مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۱، ص ۱۷۱-۱۵۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2020.28257.1678

# کوچک‌ترین رده‌ی زیر جبرهای شامل مجموعه‌های آغازی از یک BCK-مشبکه‌ی جابجایی

حبیب حریزاوی*[1]، طیبه کوچک‌پور**

*گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

**گروه ریاضی، دانشکده‌ی علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۲۷

**چکیده:** در این مقاله، فرض می‌کنیم $X$ یک BCK-جبر و $y,t$ عناصری از $X$ باشند. متناظر با این دو عنصر، مجموعه‌ای با نماد $F(y,t)$ را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که $F(y,t)$ یک زیر جبر از $X$ است. سپس نشان می‌دهیم BCK-جبر $X$ خطی و جابجایی است اگر و تنها اگر به ازای هر $y,t \in X$، $F(y,t)$ یک مجموعه‌ی آغازی باشد. همچنین، یک شرط لازم و کافی برای اینکه $F(y,t)$ یک ایده‌آل باشد ارائه می‌دهیم. در پایان نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی این نوع مجموعه‌ها یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر کران‌دار است.

**واژه‌های کلیدی:** BCK-جبر، BCK-جبر جابجایی، مشبکه، BCK-جبر استلزامی، BCK-جبر استلزامی مثبت.

**رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۰۳G۱۰، ۰۳G۲۵**

## ۱- مقدمه

نظریه I-جبرها به‌عنوان تعمیمی از نظریه‌ی مجموعه‌ها و حساب گزاره‌ها در [۱] معرفی شده است. در همان سال نظریه‌ی BCK-جبرها به‌عنوان تعمیمی از I-جبرها و سپس نظریه BCI-جبر ها به‌عنوان تعمیمی از BCK-جبر ها در [۲] ارا ئه گرد ید. این جبر ها کلاس هایی از جبرهای منطق هستند. همچنین BCK-جبرهای جابجایی دسته‌ی مهمی از BCK-جبرها

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: حبیب حریزاوی harizavi@scu.ac.ir

هستند که نیم مشبکه‌های پایینی می‌باشند [۹ و ۸]. BCK-جبرهای استلزامی و استلزامی مثبت دسته‌های دیگری از BCK-جبرها هستند که توسط ک. ایزکی (۱۹۷۵) معرفی شده‌اند. نشان داده می‌شود که یک BCK-جبر استلزامی است اگر و تنها اگر جابجایی و استلزامی مثبت باشد. مفهوم ایده‌آل در BCK-جبرها در [۴,۵] بیان شده است. یک نوع از ایده‌آل‌های مهم ایده‌آل جابجایی است که رابطه‌ی خیلی نزدیک با BCK-جبرهای جابجایی دارد. بدین معنی که یک BCK-جبر جابجایی است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل از آن جابجایی باشد [۶].

در مقاله‌ی پیش رو برای هر زوج $y,t \in X$، زیرمجموعه‌ای از $X$ به نام $F(y,t)$ تعریف و سپس خواصی از این مجموعه را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای هر $y,t \in X$، $F(y,t)$ یک زیر جبر است. همچنین، یک شرط لازم و کافی برای ایده‌آل بودن $F(y,t)$ در BCK-جبرهای جابجایی بیان می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که یک BCK-جبر، جابجایی و خطی است اگر و تنها اگر به ازای هر $y,t \in X$، $F(y,t)$ یک زیر مجموعه‌ی آغازی باشد. نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه این‌چنین مجموعه‌هایی تشکیل یک مشبکه توزیع‌پذیر کران‌دار می‌دهد. در پایان، نشان می‌دهیم که به ازای هر $y,t \in X$، $F(y,t)$ کوچک‌ترین عنصر از $L(y,t)$ با ویژگی $A(t) = F(y,t)$ است.

## ۲-تعاریف و مفاهیم مقدماتی

قضایا و تعاریف مقدماتی را که در این مقاله از آن‌ها استفاده شده است در این بخش یادآوری می‌کنیم. خواننده برای جزئیات بیشتر می‌تواند به [۷,۱۰] رجوع کند.

**تعریف ۱:** فرض می‌کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی همراه با عمل دوتایی "$*$" و عضو ثابت "$\circ$" باشد. آنگاه $(X;*,\circ)$ یک BCK-جبر نامیده می‌شود هرگاه در شرایط ذیل صدق کند:

(BCI − ۱) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=\circ$.

(BCI − ۲) $(x*(x*y))*y=\circ$.

(BCI − ۳) $x*x=\circ$.

(BCI − ۲) اگر $x*y=\circ$ و $y*x=\circ$ آنگاه $x=y$،

(BCI − ۵) $\circ*x=\circ$.

عنصر $\circ \in X$ را صفر $X$ می‌نامیم. در اغلب مواقع به‌جای $(X;*,\circ)$ به‌طور خلاصه $X$ را جایگزین کرده‌ایم.

در BCK–جبر $X$ رابطه‌ی دوتایی $\leq$ که به‌صـــورت $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x*y=0$ تعریف می‌شود یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است.

