

## روش عددی برای حل یک کلاس از مسئله کنترل بهینه کسری دوبعدی با کمک ماتریس های عملیاتی چندجمله ای لژاندر

یاسر نورعلی زاده اطاقسرا، محمود بهروزی فر<sup>۱</sup>، محسن علیپور

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل.

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۲۸

**چکیده:** در این مقاله، یک روش برای حل یک کلاس از مسئله کنترل بهینه کسری دوبعدی<sup>۲</sup> با استفاده از ماتریس های عملیاتی چندجمله ای لژاندر ارائه می دهیم. لازم به ذکر است که دستگاه دینامیکی مسئله بر اساس مشتق جزئی کسری کاپوتو است. در روش موردنظر، انتگرال دوگانه توسط قاعده گاوس لژاندر دوبعدی تقریب زده می شود و سپس با کمک معادله لاگرانژین یک دستگاه معادلات غیرخطی به دست می آید. این دستگاه معادلات غیرخطی با کمک روش تکراری نیوتن حل و ضرایب مجهول تعیین می گردد. در انتها، روش ارائه شده را بر روی یک مسئله کسری با درجه مشتقات کسری متفاوت پیاده سازی می نماییم. همچنین پیچیدگی محاسباتی روش نیز ارائه شده است. قابل توجه است که تمامی محاسبات با کمک نرم افزار متمتیکا<sup>۳</sup> انجام شده است.

**واژه های کلیدی:** مشتق جزئی کسری کاپوتو، چندجمله ای لژاندر، ماتریس عملیاتی، قاعده انتگرال گیری گاوس-لژاندر.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): 65-XX, 49-XX, 33C45

### ۱- مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به دلیل وجود تعاریف متفاوت برای مشتق و انتگرال کسری و نداشتن تعبیر هندسی واضح، کاربرد کمی در تاریخ ریاضیات داشته اند ولی در دهه ی اخیر

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: [m\\_behroozifar@nit.ac.ir](mailto:m_behroozifar@nit.ac.ir)

2- Fractional optimal control problems

3- Mathematica software

کاربردهای زیادی از آن در موضوعات مختلف از جمله علوم پایه، مهندسی و مسائل اقتصادی دیده شده که به عنوان نمونه از مدل سازی فرآیند انتشار گاز، انتقال گرما، الکتروشیمی، بیوشیمی می توان نام برد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی و تحقیق در مورد خواص و کاربردهای انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه می پردازد. وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری توسط محققان زیادی بررسی شده است [۱ و ۲].

برای بسیاری از سیستم های فیزیکی دنیای واقعی، راه حلی برای به دست آوردن جواب تحلیلی و دقیق وجود ندارد، به همین دلیل روش های تقریبی و عددی برای حل این گونه مسائل از جایگاه ویژه ای برخوردار است. اخیراً چندین روش عددی و نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و سیستم های دینامیکی بیان شده است مثل روش تجزیه آدومیان<sup>۱</sup> [۳-۷]، روش تکراری تغییراتی<sup>۲</sup> [۸-۱۰]، روش آشفته گی هموتوپی<sup>۳</sup> [۱۱ و ۱۲]، روش آنالیز هموتوپی<sup>۴</sup> [۱۳]، روش تائو<sup>۵</sup> [۱۳] و روش هم محلی<sup>۶</sup> [۱۴].

مسائل کنترل بهینه کسری نوع دیگری از مسائل مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری که مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. برای مثال، مسئله کنترل بهینه کسری دوبعدی زیر در مقاله [۱۵] ارائه شده و روش ریتس برای حل عددی این مسئله بکار گرفته شده است و بعد در مقاله [۱۶] موجک مونتنز لژاندر دو بعدی را برای حل این مسئله بکار گرفته شد. در این مقاله درصدد آن هستیم که یک روش عددی جدیدی برای حل مسئله زیر ارائه دهیم:

$$\min J [u(x, t)] = \int_0^a \int_0^b G \left( x, t, f(x, t), u(x, t), \frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right) dx dt \quad (1)$$

که  $0 \leq x \leq a$  و  $0 \leq t \leq b$  و تحت قید

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x \partial t}(x, t) = a_1 \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x, t) + a_2 \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(x, t) + a_3 f(x, t) + h(x, t)u(x, t) \quad (2)$$

و شرایط مرزی و کران داری زیر برقرار باشند  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  به طوری که

$$f(x, 0) = f_1(x), \quad f(0, t) = f_2(t) \quad (3)$$

- 
- 1- Adomian's decomposition method
  - 2- Variational iteration method
  - 3- Homotopy perturbation method
  - 4- Homotopy analysis method
  - 5- Tau method
  - 6- Collocation method

توابع  $u(x, t)$  و  $f(x, t)$  مجهول هستند که به ترتیب تابع کنترل<sup>۱</sup> و تابع حالت<sup>۲</sup> نامیده می شوند.

