثال ۲۰: فرض کنید E یک گراف جهت‌دار سطری-متناهی است. آنگاه مشابه با مثال ۲ در بخش ۲، مجموعه همه مسیرهای E یعنی $P(E)$ یک ۱-گراف سطری-متناهی است. در این صورت، C^*-جبر گرافی $C^*(E)$ با $C^*(P(E))$ یکریخت است ([۱۵] را ببینید).

تعریف ۲۱: فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی است. اگر H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع Λ° باشد، ایده‌آل دوطرفه I_H تولیدشده به‌وسیله مجموعه $\{s_v : v \in H\}$ در $C^*(\Lambda)$ را با I_H نمایش می‌دهیم. همچنین ایده‌آل I_H به‌صورت زیراست:

$$I_H := \overline{\operatorname{span}}\{s_\mu s_\lambda{}^* : s(\mu) = s(\lambda) \in H\}$$

قضیه ۲۲: [۲۱] فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است. در این صورت یک یکریختی بین مشبکه زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° و ایده‌آل‌های بسته $C^*(\Lambda)$ وجود دارد. به‌عبارت‌دیگر، هر ایده‌آل بسته $C^*(\Lambda)$ به فرم I_H است که در آن H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° است.

لم ۲۳: فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است. اگر I_1 و I_2 دو ایده‌آل غیرصفر و بسته در $C^*(\Lambda)$ باشند به‌طوری‌که $C^*(\Lambda) = I_1 \oplus I_2$، آنگاه زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع X و Y در Λ° وجود دارند به‌طوری‌که $X \cap Y = \varnothing$ و $I_1 = I_X$ و $I_2 = I_Y$. علاوه بر این $C^*(\Lambda)$ به‌صورت جمع مستقیم دو C^*-جبر k-گرافی $C^*(\Lambda \setminus X)$ و $C^*(\Lambda \setminus Y)$ است.

برهان. چون Λ به‌طور قوی غیر دوره‌ای است، پس بنا بر قضیه ۲۲، هر ایده‌آل بسته $C^*(\Lambda)$ به شکل I_H است؛ بنابراین زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع X و Y در Λ° وجود دارند به‌طوری‌که $I_1 = I_X$ و $I_2 = I_Y$. ازآنجاکه $I_{X \cap Y} = I_X \cap I_Y = \{0\}$ نتیجه می‌گیریم $X \cap Y = \varnothing$؛ بنابراین طبق قضیه ۵٫۲ در [۲۱] و از اینکه $C^*(\Lambda) = I_1 \oplus I_2$ خواهیم داشت:

$$I_X \cong \frac{C^*(\Lambda)}{I_Y} \cong C^*(\Lambda \setminus Y)$$

$$I_Y \cong \frac{C^*(\Lambda)}{I_X} \cong C^*(\Lambda \setminus X)$$

درنتیجه $C^*(\Lambda) = C^*(\Lambda \setminus X) \oplus C^*(\Lambda \setminus Y)$ و اثبات کامل می‌شود.■

قضیه ۲۴: فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری- متناهی، موضعا محدب و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است. آنگاه $C^*(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر دو زیرمجموعه ناتهی موروثی و اشباع X و Y در Λ° وجود داشته باشد به‌طوری‌که

۱. $X \cap Y = \varnothing$

۲. برای هر $v \in \Lambda^\circ \setminus (X \cup Y)$، $n \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد به‌طوری‌که $s(v\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$.