**قضیه ۲:** هر BCK-جبر $X$ دارای خواص زیر است: به ازای هر $x,y,z \in X$،

$(a_1)$ $x*0=x$،

$(a_2)$ $x*y \leq x$

$(a_3)$ $(x*y)*z=(x*z)*y$،

$(a_4)$ اگر $x \leq y$ آنگاه $x*z \leq y*z$، و $z*y \leq z*x$،

$(a_5)$ $(x*z)*(y*z) \leq x*y$

$(a_6)$ $x*(x*(x*y))=x*y$

$(a_7)$ $x*(x*y) \leq y$،

$(a_8)$ $x*y \leq z \Leftrightarrow x*z \leq y$.

**تعریف ۳:** فرض می‌کنیم $X$ یک BCK-جبر است. زیر مجموعه‌ی ناتهی $A$ از $X$ یک

الف) زیر جبر از $X$ نامیده می شود هرگاه تحت عمل $*$، عمل ضرب‌در $X$ ب سته با شد، یعنی، برای هر $x,y \in A$، داشته باشیم $x*y \in A$،

ب) ایده‌آل از $X$ نامیده می‌شـــود هرگاه $0 \in A$ و برای تمام $x,y \in X$، اگر $x*y, y \in A$ آنگاه $x \in A$.

پ) مجموعه‌ی پایینی نامیده می‌شـــود هرگاه برای تمام $x,y \in X$، اگر $y \in A$ و $x \leq y$، آنگاه $x \in A$.

**تعریف ۴:** فرض می‌کنیم $X$ یک BCK-جبر باشد.

الف) $X$ را یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب (خطی) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

ب) می‌گوییم $X$ کران‌دار ا ست اگر دارای بزرگ‌ترین عن صر با شد؛ یعنی $a \in X$ موجود با شد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \leq a$. بزرگ‌ترین عنصر $X$ در صورت وجود با ۱ و $1*X$ با $Nx$ نشان داده می‌شود.

پ) $X$ را جابجایی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم

$$x*(x*y)=y*(y*x)$$

در چنین حالتی $x*(x*y)$ بزرگ‌ترین کران پایین $x,y$ نسبت به رابطه‌ی $\leq$ در $BCK-$ جبر $X$ است و آن را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم،

(ت) $X$ را استلزامی مثبت می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in X$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$(x*y)*z=(x*z)*(y*z).$$

(ث) $X$ را استلزامی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ رابطه‌ی $x*(y*x)=x$ برقرار باشد.

**قضیه ۵:** [۱۰] فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-جبر باشد. آنگاه:

الف) $X$ جابجایی است اگر و تنها اگر برای تمام $x,y \in X$، $x*(x*y) \leq y*(y*x)$.

ب) $X$ استلزامی مثبت است اگر و تنها اگر برای تمام $x,y \in X$، تساوی $(x*y)*y=x*y$ برقرار باشد.

پ) $X$ استلزامی است اگر و تنها اگر جابجایی و استلزامی مثبت باشد.

**تعریف ۶:** فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-جبر جابجایی باشد و $A$ زیر مجموعه‌ی ناتهی از $X$ باشد. مجموعه‌ی $\{x \in X \mid x \wedge a = ۰, \forall a \in A\}$ را با $Ann(A)$ نشان می‌دهیم

**تعریف ۷:** [۱۰] مجموعه‌ی مرتب جزئی $P$ را یک مشبکه می‌نامیم هرگاه برای تمام $x,y \in P$، مجموعه‌ی $\{x,y\}$ دارای کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین باشد. کوچک‌ترین کران بالای این مجموعه را با $x \vee y$ و بزرگ‌ترین کران پایین آن را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۸:** [۷] فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-جبر باشد. $X$ را یک $BCK$-مشبکه می‌نامیم هرگاه نسبت به رابطه‌ی ترتیبش یک مشبکه باشد.

**قضیه ۹:** [۷] فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-جبر جابجایی کران‌دار باشد. آنگاه برای تمام $x,y \in X$، داریم:

الف) $NNx=x$،

ب) $Nx*Ny=y*x$،

پ) $Nx \vee Ny = N(x \wedge y)$ و $Nx \wedge Ny = N(x \vee y)$.

**قضیه ۱۰:** [۷] هر $BCK$-جبر جابجایی و کران‌دار $X$ یک $BCK$- مشبکه جابجایی است که در آن، به ازای تمام $x,y \in X$،

$$x \vee y = N(Nx \wedge Ny) \text{ و } x \wedge y = x*(x*y).$$

**قضیه ۱۱:** [۷] فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$ - مشبکه جابجایی باشد و $x,y,z \in X$، آنگاه
الف) مشبکه‌ی $(X,\leq)$ توزیع‌پذیر است،
ب) $x*(y\vee z)=(x*y)\wedge(x*z)$،
پ) $x*(y\wedge z)=(x*y)\vee(x*z)$،
ت) $(x\vee y)*z=(x*z)\vee(y*z)$،

ازاینجا به بعد منظور از $X$ همان $BCK$-جبر $X$ است.