روش بیان شده در این مقاله با روش مقاله [۱۷] دارای وجوه اشتراک و تمایز است. از نظر وجه اشتراک می توان گفت که هر دو از ایده انتقال قید به داخل تابع هدف و نیز استفاده از قاعده انتگرال گیری گاوس-لژاندر برای تعیین مجهولات استفاده نموده اند. ولی از لحاظ وجه تمایز می توان بیان کرد مقاله [۱۷] روی مسئله کنترل بهینه یک بعدی و این مقاله بر روی مسئله کنترل بهینه دو بعدی متمرکز شده اند و نیز با توجه به متفاوت بودن شرایط اولیه و کران داری تکنیک انتقال شرایط به تابع هدف متمایز است. در این مقاله روش طوری پایه ریزی شده است که از ماتریس عملیاتی مشتق کسری استفاده شود اما در مقاله [۱۷] از ماتریس های عملیاتی مشتق و انتگرال کسری استفاده گردیده است. مقاله [۱۵] نیز با تعریف و کاربرد ماتریس عملیاتی جدید مسیر جدید و متفاوتی را در حل این گونه مسائل در پیش گرفته است که قابل توجه است. جهت اطلاعات بیشتر، خوانندگان علاقه مند می توانند مقالات [۱۸ و ۱۹] را مطالعه کنند.

مطالب این مقاله در ۶ بخش تنظیم شده که در بخش ۲ این مقاله تعاریف و مقدمات مورد نیاز را ارائه می نمایم. در بخش ۳ ماتریس عملیاتی مشتق جزئی کسری کاپوتو ارائه می شود. در بخش ۴ روشی برای تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری مطرح و به منظور بررسی عملکرد آن ها، این مدل بر روی چند مثال پیاده سازی شده است که نتایج عددی در بخش ۵ قابل رؤیت است و در بخش ۶ نتایج برآمده از این مقاله به طور مختصر بیان می گردد.

## ۲- تعاریف و مقدمات

### ۲-۱- چندجمله ای های لژاندر

فرض کنید  $q_i(x)$  چندجمله ای لژاندر در بازه  $[-1, 1]$  باشد که از فرمول بازگشتی

$$q_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1} x q_i(x) - \frac{i}{i+1} q_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

$$q_0(x) = 1, q_1(x) = x.$$

به دست می آید. اگر چندجمله ای  $q_i(x)$  را به بازه بسته  $[a, b]$  انتقال دهیم به چندجمله ای حاصل، چندجمله ای لژاندر انتقال یافته اطلاق می شود که در رابطه بازگشتی

1- Control function

2- State function

$$P_0(s) = 1, P_1(s) = \frac{\gamma s - a - b}{b - a},$$

$$P_{j+1}(s) = \frac{(\gamma j + 1)(\gamma s - a - b)}{(j + 1)(b - a)} P_j(s) - \frac{j}{j + 1} P_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

صدق می کند. همچنین چند جمله ای های لژاندر انتقال یافته در بازه  $[a, b]$  متعامدند و داریم

$$\int_a^b P_m(s) P_n(s) ds = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \frac{b - a}{\gamma m + 1} & m = n. \end{cases}$$

### ۲-۲- مشتق جزئی کسری کاپوتو

فرض کنید  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$  و  $\alpha > 0$  مرتبه مشتق کسری باشد.

مشتق جزئی کسری کاپوتوی چپ از مرتبه  $\alpha$  تابع  $f(x, t)$  نسبت به متغیرهای  $X$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n_\alpha - \alpha)} \int_a^x (x - \mu)^{n_\alpha - \alpha - 1} \frac{\partial^{n_\alpha} f}{\partial \mu^{n_\alpha}}(\mu, t) d\mu$$

به طوری که  $n_\alpha - 1 < \alpha \leq n_\alpha$  ( $n_\alpha$  عدد طبیعی است) و نیز نماد  $\Gamma(\cdot)$  بیانگر تابع گاما است. تابع گاما یکی از توابع اساسی و پر کاربرد در حساب دیفرانسیل کسری است و از آن به عنوان تعمیم تابع فاکتوریل نیز یاد می شود. تابع گاما در مجموعه اعداد حقیقی و مختلط با بخش حقیقی مثبت تعریف می شود. تابع گاما یا انتگرال اویلر نوع دوم را با نماد  $\Gamma(p)$  نمایش می دهیم و به صورت

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt, \quad \text{Re}(p) > 0$$

تعریف می شود. با توجه به تعریف انتگرالی تابع گاما،  $\Gamma(p) = 1$  و  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$  است.

### ۳-۲- ماتریس عملیاتی

در حالت کلی، اگر  $\phi_m(x)$  برداری از توابع مستقل خطی باشد آنگاه ماتریس عملیاتی دوگان<sup>۱</sup>، ماتریس عملیاتی انتگرال  $p_m$  و ماتریس عملیاتی مشتق  $D_m$  به ترتیب به صورت

$$Q_m = \langle \phi_m(x), \phi_m(x) \rangle = \int_a^b \phi_m(x) \phi_m^T(x) dx,$$

$$\int_a^x \phi_m(t) dt \approx P_m \phi_m(x),$$

$$\frac{d}{dx} \phi_m(x) \approx D_m \phi_m(x).$$

تعریف می‌شوند. در این مقاله، بردار چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته از درجه  $m$  در نظر گرفته شده‌اند که در بخش ۲ با جزئیات بیان شده‌اند. در ضمن، ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال چندجمله‌ای لژاندر در مقاله [۲۰] به تفصیل توضیح داده شده‌اند که خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به آن مراجعه کنند.