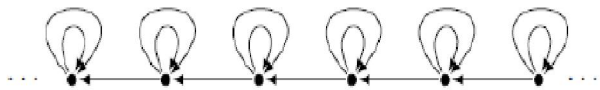
برهان. ابتدا فرض کنیم $C^*(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است. بنا بر لم قبل، دو زیرمجموعه موروثی و اشباع X و Y در Λ° وجود دارد به‌طوری‌که $X \cap Y = \varnothing$ و $C^*(\Lambda) = I_X \oplus I_Y$. پس شرط (۱) برقرار است. اکنون فرض کنیم $v \in \Lambda^\circ \setminus (X \cup Y)$. ازآنجایی‌که $\overline{X \cup Y} = \Lambda^\circ$، طبق تعریف مجموعه اشباع، عدد $n \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد به‌طوری‌که $s(v\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$، لذا شرط (۲) نیز برقرار است.

برعکس، فرض کنیم X و Y دو زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° هستند که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم $C^*(\Lambda) = I_X \oplus I_Y$. واضح است که $I_X \cap I_Y = I_{X \cap Y} = I_\varnothing = \{0\}$. حال نشان می‌دهیم $C^*(\Lambda) = I_X + I_Y$. چون $C^*(\Lambda)$ به‌وسیله $\{s_v : v \in \Lambda^\circ\}$ تولید می‌شود، برای این منظور کافی است برای هر $v \in \Lambda^\circ$ نشان دهیم $s_v \in I_X + I_Y$. بدیهی است که اگر $v \in X \cup Y$، آنگاه $s_v \in I_X + I_Y$؛ بنابراین، این مطلب را برای هر $v \in \Lambda^\circ \setminus (X \cup Y)$ بررسی می‌کنیم. طبق فرض، $n \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد که $s(v\Lambda^{\leq n}) \subseteq X \cup Y$. پس برای هر $\lambda \in v\Lambda^{\leq n}$ داریم $s_\lambda s_\lambda{}^* = s_\lambda s_{s(\lambda)} s_\lambda{}^* \in I_X + I_Y$ و بنابر ویژگی (۴) در تعریف ۱۹ خواهیم داشت:

$$s_v = \sum_{\lambda \in v\Lambda^{\leq n}} s_\lambda s_\lambda{}^* \in I_{X \cup Y} = I_X + I_Y$$

درنتیجه $C^*(\Lambda) = I_X + I_Y$ و اثبات کامل می‌شود. ■

مثال ۲۵: ۱-گراف Λ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



با توجه به اینکه Λ دارای زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع مجزا نیست، پس بنا به قضیه قبل $C^*(\Lambda)$ یک C^*–جبر تجزیه‌ناپذیر است.

۵-تجزیه‌پذیری به کمک جبر استنبرگ

در این بخش، شرایط تجزیه‌پذیری جبرهای کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ در بخش ۳ را در نظر گرفته و آن را به کمک گروه‌وار G_Λ از Λ مشخصه‌سازی می‌کنیم.

در این بخش به دلیل استفاده از قضایای مراجع [۱۹ و ۲۰]، k–گراف‌ها را بدون چشمه در نظر می‌گیریم. هرچند می‌توان با اندکی تغییر، این نتایج را برای k–گراف‌های با چشمه نیز بیان کرد. قبل از بیان نتایج اصلی، تعریف گروه‌وار و جبر استنبرگ مربوط به آن را یادآوری کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را ذکر می‌کنیم. برای جزییات بیشتر می‌توانید به مراجع [۱۹ و ۲۰] رجوع کنید.

تعریف ۲۶: [۲۰] یک گروه‌وار G حالت کلی‌تری از یک گروه است که عمل دوتایی روی آن به‌طور جزئی تعریف‌شده است. فضای یکه G با $G^{(0)}$ نشان داده‌شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G^{(0)} := \{\gamma\gamma^{-1} : \gamma \in G\} = \{\gamma^{-1}\gamma : \gamma \in G\}$$

نگاشت‌های دامنه و برد $r, s : G \to G^{(0)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma, r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$$

یک گروه‌وار توپولوژیک، گروه‌واری است که به یک توپولوژی مجهز شده و همچنین نگاشت‌های ترکیب و وارون روی آن پیوسته هستند. زیرمجموعه باز B در یک گروه‌وار، دوبخشی باز نامیده می‌شود، هرگاه تحدید نگاشت‌های s و r روی B، همریختی‌های پوشا به یک زیرمجموعه باز $G^{(0)}$ باشند. همچنین گروه‌وار توپولوژیک G افرا نامیده می‌شود هرگاه یک پایه برای یک توپولوژی شامل دو بخشی‌های جزئی برای آن وجود داشته باشد.