## ۳-رده‌ی زیر جبرهای شامل مجموعه‌های آغازی

در این بخش، رده‌ای از زیر جبرهای $BCK$-جبرها را معرفی کرده و خواص آن‌ها را موردمطالعه قرار می‌دهیم.

**تعریف ۱۲:** فرض می‌کنیم $y,t$ عناصری از $X$ باشند. قرار می‌دهیم

$$F(y,t)=\{x\in X \mid y*t\leq y*x\}.$$

مشاهده می‌کنیم که برای تمام $y,t\in X$، $0\in F(y,t)$.

**گزاره ۱۳:** برای هر $y\in X$،

$$F(y,0)=\{x\in X \mid y*x=y\}.$$

علاوه بر این، اگر $X$ جابجایی باشد، آنگاه $F(y,0)$ با پوچساز $y$ برابر است.

**اثبات.** فرض می‌کنیم $x\in F(y,0)$ آنگاه $y*0\leq y*x$ و بنابراین $y\leq y*x$. از طرفی دیگر، $y*x\leq y$ در نتیجه $y*x=y$؛ بنابراین $F(y,0)\subseteq\{x\in X \mid y*x=y\}$. عکس رابطه‌ی شمول واضح است.

برای قسمت دوم قضیه مشاهده می‌کنیم که

$$x\in F(y,0)\Leftrightarrow y*x=y\Leftrightarrow y*(y*x)=0\Leftrightarrow x\wedge y=0\Leftrightarrow x\in \mathrm{Ann}(y).$$

**لم ۱۴:** برای هر $y,t\in X$، $y\leq t$ اگر و تنها اگر $F(y,t)=X$.

**اثبات:** فرض می‌کنیم $y\leq t$. آنگاه برای تمام $x\in X$، $y*t=0\leq y*x$؛ بنابراین $X\subseteq F(y,t)$ و ازاین‌رو $F(y,t)=X$.

برعکس، فرض می‌کنیم $F(y,t)=X$؛ بنابراین $y\in F(y,t)$ در نتیجه $y*t\leq y*y=0$ پس $y*t=0$ و لذا $y\leq t$.

**گزاره ۱۵**: به ازای هر $y,t,s \in X$ ،

الف) اگر $t \le s$، آنگاه $F(y,t) \le F(y,s)$،

ب) $A(t) \subseteq F(y,t)$ که در آن $A(t) = \{x \in X \mid x \le t\}$،

پ) $F(y,t)$ یک مجموعه‌ی پایینی است.

ت) اگر $x \in F(y,t)$، آنگاه برای تمام $s \in X$، $x * s \in F(y,t)$.

ث) اگر $s \in F(y,t)$، آنگاه $F(y,s) \subseteq F(y,t)$.

**اثبات:** الف) فرض می‌کنیم $t \le s$. آنگاه

$$y * s \le y * t. \tag{۱}$$

حال فرض می‌کنیم $x \in F(y,t)$؛ بنابراین $y * t \le y * x.$ و با توجه به (۱)، $y * s \le y * x$، در نتیجه $x \in F(y,s)$.

ب) فرض می‌کنیم $x \in A(t)$. آنگاه $x \le t$. در نتیجه با توجه به قضیه‌ی ۲ $(a_۴)$، $y * t \le y * x$ لذا $x \in F(y,t)$؛ بنابراین (ب) برقرار است.

پ) فرض می‌کنیم $x \in F(y,t)$ و $s \le x$. آنگاه بنا به قضیه‌ی ۲ $(a_۴)$، $y * x \le y * s$ ازآنجایی‌که $x \in F(y,t)$، داریم $y * t \le y * s$؛ بنابراین $s \in F(y,t)$ و در نتیجه $F(y,t)$ یک مجموعه‌ی پایینی است.

ت) ازآنجایی‌که $F(y,t)$ یک مجموعه‌ی پایینی است و $x * s \le x$ نتیجه به دست می‌آید.

ث) چون $s \in F(y,t)$، لذا $y * t \le y * s$. حال فرض می‌کنیم $x \in F(y,s)$؛ بنابراین $y * s \le y * x$. چون رابطه‌ی $\le$ متعدی است، نتیجه می‌گیریم که $y * t \le y * x$؛ بنابراین $x \in F(y,t)$ و نتیجه به دست می‌آید.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که $F(y,t)$ و $A(t)$ در حالت کلی لزوماً برابر نیستند.

مثال ۱۶: فرض می‌کنیم $X = \{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و عمل $*$ روی $X$ را توسط جدول زیر مشخص می‌کنیم.

| * | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۳ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۴ | ۴ | ۴ | ۴ | ۰ |

آنگاه $(X;*,0)$ یک BCK-جبر است [۱۰، صفحه‌ی ۳۳۴]. با یک محاسبه‌ی ساده نشان داده می‌شود که $F(1,3)=X$ درحالی‌که $A(3)=\{1,2,3\}$.

