مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۱، ص ۱۷۲-۱۹۵
شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2020.28651.1690

مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های لوماکس با مفصل ارشمیدسی

قباد برمال‌زن*[1]، سیدمسیح آیت**، عباس اکرمی**

*گروه آمار، دانشگاه زابل

**گروه ریاضی، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۱۴

چکیده: در این مقاله به مطالعه ترتیب‌های تصادفی معمولی، ستاره و محدب انتقال‌یافته از سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های ناهمگن و وابسته پرداخته می‌شود. شرایط کافی برای برقراری ترتیب تصادفی ستاره از سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های وابسته لوماکس با چندین دورافتاده اثبات شده است. همچنین نشان داده است بدون هیچ‌گونه محدودیتی روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، طول عمر سیستم‌های سری یا موازی با مؤلفه‌های همگن کوچک‌تر از مؤلفه‌های وابسته ناهمگن، در ترتیب محدب انتقال‌یافته است.

واژه‌های کلیدی: مفصل ارشمیدسی، ترتیب‌های تصادفی، توزیع لوماکس، سیستم‌های سری، سیستم‌های موازی، ترتیب بیشاندن.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۰E۱۵، ۹۰B۲۵.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین اهداف قابلیت اعتماد، تعیین ساختار سیستم‌های پیچیده و افزایش طول عمر سیستم‌ها است. برای این منظور، سیستم‌های متفاوتی در قابلیت اعتماد تعریف شده است که یکی از پرکاربردترین آن‌ها سیستم $n-k+1$ از n است. سیستم $n-k+1$ از n سیستمی است که برای فعال بودن آن، فعالیت حداقل $n-k+1$ مؤلفه از آن، لازم و ضروری است. با این تعریف، سیستم موازی یک سیستم ۱ از n و سیستم سری یک سیستم n از n است. فرض

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ghobad.barmalzan@gmail.com

کنید $X_1,\ldots,X_n$ بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم و $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ بیانگر آماره‌های مرتب، متناظر با این متغیرهای طول عمر باشند. به‌سادگی می‌توان مشاهده نمود که $X_{k:n}$ بیانگر طول عمر یک سیستم $n-k+۱$ از n است. این ارتباط مفید باعث شده است نظریه آماره‌های مرتب در تعیین خواص سیستم‌های $n-k+۱$ از n به‌طور وسیع، مورد استفاده قرار گیرد. آماره‌های مرتب، در سایر شاخه‌های آمار مانند استنباط آماری، تحلیل بقا، کنترل کیفیت و آزمون‌های طول عمر، نقش مهمی را ایفا می‌کنند. برای آگاهی بیشتر در مورد آماره‌های مرتب و کاربردهای آن می‌توان به بارلو و پروشان [۱]، آرنولد و همکاران [۲] و دیوید و ناگاراجا [۳] مراجعه نمود.

پدیده‌های تصادفی اغلب پیچیده هستند. مدل‌سازی آن‌ها و تعیین کران‌ها و تقریب‌ها برای مشخصه‌های موردتوجه و مهم آن‌ها از دیدگاه کاربردی مهم و مفید هستند. به‌عبارت‌دیگر، تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده‌تر و یا به‌وسیله یک مدل که از مؤلفه‌های ساده تشکیل‌شده است می‌تواند کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب مدل موردمطالعه نتیجه دهد. ایده ترتیب تصادفی نخستین بار توسط لی‌من [۴] ارائه شد و با گذشت سال‌ها، ترتیب‌های تصادفی مختلفی برای مقایسه توزیع‌های احتمال معرفی گردیده است.

نویسندگان زیادی روی مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن مستقل کار کرده‌اند. این مقایسه‌ها برای زمانی که مؤلفه‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کنند به‌طور گسترده موردتوجه بسیاری از آماردانان قرارگرفته است. بسیاری از نتایج به‌دست‌آمده از مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های نمایی، به سایر توزیع‌ها تعمیم داده‌شده است. مثلاً خالدی و کوچار [۵]، کوچار و زو [۶ و ۷] و فانگ و ژانگ [۸] نتایج را به توزیع وایبول، ژائو و بالاکریشنان [۹] و بالاکریشنان و ژائو [۱۰] نتایج را برای حالت گاما، برمال زن و همکاران [۱۱] نتایج را برای نمایی تعمیم‌یافته، برمال‌زن و همکاران [۱۲] نتایج را به وایبول-هندسی نمایی‌شده و برمال‌زن و همکاران [۱۳] نتایج را برای مدل کلی مقیاس، تعمیم دادند.