تعریف ۲۷: فرض کنیم G یک گروه‌وار افرا و K یک میدان باشد. به ازا هر زیرمجموعه دوبخشی B در G، تابع مشخصه $1_B : G \to K$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، جبر استنبرگ $A_K(G)$ به‌صورت k–جبر تولیدشده به‌وسیله 1_Bها تعریف می‌شود.

جمع و ضرب اسکالر در $A_K(G)$ به‌صورت نقطه‌ای تعریف می‌شوند. اگر $f,g\in A_K(G)$ و $\gamma\in G$ باشد، ضرب روی $A_K(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f*g(\gamma)=\sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta)$$

برای مجموعه‌های دوبخشی باز B و D، پیچش از رابطه $1_B 1_D = 1_{BD}$ حاصل می‌شود.

حال فرض کنیم Λ یک k–گراف سطری-متناهی بدون چشمه باشد. گروه‌وار G_Λ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم[۲۰]:

$$G_\Lambda := \{(x,l,y)\in \Lambda^\infty \times \mathbb{Z}^k \times \Lambda^\infty : \exists m,n\in \mathbb{N}^k, l=m-n, \sigma^m(x)=\sigma^n(x)\}$$

نگاشت‌های ترکیب و وارون به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(x,l,y)(y,m,z)=(x,l+m,z),\ (x,l,y)^{-1}=(y,-l,x)$$

برای هر $\mu,\nu\in\Lambda$ که $s(\mu)=s(\nu)$ مجموعه $Z(\mu,\nu)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(\mu z, d(\mu)-d(\nu), \nu z) : z\in Z(s(\mu))\}.$$

بدیهی است که مجموعه $\{Z(\mu,\nu):\mu,\nu\in\Lambda, s(\mu)=s(\nu)\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی G_Λ است. با این توپولوژی، G_Λ یک گروه‌وار هاسدورف افرا است. در این بخش، G_Λ را با این توپولوژی در نظر می‌گیریم. فضای یکه $G_\Lambda^{(0)}$ مجموعه $\{(x,0,x):x\in\Lambda^\infty\}$ است که با Λ^∞ متناظر است. $Z(\mu,\mu)$ را به‌اختصار با $Z(\mu)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۸: [۱۴] فرض کنیم K یک میدان باشد. جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ با جبر استنبرگ $A_K(G_\Lambda)$ یکریخت است.

تعریف ۲۹: متناظر با زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ^0، مجموعه باز و پایای U_H به‌صورت مجموعه مسیرهای مرزی $x\in\Lambda^\infty$ که برای یک $n\in\mathbb{N}^k$ نسبتاً بزرگ $x(n)\in H$، تعریف می‌شود.

قضیه ۳۰: فرض کنیم K یک میدان و Λ یک k–گراف سطری-متناهی، موضعا محدب، بدون چشمه و به‌طور قوی غیر دوره‌ای است. آنگاه موارد زیر معادل‌اند:

۱. $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است.

۲. ایده‌آل‌های مدرج I_{H_1} و I_{H_2} وجود دارند به‌طوری‌که $KP_K(\Lambda)=I_{H_1}\oplus I_{H_2}$.