**نتیجه ۱۷:** برای تمام $y,t\in X$، $F(y,t)$ یک زیرجبر از $X$ است.

**اثبات:** بدیهی است که $F(y,t)\neq\phi$، زیرا $0\in F(y,t)$. با توجه به گزاره‌ی ۵ (پ)، $F(y,t)$ یک زیر جبر است.

**گزاره‌ی ۱۸:** برای هر $y,s,t\in X$،

الف) $F(y,s*(s*t)),F(y,t*(t*s))\subseteq F(y,s)\cap F(y,t)$.

ب) علاوه بر این، اگر $X$ جابجایی باشد، آنگاه $F(y,t\wedge s)=F(y,s)\cap F(y,t)$.

**اثبات:** الف) با توجه به قضیه‌ی ۲ $(a_7,a_2)$، $t*(t*s)\leq t,s$ و ازاین‌رو، نتیجه با توجه به گزاره‌ی ۱۵(الف) به دست می‌آید.

(ب) فرض می‌کنیم $x\in F(y,t)\cap F(y,s)$. از اینکه $x\in F(y,t)$ نتیجه می‌گیریم $y*t\leq y*x$ و بنابراین $y*(y*x)\leq y*(y*t)$، در نتیجه $x\wedge y\leq y\wedge t$. به‌طور مشابه از این‌که $x\in F(y,s)$، نتیجه می‌گیریم $x\wedge y\leq y\wedge s$؛ بنابراین

$x\wedge y\leq(y\wedge t)\wedge(y\wedge s)=y\wedge(t\wedge s)$، یعنی، $y*(y*x)\leq y*(y*(t\wedge s))$. لذا با استفاده از قضیه‌ی ۲ $(a_6)$، نتیجه می‌گیریم $y*((y*(y*(t\wedge s)))\leq y*x$؛ بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲ $(a_8)$، داریم $y*(t\wedge s)\leq y*x$؛ بنابراین $x\in F(y,t\wedge s)$ پس $F(y,t)\cap F(y,s)\subseteq F(y,t\wedge s)$. توجه می‌کنیم که $t\wedge s=s*(s*t)=t*(t*s)$ و لذا معکوس رابطه‌ی شمول با توجه به (الف) برقرار است و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

**گزاره ۱۹:** فرض می‌کنیم $g:X\to Y$ یک هم‌ریختی از BCK-جبرها باشد، آنگاه

$$g(F(y,t)\subseteq F(g(y),g(t)).$$

**اثبات:** فرض می‌کنیم $s\in g(F(y,t))$. آنگاه $x\in F(y,t)$ موجود است به‌طوری‌که $g(s)=x$. از اینکه $x\in F(y,t)$، نتیجه می‌گیریم که $y*t\leq y*x$ و چون $g$ حافظ ترتیب است، ازاین‌رو، $g(y*t)\leq g(y*x)$ لذا $g(y)*g(t)\leq g(y)*g(x)$ و بنابراین $g(x)\in F(g(y),g(t))$.

**گزاره ۲۰:** فرض می‌کنیم $y,t,s\in X$. آنگاه

الف) $F(y,t)=F(y,s)$ اگر و تنها اگر $y*t=y*s$،

ب) اگر $X$ جابجایی باشد و $t,s\leq y$، آنگاه $F(y,t)=F(y,s)$ اگر و تنها اگر $t=s$.

**اثبات:** الف) فرض می‌کنیم $F(y,t)=F(y,s)$. ازآنجایی‌که $t\in F(y,t)$ داریم $t\in F(y,s)$؛ بنابراین $y*s\leq y*t$. به‌طور مشابه از اینکه $s\in F(y,s)$ نتیجه می‌گیریم $y*t\leq y*s$، بنابراین $y*t=y*s$.

برعکس، فرض می‌کنیم که $y*t=y*s$. آنگاه $x\in F(y,t)$ اگر و تنها اگر $y*t\leq y*x$ اگر و تنها اگر $y*s\leq y*t$ اگر و تنها اگر $x\in F(y,s)$؛ بنابراین $F(y,t)=F(y,s)$.

ب) فرض می‌کنیم $F(y,t)=F(y,s)$. با توجه به (الف)، $y*t=y*s$ و لذا

$$y*(y*t)=y*(y*s).$$

ازآنجایی‌که $X$ جابجایی است، $t\wedge y=s\wedge y$ و از اینکه $t,s\leq y$، نتیجه می‌گیریم $t=s$. عکس گزاره به‌طور بدیهی برقرار است.

از گزاره‌ی ۲۰(ب) نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

**نتیجه ۲۱:** فرض می‌کنیم $X$ جابجایی باشد و $y\in X$. آنگاه برای هر $t,s\in A(y)$،

$$t=s\Leftrightarrow F(y,t)=F(y,s).$$

در مثال زیر نشان می‌دهیم که شرط جابجایی بودن $X$ یک شرط لازم برای نتیجه‌ی فوق است.