### ۳- ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو

قضیه زیر ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو با چندجمله‌ای لژاندر را در حالت کلی نشان می‌دهد که  $D^v$  عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $v$  و  $D^{(v)}$  ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $v$  است.

**قضیه ۱:** [۲۱] فرض کنید  $\phi_m(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)]^T$  بردار چندجمله‌ای‌های لژاندر و  $v > 0$  باشد. آنگاه

$$D^v \phi_m(x) \approx D^{(v)} \phi_m(x)$$

که  $D^{(v)}$  ماتریس عملیاتی مشتق  $(m+1) \times (m+1)$  از مرتبه  $v$  به صورت

$$D^{(v)} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \Delta_v(v, \circ) & \Delta_v(v, 1) & \Delta_v(v, 2) & \cdots & \Delta_v(v, m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_v(i, \circ) & \Delta_v(i, 1) & \Delta_v(i, 2) & \cdots & \Delta_v(i, m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_v(m, \circ) & \Delta_v(m, 1) & \Delta_v(m, 2) & \cdots & \Delta_v(m, m) \end{pmatrix}$$

است که

$$\Delta_v(i, j) = \sum_{k=\lceil v \rceil}^i \delta_{ijk}$$

و  $\delta_{ijk}$  به صورت

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k} L^{\alpha+\beta-v+1} \Gamma(j+\beta+1) \Gamma(i+\beta+1) \Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{h_j \Gamma(j+\alpha+\beta+1) \Gamma(k+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1) \Gamma(k-v+1) (i-k)!} \\ \times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j+l+\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1) \Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2) (j-l)!!}$$

محاسبه می شود. همچنین در  $D^{(v)}$ ،  $\lceil v \rceil$  سطر اول ماتریس صفر است.

#### ۴- تشریح حل عددی مسئله

در این بخش یک روش عددی برای حل عددی مسئله‌ی (۱) همراه با قیود (۲) و (۳) ارائه می دهیم. برای این منظور دو چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته  $L_j(x)$  و  $L_j(t)$  به ترتیب بر روی بازه‌های  $[0, a]$  و  $[0, b]$  مطابق رابطه (۴) به صورت زیر در نظر می گیریم

$$L_i(x) = P_i \left( \frac{y}{a} x - 1 \right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$L_j(t) = P_j \left( \frac{y}{b} t - 1 \right), \quad 0 \leq t \leq b, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

در ابتدا روشی برای تقریب تابع دومتغیره  $K(x, t)$  بیان می کنیم. تابع  $K(x, t)$  را می توان به صورت زیر با کمک چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته  $(L_j(t))_{j=0}^n, (L_i(x))_{i=0}^m$  تقریب زد:

$$K(x, t) \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_i(x) C_{ij} L_j(t) = \phi_m^T(x) C \phi_n(t),$$

که  $\phi_m(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_m(x)]^T, \phi_n(t) = [L_0(t), L_1(t), \dots, L_n(t)]^T$

$$C = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \dots & C_{0,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+1,0} & C_{m+1,1} & \dots & C_{m+1,n+1} \end{pmatrix}$$

که ماتریس مجهول  $C$  از رابطه

$$C = Q_m^{-1} \left( \int_a^b \int_{\circ} \phi_m(x) K(x, t) \phi_n^T(t) dt dx \right) Q_n^{-1}$$

به دست می آید.

حال برای تقریب جواب مسئله کنترل بهینه (1) فرض می کنیم  $\frac{\partial^x f}{\partial x \partial t}(x, t)$  را به صورت

$$\frac{\partial^x f}{\partial x \partial t}(x, t) \approx \phi_m^T(x) C \phi_n(t) \quad (5)$$

تقریب بزینم. آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = f'_v(t) + \int_{\circ}^x \frac{\partial^x f}{\partial s \partial t}(s, t) ds. \quad (6)$$

با استفاده از تعاریفی که در بخش ۲-۳ ارائه شده است، داریم:

$$\int_{\circ}^x \phi_m^T(s) ds \approx \phi_m^T(x) P_m^T \quad (7)$$

با جایگذاری روابط (5) و (6) در (7) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= f'_v(t) + \int_{\circ}^x \frac{\partial^x f}{\partial s \partial t}(s, t) ds = f'_v(t) + \int_{\circ}^x \phi_m^T(s) C \phi_n(t) ds \approx \\ &f'_v(t) + \phi_m^T(x) P_m^T C \phi_n(t) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_v(x) + \int_{\circ}^t \frac{\partial f}{\partial r}(x, r) dr \\ &\approx f_v(x) + \int_{\circ}^t f'_v(r) dr + \int_{\circ}^t \phi_m^T(x) P_m^T C \phi_n(r) dr \end{aligned} \quad (8)$$

اکنون، با فرض  $f_v(x) = \phi_m^T(x) F_v \phi_n(t)$  و  $\int_{\circ}^t f'_v(r) dr \approx \phi_m^T(x) F_v \phi_n(t)$  و

$$\int_{\circ}^t \phi_n(r) dr \approx P_n \phi_n(t)$$

و جایگذاری این روابط در (8) داریم:

$$\begin{aligned} f(x, t) &\approx \phi_m^T(x) F_1 \phi_n(t) + \phi_m^T(x) F_2 \phi_n(t) + \phi_m^T(x) P_m^T C P_n \phi_n(t) \\ &= \phi_m^T(x) [F_1 + F_2 + P_m^T C P_n] \phi_n(t) \end{aligned}$$