۳. زیرمجموعه‌های پایای باز و بسته غیرتهی U و V در $G_{\Lambda}^{(\circ)}$ وجود دارند که $A_K(G_{\Lambda}) = I(U) \oplus I(V)$. که در آن

$$I(U) = \{f \in A_K(G_{\Lambda}) : \operatorname{supp} f \subseteq G_U\}$$

۴. زیرمجموعه اشباع و موروثی H در Λ° وجود دارد به‌طوری‌که اگر $x \in \Lambda^{\infty}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}^k$، $x(n) \in \Lambda^{\circ} \setminus H$ آنگاه $p \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد که $\{\mu \in \Lambda : s(\mu) \in H, r(\mu) = x(p)\} = \varnothing$.

۵. یک زیرمجموعه باز و بسته غیرتهی پایا U در $G_{\Lambda}^{(\circ)}$ وجود دارد.

برهان. ۲ $\Rightarrow$ ۱: چون جبر $KP_K(\Lambda)$ تجزیه‌پذیر است، ایده‌آل‌های غیرصفر I_1 و I_2 در وجود دارد به‌طوری‌که $KP_K(\Lambda) = I_1 \oplus I_2$. چون Λ به‌طور قوی غیر دوره‌ای است پس بنا به قضیه ۱۳، هر ایده‌آل آن‌یک ایده‌آل مدرج است؛ بنابراین زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع H_1 و H_2 در Λ° وجود دارند که $I_{H_1} = I_1$ و $I_{H_2} = I_2$.

۳ $\Rightarrow$ ۲: متناظر با زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع H_1 و H_2 در Λ°، زیرمجموعه‌های باز پایای U_{H_1} و U_{H_2} در $G_{\Lambda}^{(\circ)}$ وجود دارند. چون Λ به‌طور قوی غیر دوره‌ای است، بنا به نتیجه ۶.۵ در [۲۰]، G_{Λ} به‌طور قوی مؤثر می‌شود. در این حالت طبق قضیه ۳,۱ در [۲۰] تناظری دو سویی بین ایده‌آل‌های $I(U)$ در جبر استنبرگ $A_K(G_{\Lambda})$ و زیرمجموعه‌های باز پایای U در $G_{\Lambda}^{(\circ)}$ وجود دارد؛ بنابراین ایده‌آل‌های $I(U_{H_1})$ و $I(U_{H_2})$ در جبر $A_K(G_{\Lambda})$ به ترتیب با ایده‌آل‌های I_{H_1} و I_{H_2} در جبر $KP_K(\Lambda)$ متناظر می‌شوند. پس با توجه به وجود یکریختی بین $A_K(G_{\Lambda})$ و $KP_K(\Lambda)$ خواهیم داشت $A_K(G_{\Lambda}) = I(U_{H_1}) \oplus I(U_{H_2})$.

۵ $\Rightarrow$ ۳: بدیهی است.

۳ $\Rightarrow$ ۵: فرض کنیم U مجموعه‌ای باز باشد که در شرط (۵) صدق می‌کند. نشان می‌دهیم تجزیه‌ای به‌صورت $I(U) \oplus I(G_{\Lambda}^{(\circ)} \setminus U)$ برای $A_K(G_{\Lambda})$ وجود دارد. برای این منظور $f \in A_K(G_{\Lambda})$ را در نظر گرفته و f_1 و f_2 را به این صورت تعریف می‌کنیم: برای γهایی که $s(\gamma) \in U$ است، $f_1(\gamma) = f(\gamma)$ و $f_2(\gamma) = \circ$. همچنین برای γهایی که $s(\gamma) \in G_{\Lambda}^{(\circ)} \setminus U$ است، $f_1(\gamma) = \circ$ و $f_2(\gamma) = f(\gamma)$. ازآنجاکه U و $G_{\Lambda}^{(\circ)} \setminus U$ هر دو باز و بسته‌اند،

$f_۱,f_۲ \in A_K(G_\Lambda)$. همچنین بنا به تعریف، $f_۱ \in I(U)$ و $f = f_۱ + f_۲$. واضح است $f_۲ \in I(G_\Lambda^{(۰)} \setminus U)$. به‌این‌ترتیب نتیجه موردنظر حاصل می‌شود.