مثال ۲۲: فرض می‌کنیم $X=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و عمل $*$ روی $X$ را توسط جدول زیر مشخص می‌کنیم.

| * | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |

آنگاه $(X;*,۰)$ یک BCK-جبر است [۱۰، صفحه‌ی ۳۱۹] که جابجایی نیست زیرا

$$۲*(۲*۳)=۲\neq ۱=۳*(۳*۲).$$

با یک محاسبه‌ی ساده نشان داده می‌شود که $F(۴,۱)=F(۴,۲)=\{۰,۱,۲\}$ درحالی‌که $۲\neq ۱$.

یادآوری می‌کنیم که در حالت کلی تساوی $NNx = x$ برقرار نیست. اگر برای هر $x \in X$، این تساوی برقرار باشد می‌گوییم $X$ برگشت‌پذیر است.

در گزاره‌ی بعدی شرطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرط $X$ برگشت‌پذیر باشد.

**گزاره ۲۳:** اگر $X$ کران‌دار باشد آنگاه عبارات زیر معادل هستند:

الف) $X$ برگشت‌پذیر است.

ب) برای هر $t,s \in X$، اگر $F(۱,t) = F(۱,s)$ آنگاه $t = s$.

**اثبات:** (الف) $\Longleftarrow$ (ب) واضح است که $t \in F(۱,t)$. لذا $t \in F(۱,s)$ و ازاین‌رو $Nt \le Ns$ بنابراین $NNs \le NNt$ و در نتیجه بنا به (الف)، $s \le t$. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد که $t \le s$ و ازاین‌رو $t = s$.

(ب) $\Leftarrow$ (الف) بنا به گزاره‌ی ۲۰(ب)، کافی است نشان دهیم که $F(۱,t) = F(۱,NNt)$. فرض می‌کنیم که $x \in F(۱,t)$. آنگاه $Nt \le Ns$، در نتیجه $NNNt \le NNNs = Nx$ و لذا $x \in F(۱,NNt)$، بنابراین $F(۱,t) \subseteq F(۱,NNt)$. عکس رابطه‌ی شمول از گزاره‌ی ۱۵(الف) و این واقعیت که $NNt \le t$، نتیجه می‌شود.

**قضیه ۲۴:** فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-جبر باشد. شرایط زیر معادل هستند:

الف) $X$ جابجایی خطی است،

ب) به ازای تمام $y,t \in X$ که $y \not\le t$، $F(y,t) = A(t)$.

**اثبات:** (الف) $\Leftarrow$ (ب) فرض می‌کنیم $y \not\le t$ و $z$ یک عنصر دلخواه از $F(y,t)$ باشد. ازآنجایی‌که $X$ خطی است نتیجه می‌گیریم که $y \le z$ یا $z \le y$. اگر $y \le z$، آنگاه $y * z = ۰$ و چون‌که $z \in F(y,t)$ پس $y * t = ۰$ لذا $y \le t$، که با فرض $y \not\le t$ متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $z \le y$. اینک ادعا می‌کنیم $z \le t$. فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی $t \le z$. آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۲( $(a_۴)$،

$$y * z \le y * t \tag{۲}$$

از طرفی دیگر، با توجه به اینکه $z \in F(y,t)$، داریم

$$y * t \le y * z \tag{۳}$$

اکنون از (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $y * z = y * t$. لذا $y * (y * z) = y * (y * t)$؛ بنابراین با توجه به جابجایی بودن $X$،

$$y \wedge z = y \wedge t \tag{۴}$$

ازآنجایی‌که $y \nleq t$ و $X$ خطی است، نتیجه می‌گیریم $t < y$. بنابراین $y \wedge t = t$. همچنین، از $z \leq y$ داریم، $y \wedge z = z$، یعنی، $t = z$ که با فرض $t < z$ متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $z \leq t$ و لذا $z \in A(t)$. بنابراین $F(y,t) \subseteq A(t)$. عکس رابطه‌ی شمول از لم ۱۳(ب)، نتیجه می‌شود و بدین ترتیب تساوی ثابت می‌شود.

(ب) $\Leftarrow$ (الف) ابتدا نشان می‌دهیم $X$ خطی است. فرض می‌کنیم $x, y \in X$. آنگاه با توجه به اینکه $y*(y*x) \leq y$ دو حالت پیش می‌آید

حالت اول: $y*(y*x) = y$.

ازآنجایی‌که $y*(y*x) \leq x$، نتیجه می‌گیریم $y \leq x$.

حالت دوم: $y*(y*x) \neq y$.

آنگاه $y \nleq y*(y*x)$ و لذا از (ب) نتیجه می‌گیریم که $F(y, y*(y*x)) \leq A(y*(y*x))$. با توجه به قضیه‌ی۲ ($a_۴$)،ی ۲شاهده می‌کنیم که $x \in F(y, y*(y*x))$ در نتیجه $x \in A(y*(y*x))$، لذا $x \leq y*(y*x)$ و بنابراین $x \leq y$. در نتیجه $X$ خطی است. حال نشان می‌دهیم که $X$ جابجایی است. برای این منظور فرض می‌کنیم $x, y \in X$. ازآنجایی‌که $X$ خطی است بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود فرض می‌کنیم که $x*(x*y) \leq y*(y*x)$ و نشان می‌دهیم $y*(y*x) \leq x*(x*y)$. گیریم چنین نباشد، آنگاه