که با فرض  $k = F_1 + F_2 + P_m^T C P_n$  رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f(x, t) \approx \phi_m^T(x) k \phi_n(t). \quad (9)$$

با توجه به رابطه (۹) و تعاریفی که در بخش ۲-۳ ارائه شده است، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \approx \phi_m^T(x) D_m^T k \phi_n(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \approx \phi_m^T(x) k D_n \phi_n(t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^a f}{\partial x^a}(x, t) \approx \phi_m^T(x) (D_m^{(a)})^T k \phi_n(t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^\beta f}{\partial t^\beta}(x, t) \approx \phi_m^T(x) k D_n^{(\beta)} \phi_n(t) \quad (13)$$

می‌دانیم که سیستم دینامیکی مسئله به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial x \partial t}(x, t) - a_1 \frac{\partial^a f}{\partial x^a}(x, t) - a_2 \frac{\partial^\beta f}{\partial t^\beta}(x, t) - a_3 f(x, t) \right] \quad (14)$$

که با جایگذاری رابطه‌های (۵)، (۹)، (۱۲)، (۱۳)، در (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{h(x, t)} [\phi_m^T(x) C \phi_n(t) - a_1 \phi_m^T(x) (D_m^{(a)})^T k \phi_n(t) \\ &\quad - a_2 \phi_m^T(x) k D_n^{(\beta)} \phi_n(t) - a_3 \phi_m^T(x) k \phi_n(t)] \end{aligned} \quad (15)$$

در ادامه روابط (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۵) را در تابع هدف زیر جایگذاری می‌کنیم

$$Q(x, t) = G \left( x, t, f(x, t), u(x, t), \frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right)$$



حال از قانون انتگرال گیری گاوس-لژاندر دوبعدی برای تقریب انتگرال دوگانه استفاده می‌شود. با توجه به مطالب ارائه شده در [۱۵] می‌دانیم که انتگرال دوگانه به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\int_a^b \int_c^d Q(x,t) dx dt \approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^{l'} w_r w'_s Q\left(a + (\xi_r + 1) \frac{b-a}{2}, c + (\tau_s + 1) \frac{d-c}{2}\right) \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

که  $w_r = 2(1-\xi_r)^{-1} [P_l(\xi_r)]^{-1}$  و  $w'_s = 2(1-\tau_s)^{-1} [P_{l'}(\tau_s)]^{-1}$  ضرایب وزنی و  $\xi_r$  و  $\tau_s$  ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه  $l$  و  $l'$  هستند. حال با استفاده از معادله لاگرانژین داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

که این دستگاه غیرخطی با روش تکراری نیوتن و با کمک نرم‌افزار ممتیکا حل و ماتریس  $C$  تعیین می‌گردد، سپس با جایگذاری مقدار  $C$  در رابطه (۹)، تابع  $f(x, t)$  و از رابطه (۱۴)، تابع  $u(x, t)$  به دست می‌آید.

### ۵- نتایج عددی

برای نشان دادن کارایی روش‌های ارائه شده، چندین مثال را در این قسمت بیان می‌کنیم. در همه مثال‌ها از مشتق کسری کاپوتو استفاده شده است و  $u_m(x, t)$ ،  $f_m(x, t)$ ،  $J_m$ ،  $f_1(x)$  و  $f_{vm}(t)$  را به ترتیب جواب‌های تقریبی برای جواب‌های دقیق  $u(x, t)$ ،  $f(x, t)$ ،  $J$ ،  $f_1(x)$  و  $f_v(t)$  با استفاده از چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $m$  معرفی می‌کنیم. مسئله‌ی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱۶ و ۱۵]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x, t) = a_1 \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x, t) + a_2 \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(x, t) + a_3 f(x, t) + h(x, t)u(x, t) \quad (16)$$

به طوری که  $f_v(t) = f(x, t) = e^{-\tau t}$ ،  $h(x, t) = 2\pi$ ،  $a_2 = -3$ ،  $a_1 = -1$ ،  $a_3 = -3$  و  $f_1(x) = f(x, 0) = e^{-\tau x} \cos(2\pi x)$  اکنون مسئله کنترل بهینه کسری زیر را برای  $\alpha$  و  $\beta$  های متفاوت تقریب می‌زنیم:

$$\min J[u(x, t)] = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + f(x, t) \right)^2 + f^2(x, t) + u^2(x, t) dx dt. \quad (17)$$

مثال ۱: مسئله کنترل بهینه کسری فوق را در  $\alpha = \beta = 1$  تقریب بنزید. جواب بهینه تابع هدف برابر است با  $J = 0.0663673$  و جواب‌های دقیق  $f(x, t) = e^{-\tau x - \tau t} \cos(2\pi x)$  و  $u(x, t) = e^{-\tau x - \tau t} \sin(2\pi x)$  می‌باشند. با توجه به روش حل ارائه شده مقدار تقریبی تابع هدف به دست آمده و در جدول ۱ با جواب دقیق مقایسه شده است. از جدول ۱ می‌توان استنباط کرد که با افزایش  $m$  و  $n$  خطا کاهش یافته و به جواب بهینه نزدیک می‌شویم. در ادامه با استفاده از شکل‌های ۱، ۲ و ۳ به بررسی و مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی به دست آمده با  $m = n = 9$  می‌پردازیم.