۵ $\Rightarrow$ ۴: مجموعه $U_H \subseteq G_\Lambda^{(۰)}$ را در نظر می‌گیریم. U_H زیرمجموعه باز پایا در $G_\Lambda^{(۰)}$ است. نشان می‌دهیم U_H بسته است. فرض کنیم $(x_n) \subseteq U_H$ دنباله‌ای همگرا در U_H باشد که $x_n \to z$. ادعا می‌کنیم $z \in U_H$. اگر برای یک $m \in \mathbb{N}^k$، $z(m) \in H$ باشد، در این صورت بنا به تعریف U_H، $z \in U_H$. حال فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}^k$، $z(n) \in \Lambda^۰ \setminus H$. بنا به فرض (۴)، یک $p \in \mathbb{N}^k$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{\mu \in \Lambda \ : s(\mu) \in H, r(\mu) = x(p)\} = \varnothing$. مجموعه باز $Z(z(۰,m))$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است $z \in Z(z(۰,m))$. در این صورت بنا به تعریف حد یک دنباله‌داریم $(x_n) \subseteq Z(z(۰,m))$. همچنین $Z(z(۰,m)) \cap U_H = \varnothing$ و این تناقض است؛ بنابراین $z \in U_H$.

۴ $\Rightarrow$ ۵: فرض کنیم U یک زیرمجموعه باز و بسته غیرتهی پایا در $G_\Lambda^{(۰)}$ است. زیرمجموعه H در $\Lambda^۰$ را به‌صورت $H = H_U := \{v \in \Lambda^۰ : Z(v) \subseteq U_H\}$ در نظر می‌گیریم. $x \in \Lambda^\infty$ را با شرط $x(n) \subseteq \Lambda^۰ \setminus H$ در نظر می‌گیریم. فرض خلف کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N}^k$، $\{\mu \in \Lambda \ : s(\mu) \in H, r(\mu) = x(n)\} \neq \varnothing$؛ بنابراین برای هر $n_i = (i,\ldots,i) \in \mathbb{N}^k$، مسیر $\mu_{n_i} \in \{\mu \in \Lambda \ : s(\mu) \in H, r(\mu) = x(n_i)\}$ وجود دارد. حال دنباله $\{y_{n_i}\}_{n_i=۱}^{\infty}$ را به‌صورت $y_{n_i} = x(۰,n_i)\mu_{n_i} z_i$ (که در آن $z_i \in \Lambda^\infty$ و $r(z_i) = x(\mu_{n_i})$ است) در نظر می‌گیریم. بدیهی است $\{y_{n_i}\}_{n_i=۱}^{\infty} \subseteq U$. حال از اینکه این دنباله به x همگراست و $x \notin U$، این مطلب با بسته بودن U تناقض دارد.■

تشکر و قدردانی

نتایج اصلی این مقاله از رساله دکتری نویسنده اول تحت راهنمایی نویسنده دوم گرفته شده است.

منابع

[1] Kumjian, A., Pask, D. and Raeburn, I. (1998). Cuntz-Krieger algebras of directed graphs, *Pacific Journal of Mathematics,* **184**, 161-174.

[2] Fowler, M. L. N. J. and Raeburn, I. (2000). The C^*-algebras of infinite graphs, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8**, 2319-2327.

[3] Hong, J. H. Decomposability of graph C^*-algebras. (2004). *Proceedings of the American Mathematical Society*, **133**(1), 115-126.

[4] Drinen, D. and Tomforde, M. (2005). The C^*-algebras of arbitrary graphs, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **35**(1) 105-135.

[5] Bates, T., Pask, D., Raeburn, I. and Szymanski, W. (2000). The C^*-algebras of row-finite graphs, *New York Journal of Mathematics*, **6**, 307-324.