$$y*(y*x) \nleq x*(x*y) \quad (۵)$$

و این دلالت می‌کند که $x \nleq x*(x*y)$ لذا با توجه به قضیه‌ی ۲۴ $F(x, x*(x*y)) = A(x*(x*y))$. با بحثی مشابه بالا نتیجه می‌گیریم که $y \in F(x*(x*y))$. پس $y \in A(x*(x*y))$ و لذا $y \leq x*(x*y)$. با توجه به قضیه‌ی۲ ($a_۲$)، $x*(x*y) \leq y$؛ بنابراین $y*(y*x) \leq x*(x*y)$ که با (۵) متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $x*(x*y) = y*(y*x)$ و بنابراین $X$ جابجایی است. بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.

**نمادگذاری ۲۵:** فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-مشبکه‌ی جابجایی باشد. به ازای هر $y \in X$ قرار می‌دهیم

$$L(y, X) := \{F(y,t) \mid t \in X\}$$

و اعمال $\nabla$ و $\Delta$ را روی $L(y,X)$ برای تمام $t, s \in X$، به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$F(y,t) \nabla F(y,s) := F(y, t \wedge s), \quad (۶)$$

$$F(y,t) \Delta F(y,s) := F(y, t \vee s).$$

**قضیه ۲۶:** فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-مشبکه‌ی جابجایی باشد $\nabla$ و $\Delta$ همان اعمالی باشند که در (۶) تعریف شده‌اند. آنگاه، $(L(y,X);\Delta,\nabla)$ یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر کران‌دار است.

**اثبات:** ازآنجایی‌که $t,s \leq t \vee s$، از گزاره‌ی ۱۵(الف) نتیجه می‌گیریم که

$$F(y,t),F(y,s) \subseteq F(y,t \vee s).$$

فرض می‌کنیم $F(y,z) \in L(y,X)$ یک کران بالا برای $F(y,t)$ و $F(y,s)$ باشد؛ یعنی، $F(y,t)$ و $F(y,s)$ زیرمجموعه‌های $F(y,z)$ باشند. ازآنجایی‌که $t \in F(y,t)$ ، نتیجه می‌گیریم $t \in F(y,z)$ و بنابراین $y*z \leq y*t$. به‌طور مشابه، $y*z \leq y*s$؛ بنابراین $y*z \leq (y*t) \wedge (y*s)$ و لذا از قضیه‌ی ۱۱(الف)، نتیجه می‌گیریم که $y*z \leq y*(t \vee s)$ ؛ یعنی $t \vee s \in F(y,z)$. حال با توجه به گزاره‌ی ۱۵(ب)، $F(y,t \vee s) \subseteq F(y,z)$ ؛ بنابراین $F(y,t \vee s)$ کوچک‌ترین کران بالا برای $F(y,t)$ و $F(y,s)$ است. از گزاره‌ی ۱۸(ب)، این نتیجه به دست می‌آید که $F(y,t \wedge s)$ نیز بزرگ‌ترین کران پایین برای $F(y,t)$ و $F(y,s)$ است؛ بنابراین $(L(y,X);\Delta,\nabla)$ یک مشبکه است. با توجه به گزاره‌ی ۱۵(الف)، $F(y,0)$ و $F(y,1)=X$ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برای مجموعه‌ی $L(y,X)$ هستند. لذا $L(y,X)$ کران‌دار است. اینک نشان می‌دهیم که $L(y,X)$ توزیع‌پذیر است. فرض می‌کنیم $y,z,t,s \in X$ آنگاه بنا به (۵) و خاصیت توزیع‌پذیری $X$ داریم

$$\begin{aligned}F(y,z)\Delta(F(y,t)\nabla F(y,s)) &= F(y,z \wedge (t \vee s))\\ &= F(y,(z \wedge t) \vee (z \wedge s))\\ &= F(y,z \wedge t)\Delta F(y,z \wedge s)\\ &= (F(y,z)\Delta F(y,t))\nabla(F(y,z)\Delta F(y,s)).\end{aligned}$$

بنابراین $(L(y,X);\Delta,\nabla)$ یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر کران‌دار است.

**گزاره ۲۷:** فرض می‌کنیم $y,t \in X$. آنگاه $F(y,t)$ کوچک‌ترین عنصر $L(y,X)$ است که دارای ویژگی $A(t) \subseteq F(y,t)$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم $y,t \in X$. با توجه به گزاره‌ی ۱۵(ب)، $A(t) \subseteq F(y,t)$. حال فرض می‌کنیم که $s \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که $A(t) \subseteq F(y,s)$ و نشان می‌دهیم که . $F(y,t) \subseteq F(y,s)$ برای این منظور فرض می‌کنیم $x \in F(y,t)$، آنگاه $y*t \leq y*x$ و با توجه به قضیه‌ی ۲ $(a_8)$، $y*(y*x) \leq t$، یعنی، $y*(y*x) \in A(t)$؛ بنابراین $y*(y*x) \in F(y,s)$. لذا $y*s \leq y*(y*(y*x))$. اینک از قضیه‌ی ۲ $(a_4)$، نتیجه می‌گیریم $y*s \leq y*x$ و بنابراین $x \in F(y,s)$. لذا $F(y,t) \subseteq F(y,s)$. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که $F(y,t)$ لزوماً یک ایده‌آل نیست، حتی اگر $X$ جابجایی باشد.