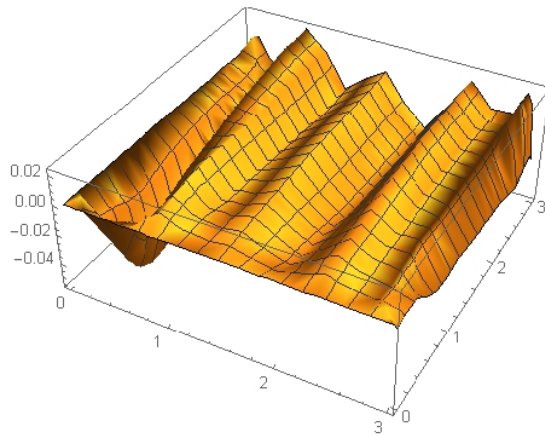
جدول (۱): مقدار تقریبی تابع هدف در مثال ۱

$ J - J_m $	$J$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$
0/1299907	0/196358	$n = 5$	$m = 5$
0/0830587	0/149426	$n = 6$	$m = 6$
0/0851517	0/151519	$n = 7$	$m = 7$
0/0363657	0/102693	$n = 5$	$m = 8$
0/0349657	0/101333	$n = 8$	$m = 8$
0/0024811	0/0638862	$n = 6$	$m = 9$
0/0004706	0/0658967	$n = 9$	$m = 9$

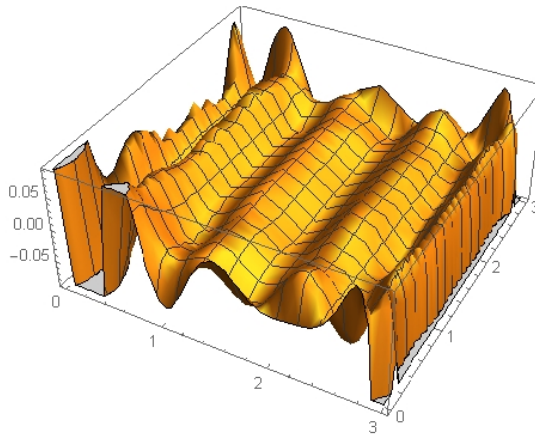
جدول (۲): پیچیدگی محاسباتی بر حسب ثانیه مثال ۱

۱۷	$n = 5$	$m = 5$
۲۲	$n = 6$	$m = 6$
۲۹	$n = 7$	$m = 7$
۲۵	$n = 5$	$m = 8$
۳۷	$n = 8$	$m = 8$
۳۲	$n = 6$	$m = 9$
۴۴	$n = 9$	$m = 9$

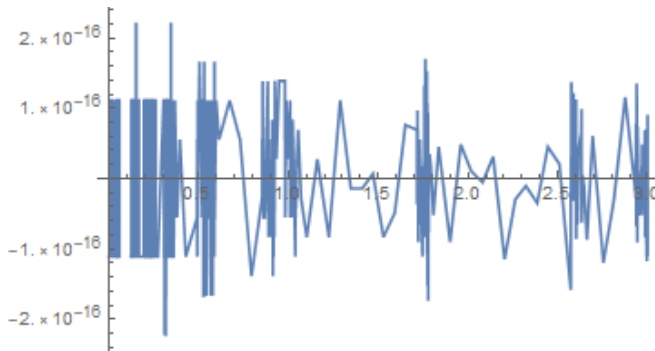
این مثال با  $\alpha = \beta = 1$  در مقاله [۱۵] حل شده است که با مقایسه جدول مقادیر تابع هدف، مشخص می‌گردد که روش بهتر و دقیق‌تر عمل می‌کند. همچنین با توجه به ارائه نمودار خطای مطلق داده شده برای تابع حالت و تابع کنترل، مشخص می‌گردد که این روش خطای کمتری ایجاد می‌کند و بازده بالاتری دارد. زمان محاسباتی لازم برای مقادیر مختلف  $m$  و  $n$  در جدول ۲ بیان گردیده است که حکایت از سرعت سریع بالای روش دارد.



شکل (۱): نمودار تابع خطای حالت  $f(x,t) - f_m(x,t)$  برای  $\alpha = \beta = 1$  در بازه  $[0,3] \times [0,3]$  برای مثال ۱.



شکل (۲): نمودار تابع خطای کنترل  $u(x,t) - u_m(x,t)$  برای  $\alpha = \beta = 1$  در بازه  $[0,3] \times [0,3]$  برای مثال ۱.