[6] Abrams, G. and Aranda Pino, G. (2005). The Leavitt path algebras of a graph, *Journal of Algebra*, **293**, 319-334.

[7] Abrams, G. and Aranda Pino, G. (2008). The Leavitt path algebras of arbitrary graphs, *Huston Journal of Mathematics*, **34**, 323-442.

[8] Robertson, G. and Steger, T. (1999). Affine buildings, titing systems and higher rank Cuntz- Krieger algebras, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **513**, 115-144.

[9] Robertson, G. and Steger, T. (2001). Asymptotic K-theory for groups acting on $\widetilde{A}$ buildings, *Canadian Journal of Mathematics*, **53**, 809-833.

[10] Kumjian, A. and Pask, D. (2000). Higher rank graph C^*-algebras, *New York Journal of Mathematics*, **6**, 1-20.

[11] Sims. And Aidan. (2006). Relative Cuntz- Krieger algebras of finitely aligned higher-rank graphs, *Indiana University. Mathematics. Journal,* **55**(2), 849-868.

[12] Aranda Pino, G., Clark, J., Huef, A. and Raeburn, I. (2013). Kumjian-Pask algebras of higher rank graphs, *Transactions of the American Mathematical Society*, **365**, 3613-3641.

[13] Clark, L. O., Flynn and, C. and Huef, A. (2014). Kumjian-Pask algebras of locally convex higher-rank graphs, *Journal of Algebra*, **399**, 445-474.

[14] Clark, L. O. and Pangalela, Y. E. (2015). Kumjian-Pask algebras of finitely- aligned higher- rank graphs, preprint arXiv: 1512.06547.

[15] Kashoul- Radjabzadeh, M., Larki, H. and Aminpour, A. (2017). Prime and primitive Kumjian-Pask algebras, *J. Algebra Appl*, **16**(8), 1750169-1750182.

[16] Larki, H. (2018). Primitive ideal space of higher-rank graph C^*-algebras and decomposability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* in preparation.

[17] Larki, H. (2017). Purely infinite simple Kumjian-Pask algebras, *Forum Mathematicum*, **30**(1), 253-268.

[18] Aranda Pino, G. and Nasr-Isfahani, A. (2015). Decomposable Leavitt path algebras for arbitrary graphs, *Forum Mathematicum*, **27**, 3509-3532.

[19] Clark, L. O., Barquero, D. M., Gonzalez, C. M. and Molina, M. S. (2016). Using Steinberg algebras to study decomposability of Leavitt path algebras, arXiv: 1603.01033v1. Preprint Math 2016.

[20] Clark, L. O., Edie- Michell, C., an Huef, A. and Sims, A. Ideals of Steinberg algebras of strongly effective groupoids, with applications to Leavitt path algebras. arXiv: 1601.07238v1.

[21] Raeburn, I., Sims, A. and Yeend, T. (2003). Higher rank graphs and their C^*-algebras, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **46**, 99-115.

[22] Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag New York. Inc.

[23] Robertson, D. and Sims, A. (2009). Simplicity of C^*-algebras associated to row-finite locally convex higher-rank graphs, *Israel Journal of Mathematics,* **172**, 171-192.

On the Decomposable C^*–Algebras and Kumjian-Pask Algebras

Maryam Kashoul-Radjabzadeh and Hossein Larki

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Let Λ be a row-finite k-graph and K a field. In this paper, we investigate decomposability of the Kumjian-Pask algebra $KP_K(\Lambda)$ and the C^*–algebra $C^*(\Lambda)$ associated to Λ. In particular, we give equivalent condition on Λ and its groupoid G_Λ for the decomposability. Moreover, we propose certain condition under that $KP_K(\Lambda)$ is a direct sum of indecomposable Kumjian-Pask algebras.

Keywords: Kumjian-Pask algebra, C^*–algebra, Steinberg algebra, k-graph, decomposability.

Mathematics Subject Classification (2010): 46L05, 16W50.