مثال ۲۸. فرض می‌کنیم $X=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$. عمل "*"روی $X$ را توسط جدول زیر مشخص می‌کنیم.

| * | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۲ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۴ | ۴ | ۲ | ۱ | ۱ | ۰ |

آنگاه $(X;*,۰)$ یک BCK-جبر جابجایی خطی است، [۱۰ صفحه ۳۹۲] با یک محاسبه‌ی ساده نشان داده می‌شود $F(۳,۲)=\{۰,۱,۲,۴\}$ که یک ایده‌آل از $X$ نیست زیرا $۳*۱=۲\in F(۳,۲)$ اما $۳\notin F(۳,۲)$.

در گزاره‌ی بعدی شرطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرط $F(y,t)$ یک ایده‌آل است.

**گزاره ۲۹:** فرض می‌کنیم $X$ یک BCK-جبرجابجایی خطی باشد. آنگاه عبارات زیر معادل هستند:

الف) $X$ استلزامی است،

ب) برای هر $y,t\in X$، $F(y,t)$ یک ایده‌آل از $X$ است.

**اثبات:** (الف) $\Leftarrow$ (ب) فرض می‌کنیم $y,t\in X$. اگر $y\le t$ آنگاه با توجه به لم ۱۲، واضح است که $F(y,t)$ یک ایده‌آل است زیرا $F(y,t)=X$ حال فرض می‌کنیم که $y\not\le t$. آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۲۲، $F(y,t)=A(t)$ بنابراین کافی است نشان دهیم که $A(t)$ یک ایده‌آل از $X$ است. فرض می‌کنیم $y,y*x\in A(t)$. آنگاه $x\le t$ و $y*x\le t$ و لذا $x*t=۰$ و $(y*x)*t=۰$. با توجه به قضیه‌ی ۵(پ)، $X$ استلزامی مثبت است و بنابراین

$(y*x)*t=y*t$. اینک با استفاده از قضیه‌ی ۲ $(a_۳,a_۵)$، داریم،

$$y*t=(y*t)*۰=(y*t)*(x*t)=((y*t)*t)*(x*t)$$
$$\le (y*t)*x=(y*x)*t=۰$$

پس $y*t=۰$ در نتیجه $y\in A(t)$ و بنابراین $A(t)$ یک ایده‌آل از $X$ است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف) با توجه به قضیه‌ی ۵(پ)، کافی است نشان دهیم که $X$ استلزامی است. فرض می‌کنیم $x,y\in X$ آنگاه با توجه به (الف)، $A(x)$ یک ایده‌آل از $X$ است. قرار می‌دهیم،

$w:=y*((y*x)*x)$ و $z:=y*(y*x)$، از اینکه $y*(y*x)\le x$ نتیجه می‌گیریم که $z\in A(x)$. همچنین، با به‌کارگیری اصل موضوعه‌ی $(\text{۱}-BCK)$ و قضیه‌ی ۲ $(a_5,a_7)$ داریم

$$w*z=(y*((y*x)*x))*(y*((y*x))\le(y*x)*((y*x)*x \\ \le y*(y*x)\le x\in A(x).$$

بنابراین $w*z\in A(x)$. با توجه به اینکه $A(x)$ یک ایده‌آل است و $z\in A(x)$ نتیجه می‌گیریم که $w\in A(x)$، یعنی، $y*(y*(y*x))\in A(x)$ پس $y*(y*(y*x))\le x$ و ازاین‌رو با توجه به قضیه‌ی ۲ $(a_8)$، $y*x\le(y*x)*x$. از طرفی دیگر، $(y*x)*x\le y*x$ ؛ بنابراین $(y*x)*x=y*x$ و لذا با توجه به قضیه‌ی ۶(ب)، $X$ استلزامی مثبت است.

**گزاره ۳۰:** فرض می‌کنیم $y,t\in X$. آنگاه به ازای هر $z\in F(y,t)$، $F(y,t)=A(z)$ اگر و تنها اگر $z$ یک کران بالا برای $F(y,t)$ باشد.

**اثبات:** اگر $F(y,t)=A(z)$ نتیجه روشن است. برعکس فرض می‌کنیم $z\in F(y,t)$ یک کران بالا برای $F(y,t)$ باشد. آنگاه به ازای هر $x\in F(y,t)$، $x\le z$. درنتیجه $z\in F(y,t)$ . حال فرض می‌کنیم $x\in A(z)$، یعنی، $x\le z$ و لذا $y*z\le y*x$ از طرفی دیگر، از این‌که $z\in F(y,t)$، داریم $y*t\le y*z$. در نتیجه $y*t\le y*x$ و این دلالت می‌کند که $x\in F(y,t)$؛ بنابراین $A(z)\subseteq F(y,t)$ در نتیجه $A(z)=F(y,t)$.