شکل (۳): نمودار تابع خطای  $f_r(t) - f_{rm}(t)$  برای  $\alpha = \beta = 1$  در بازه  $[0, 3] \times [0, 3]$  برای مثال ۱

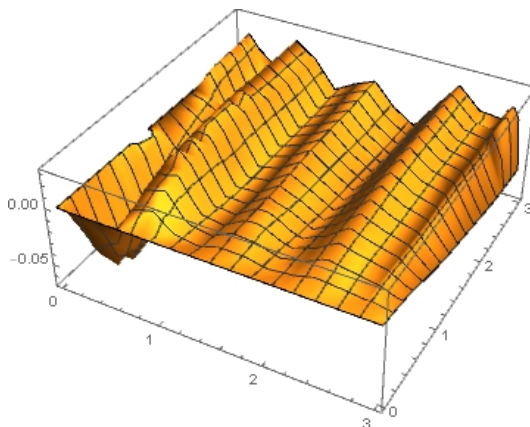
**مثال ۲:** حال روابط (۱۶) و (۱۷) را برای  $\alpha = \beta = 0.8$  در نظر بگیرید. جواب بهینه تابع هدف برابر است با  $J = 0.0872175$  و جواب دقیق  $f(x, t) = e^{-x-2t} \cos(2\pi x)$  و  $u(x, t)$  تابعی مناسب که در این سیستم دینامیکی صدق می‌نماید. با توجه به روش حل ارائه شده مقدار تقریبی تابع هدف به دست آمده و در جدول ۳ با جواب دقیق مقایسه شده است. در ادامه با استفاده از شکل‌های ۴، ۵ و ۶ به بررسی و مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی که با  $n = 6$  و  $m = 9$  به دست آمده، می‌پردازیم. این مثال با  $\alpha = \beta = 0.8$  در مقاله [۱۵, ۱۶] حل شده است و در مقاله [۱۶] مقایسه‌ای بین روش موجود در مقالات [۲۴-۲۲, ۱۵] انجام داده است که با توجه به آن مقایسه، معلوم می‌گردد که این روش ما نسبت به هر روش‌های [۲۴-۲۲, ۱۵] حتی با تعداد پایه‌های کمتر، جواب دقیق‌تری به دست می‌دهد. از روی نمودار خطای مطلق برای تابع حالت و تابع کنترل، مشخص می‌گردد که این روش کارایی خوبی دارد؛ اما روش [۱۶] نسبت به روش ارائه شده جواب بهتری داده که دلیل آن این است که در مقاله [۱۶] به خاطر استفاده از موجک از پایه‌های بیشتری استفاده نموده که طبیعتاً جواب بهتری نیز حاصل شده است. در جدول ۲ زمان محاسباتی لازم برحسب ثانیه برای مقادیر مختلف  $m, n$  ارائه شده است که بیانگر پیچیدگی محاسباتی کم روش است که این خود یکی از مزایای مهم این روش محسوب می‌گردد.

جدول (۳): مقدار تقریبی تابع هدف در مثال ۲

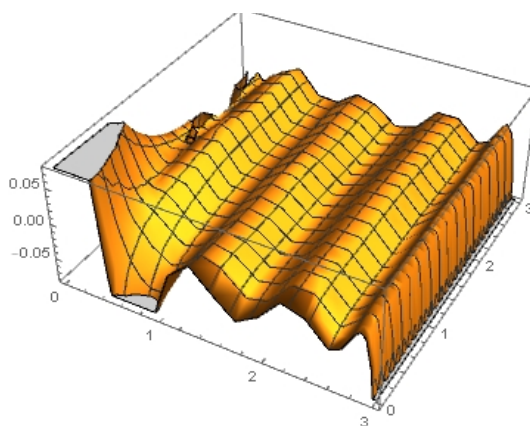
$ J - J_m $	$J$	$\beta = 0.8$	$\alpha = 0.8$
۰/۲۵۵۲۸۹۵	۰/۳۴۲۵۰۷	$n = 3$	$m = 5$
۰/۲۴۹۱۵۵۵	۰/۳۳۶۳۷۳	$n = 3$	$m = 7$
۰/۰۴۴۴۸۴۵	۰/۱۳۱۷۰۲	$n = 4$	$m = 8$
۰/۰۹۰۹۳۸۵	۰/۱۷۸۱۵۶	$n = 8$	$m = 8$
۰/۰۰۸۲۳۳۸۲	۰/۰۷۸۹۷۹۳	$n = 6$	$m = 9$

جدول (۴): پیچیدگی محاسباتی بر حسب ثانیه مثال ۲

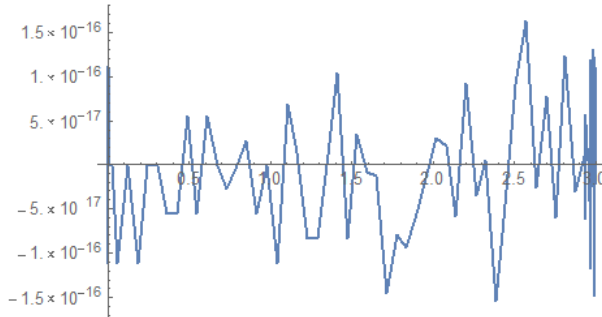
۱۲۱	$n = 3$	$m = 5$
۱۲۹	$n = 3$	$m = 7$
۱۴۱	$n = 4$	$m = 8$
۱۷۲	$n = 8$	$m = 8$
۱۵۸	$n = 6$	$m = 9$



شکل (۴): نمودار تابع خطای حالت  $f(x, t) - f_m(x, t)$  برای  $\alpha = \beta = 0/8$  در بازه  $[0, 3] \times [0, 3]$  برای مثال ۲.



شکل (۵): نمودار تابع خطای کنترل  $u(x, t) - u_m(x, t)$  برای  $\alpha = \beta = 0/8$  در بازه  $[0, 3] \times [0, 3]$  برای مثال ۲.



شکل (۶): نمودار تابع خطای  $f_r(t) - f_{rm}(t)$  برای  $\alpha = \beta = 0/8$  در بازه  $[0, 3] \times [0, 3]$  برای مثال ۲

مثال ۳: حال روابط (۱۶) و (۱۷) را برای  $\alpha = 0/8$  و  $\beta = 0/9$  در نظر بگیرید. جواب بهینه تابع هدف برابر است با  $J = 0/0826612$  و جواب دقیق و  $u(x, t)$  تابعی مناسب که در این سیستم دینامیکی صدق می‌نماید. با توجه به روش حل ارائه شده مقدار تقریبی تابع هدف به دست آمده و در جدول ۵ با جواب دقیق مقایسه شده است.

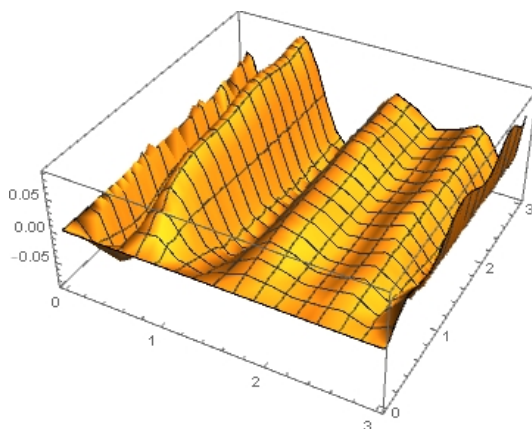
جدول (۵): مقدار تقریبی تابع هدف در مثال ۳

$ J - J_m $	$J$	$\beta = 0/9$	$\alpha = 0/8$
0/2620978	0/344759	$n = 3$	$m = 5$
0/25885088	0/34117	$n = 3$	$m = 7$
0/04776068	0/130368	$n = 4$	$m = 8$
0/0424658	0/125127	$n = 8$	$m = 8$
0/0066005	0/760607	$n = 6$	$m = 9$

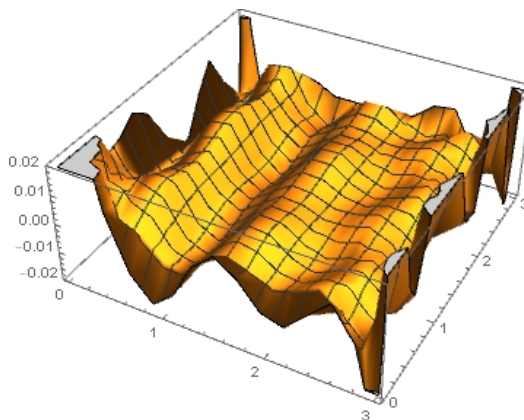
جدول (۶): پیچیدگی محاسباتی برحسب ثانیه مثال ۳

۱۲۳	$n = 3$	$m = 5$
۱۲۸	$n = 3$	$m = 7$
۱۴۴	$n = 4$	$m = 8$
۱۷۵	$n = 8$	$m = 8$
۱۶۰	$n = 6$	$m = 9$

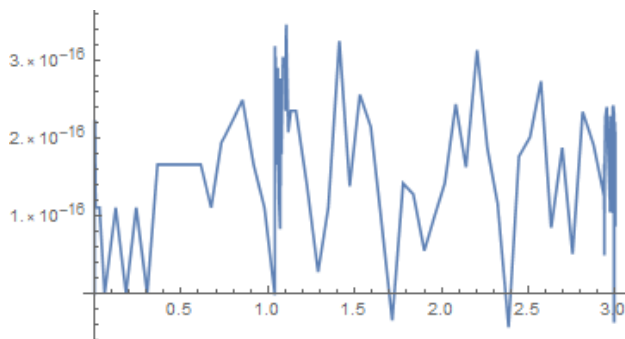
در ادامه با استفاده از شکل‌های ۷، ۸ و ۹ به بررسی و مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی که با  $n=6$  و  $m=9$  به دست آمده، می‌پردازیم. در این مثال تقریب تابع هدف دقت مناسبی دارد و از شکل‌های ۷، ۸ و ۹ می‌توان دریافت که روش ارائه شده جواب‌های تقریبی نسبتاً دقیقی می‌دهد. همچنین در جدول ۶ زمان محاسباتی لازم برای اجرای روش ارائه گردید.



شکل ۷: نمودار تابع خطای حالت  $f(x,t) - f_m(x,t)$  برای  $\alpha = 0/8$  و  $\beta = 0/9$  در بازه  $[0,3] \times [0,3]$  برای مثال ۳.



شکل ۸: نمودار تابع خطای کنترل  $u(x,t) - u_m(x,t)$  برای  $\alpha = 0/8$  و  $\beta = 0/9$  در بازه  $[0,3] \times [0,3]$  برای مثال ۳.