**گزاره ۳۱:** فرض می‌کنیم $X$ یک $BCK$-مشبکه‌ی جابجایی باشد. آنگاه $F(y,t)$ نیز برای تمام $y,t\in X$ چنین است.

اثبات: چون $F(y,t)$ یک زیر جبر است بنابراین یک $BCK$-جبر جابجایی است. حال فرض می‌کنیم $x,z\in F(y,t)$. در نتیجه $y*t\le y*x$. از طرفی دیگر، $x\wedge z\le x$ در نتیجه $y*x\le y*(x\wedge z)$، لذا $x\wedge z\in F(y,t)$؛ بنابراین $F(y,t)$ تحت عمل $\wedge$ بسته است. همچنین ازآنجایی‌که $y*t\le y*x$، نتیجه می‌گیریم که $y*(y*x)\le t$ و لذا $x\wedge y\le t$. به‌طور مشابه، از $y*t\le y*z$، نتیجه می‌شود که $z\wedge y\le t$. پس $(z\wedge y)\vee(x\wedge y)\le t$. حال از توزیع‌پذیری $X$ نتیجه می‌گیریم که $(x\vee z)\wedge y\le t$. یعنی، $y*(y*(x\vee z))\le t$ و لذا با توجه به قضیه‌ی ۲( $(a_6,a_4)$)، داریم $y*t\le y*(x\vee z)$؛ بنابراین $x\vee z\in F(y,t)$. در نتیجه $F(y,t)$ تحت عمل $\vee$ بسته است. بدین ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله رده‌ای از زیر جبرهای یک BCK-جبر را موردمطالعه قرار داده‌ایم. با به‌کارگیری این رده، انواع مهمی از BCK-جبرها از قبیل BCK-جبرهای جابجایی خطی و BCK-جبرهای استلزامی را توصیف کرده‌ایم. با تعریف دو عمل روی مجموعه‌ی تمام عناصر رده مذکور یک مشبکه‌ی تعویض‌پذیر کران‌دار به دست آورده‌ایم. به‌عنوان کار بعدی می‌توان مفاهیم تعریف شده در این مقاله را برای ساختارهای جبری منطقی دیگر از جمله BCI-جبرها، شبه BCK-جبرها و BL-جبرها بکار برد و نتایجی را به دست آورد.

## تشکر و قدردانی

از داوران محترم مجله به خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب بهبود مقاله شده است و همچنین از حمایت مالی معاونت پژوهش و فن‌آوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه GN: SCU.MM98.155 تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

منابع

**[1]** Imai, Y. Iseki, K. (1960), On axiom systems of propositional calculi, XIV. *Proc. Japan Academy*, **42,**19-22.

**[2]** Iseki, K. (1996), An algebra related with a propositional calculus, *Proc. Japan Academy,* **42**, 26-29.

[3] Iseki, K. (1975), On bounded BCK-algebras, *Math. Seminar Notes,* **3,** 23-33.

[4] Iseki, K. (1980), On BCI-algebra, *Math. Sem. Notes*, **8**, 125-130.

[5] Iseki, K. and Tanaka, S. (1976), Ideal Theory of BCK-algebra, *Math. Japonica*, **21**, 351-366.

[6] Meng, J. (1991), Commutative ideal in BCK-algebra, *Pure Appl. Math. (in P.R. China)*, **9**, 49-53.

[7] Meng, J. and Jun, Y.B. (1994), *BCK-algebra*, Kyung Moon SA, Korea.

[8] Tanaka, S. (1975), A new class of algebras, *Math. Seminar Notes,* **5**, 37-43.

[9] Tanaka, S. (1975), Example of BCK-algebras, *Math. Seminar Notes,* **3**, 75-82.

[10] Yisheng, H. (2006), *BCI-algebra*, Science Press, China.

JAMM (2020) 10(1): 158-171
DOI: 10.22055/JAMM.2020.28257.1678

Shahid Chamran University of Ahvaz

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

# The Smallest Class of Subalgebras of a Commutative BCK-lattice Containing Initial Subsets

Habib Harizavi* and Tayebeh Koochakpoor**

*Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

**Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Payame noor University, Tehran, Iran

Received:January 16 2019 Accepted for publication:January 17 2020
Corresponding author: harizavi@scu.ac.ir


**Abstract:** In this paper, we assume that X is a BCK-algebra and y, t elements of X. We assign to these elements a set, denoted by F(y; t). We show that F(y; t) is a subalgebra of X. Then we prove that a BCK-algebra X is a Linear Commutative BCK-algebra if and only if every F(y; t) is an initial set of X. Moreover, we give a necessary and sufficient condition for F(y; t) to be an ideal. Finally, we show that the set consisting of all these sets forms a bounded distributive lattice.

***Keywords***: BCK-algebra, Commutative BCK-algebra, lattice, Implicative BCK-algebra, Positive implicative BCK-algebra.

**Mathematics Subject Classification** (2010): 10G03, 25G03.