شکل (۹): نمودار تابع خطای  $f_r(t) - f_{r,m}(t)$  برای  $\alpha = 0.8$  و  $\beta = 0.9$  در بازه  $[0, 3] \times [0, 3]$  برای مثال ۳.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی پایه‌های چندجمله‌ای لژاندر به حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری دوعدی در مستطیل  $[0, 3] \times [0, 3]$  پرداختیم. برای تقریب انتگرال دوگانه از قاعده گاوس-لژاندر استفاده نموده و به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی رسیدیم که در نهایت این دستگاه با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا حل می‌شود. پیچیدگی محاسباتی لازم برای تمامی مثال‌ها ارائه شده است که بیانگر پیچیدگی محاسباتی کم این روش است که این خود یکی از مزایای مهم این روش محسوب می‌گردد. نتایج عددی به دست آمده به ما این اطمینان را می‌دهد که این روش برای انجام محاسبات و تقریب مسئله قابل اعتماد است.

#### منابع

- [1] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York.
- [2] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, San Diego.
- [3] Momani, S. and Shawagfeh, N.T. (2006). Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1083-1092.
- [4] Momani, S. and Noor, M.A. (2006). Numerical methods for fourth-order fractional integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 754-760.
- [5] Gejji, V.D. and Jafari, H. (2007). Solving a multi-order fractional differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, **189**, 541-548.



- [6] Ray, S.S., Chaudhuri, K.S. and Bera, R.K. (2006). Analytical approximate solution of nonlinear dynamic system containing fractional derivative by modified decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 544-552.
- [7] Wang, Q. (2006). Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1048-1055.
- [8] Inc, M. (2008). The approximate and exact solutions of the space- and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **345**, 476-484.
- [9] Momani, S. and Odibat, Z. (2006). Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, *Physics Letters A*, **355**, 271-279.
- [10] Odibat, Z. and Momani, S. (2006). Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7**, 271-279.
- [11] Momani, S. and Odibat, Z. (2007). Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Physics Letters A*, **365**, 345-350.
- [12] Sweilam, N.H., Khader, M.M., and Al-Bar, R.F. (2007). Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, *Physics Letters A*, **371**, 26-33.
- [13] Hashim, I., Abdulaziz, O. and Momani, S. (2009). Homotopy analysis method for fractional IVPs. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 674-684.
- [14] Rawashdeh, E.A. (2006). Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, **176**, 1-6.
- [15] Nemati, A. and Yousefi, S.A. (2017). A numerical scheme for solving two-dimensional fractional optimal control problems by the Ritz method combined with fractional operational matrix, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **34**, 1079-1097.
- [16] Rahimkhani, P. and Ordokhani, Y. (2018). Numerical solution a class of 2D fractional optimal control problems by using 2D Müntz-Legendre wavelets, *Optimal Control Applications and Methods*, **39**, 1916-1934.
- [17] Lotfi, A., Yousefi, S.A. and Dehghan, M. (2013). Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss

- quadrature rule, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **250**, 143-160.
- [18] Zarebnia, M., Barandak, I.H. (2018). Haar wavelet quasilinearization method for solving nonlinear troesch's and bratu's problems, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **7**, 85-102.
- [19] Hassani, H., Naragirad, E. (2019). A new optimization operational matrix algorithm for solving nonlinear variable-order time fractional convection-diffusion equation, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **9**, 98-119.
- [20] Eslahchi, M.R. and Dehghan M. (2011). Application of Taylor series in obtaining the orthogonal operational matrix, *Computers & Mathematics with Applications*, **61**, 2596-2604.
- [21] Doha, E.H., Bhrawy, A.H. and Ezz-Eldien, S.S. (2012). A new Jacobi operational matrix: an application for solving fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 4931-4943 .
- [22] Mamehrashi, K. and Yousefi, S.A. (2016). Numerical solution of a class of two-dimensional quadratic optimal control problems by using Ritz method, *Optimal Control Applications and Methods*, **37**, 765-781.
- [23] Tsa, J.S.H., Li, J.S. and Shieh, L.S. (2002). Discretized quadratic optimal control for continuous-time two-dimensional systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **49**, 116-125.
- [24] Nemati, A. (2017). Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method along with Bernstein operational matrix, *Asian Journal of Control*, **21**, 1189-1201.

## Numerical Method for Solving a Class of Two-dimensional Fractional Optimal Control Problems by Operational Matrices of Legendre Polynomial

Yaser Nouralizadeh Otaghsara, Mahmoud Behroozifar, Mohsen Alipour  
Department of Mathematics, Babol Noshirvani University of Technology,  
Babol, Iran

---

Received: November 19 2017

Accepted for publication: November 7 2019

Corresponding author: [m\\_behroozifar@nit.ac.ir](mailto:m_behroozifar@nit.ac.ir)

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

---

### Abstract

In this article, we present a numerical method for solving a class of two-dimensional fractional optimal control problems by the Legendre polynomial basis with fractional operational matrix. It should be mentioned that the dynamic system of the problem is based on the Caputo fractional partial derivative. This method, the dual integral is approximated by Gauss-Legendre rule, and then by using the Lagrangian equation, a nonlinear equation is obtained. This nonlinear equation set is solved by Newton's iterative method and unknown coefficients is determined. Finally, the proposed method was applied on a fractional problem with the different degree of fractional derivative. Also, the CPU time of method is exhibited. It is notable that all calculations were obtained by the Mathematica software.

**Keywords:** Partial differential of fractional Caputo, Legendre polynomial, Operational matrices, Legendre-Gauss integration rule.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 65-XX, 49-XX, 33C45.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) .