اکثر مطالعات در مورد مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی با فرض مستقل بودن مؤلفه‌ها و بدون در نظر گرفتن وابستگی بین متغیرها انجام شده است. در این مقاله، به مقایسه تصادفی این‌گونه سیستم‌ها با لحاظ کردن وابستگی میان مؤلفه‌های سیستم با استفاده ازتابع مفصل ارشمیدسی پرداخته می‌شود. واژه مفصل از دو دیدگاه قابل تفسیر است. از یک دیدگاه، مفصل تابعی است که تابع توزیع توأم را به توابع توزیع کنارهای آن مرتبط می‌سازد و از دیدگاه دیگر، تابع مفصل یک تابع توزیع است که توابع توزیع کناری‌های آن دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(۰,۱)$ هستند. تابع مفصل یک معیار آماری مفید با کاربردهای زیراست: ۱) بررسی وابستگی غیرخطی، ۲) توانایی اندازه‌گیری وابستگی برای توزیع‌های دم‌سنگین ۳) انعطاف‌پذیری برای داده‌های پارامتری، نیمه پارامتری و ناپارامتری.

توابع مفصل براساس نوع ساختارشان به کلاس‌های مختلفی تقسیم می‌شوند. از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به کلاس خانواده مفصل‌های ارشمیدسی، دوجمله‌ای و مقدار فرین اشاره کرد. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد تابع مفصل و کاربردهای آن، به نلسن [۱۴] مراجعه شود. در سال‌های اخیر، نویسندگان زیادی به مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های وابسته تحت مفصل ارشمیدسی پرداخته‌اند که از جمله آن‌ها می‌توان به رضاپور و علامت‌ساز [۱۵]، لی و فانگ [۱۶]، لی و لی [۱۷]، لی و همکاران [۱۸]، فانگ و همکاران [۱۹]، ژانگ و همکاران [۲۰] و فانگ و لی [۲۱] اشاره کرد.

توزیع لوماکس یکی از توزیع‌های انعطاف‌پذیر و دم‌سنگین است که کاربردی وسیعی در قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، اقتصاد و بیم‌سنجی، نظریه صف و مدل‌های ترافیک اینترنت دارد. متغیر تصادفی X دارای توزیع لوماکس با پارامتر شکل $\alpha>0$ و پارامتر مقیاس $\lambda>0$ است ($X\sim Lomax(\alpha,\lambda)$) هرگاه دارای تابع توزیع احتمال زیر باشد:

$$F(x;\alpha.\lambda)=1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ x>0.$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد این توزیع و کاربردهای آن، به جانسون و همکاران [۲۲] و نادب و ترابی [۲۳] مراجعه نمایید.

در بخش ۲ مقاله، تعاریف و مفاهیم موردنیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، نظریه بیشاندن و تابع مفصل ارشمیدسی، ارائه شده است. ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی و سری متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن وابسته با توزیع لوماکس، در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ به مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی و سری از لحاظ ترتیب محدب انتقال‌یافته پرداخته شده است. سرانجام، در بخش ۵ به بررسی ترتیب تصادفی ستاره بین این‌گونه سیستم‌ها در مدل لوماکس با چندین دور افتاده پرداخته شده است.

۲- تعاریف و مفاهیم موردنیاز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم موردنیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، نظریه بیشاندن و تابع مفصل ارشمیدسی ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آن‌ها استفاده می‌شود.

تعریف ۱: *(شیکد و شانتیکومار، [۲۴]). فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع توزیع $F(x)=P(X\le x)$ و $G(x)=P(Y\le x)$ توابع بقای $\bar{F}(x)=1-F(x)$ و $\bar{G}(x)=1-G(x)$ باشند. در ترتیب تصادفی معمولی، کوچک‌تر از Y است ($X\le_{st} Y$) X هرگاه: $x\ge 0$, $\bar{F}(x)\le\bar{G}(x)$.*

در توزیع‌های آماری، یک کمیت که به‌عنوان اندازه‌ای از نامتقارن بودن توزیع‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد چولگی است. ون‌زویت [۲۵] یک معیار معروف تحت عنوان ترتیب محدب انتقال‌یافته معرفی کردند که چولگی دو متغیر تصادفی را مقایسه می‌کند. در حقیقت ترتیب محدب انتقال‌یافته بیان می‌کند که چولگی به راست یک توزیع بزرگ‌تر از توزیع دیگری است. ترتیب تصادفی ستاره که ضعیف‌تر از ترتیب محدب انتقال‌یافته است یکی دیگر از ابزارهای اساسی است که چولگی دو متغیر تصادفی را مقایسه می‌کند. برای مطالعه بیشتر در مورد ترتیب‌هایی که چولگی متغیرهای تصادفی را مقایسه می‌کنند می‌توان به اوجا [۲۶]، مارشال و اولکین [۲۷] مراجعه نمود.

تعریف ۲: *(شیکد و شانتیکومار [۲۴]) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع معکوس از راست پیوسته F^{-1} و G^{-1} باشند.*

(الف) X در ترتیب تصادفی محدب انتقال‌یافته کوچک‌تر از Y است $(X \le_c Y)$ هرگاه $G^{-1}F(x)$ تابعی محدب نسبت به $x > 0$ باشد.

(ب) X در ترتیب تصادفی ستاره کوچک‌تر از Y است $(X \le_* Y)$ هرگاه $G^{-1}F(x)/x$ تابعی صعودی نسبت به $x > 0$ باشد.

برای آگاهی بیشتر از جزئیات ترتیب‌های تصادفی یک متغیره و چند متغیره، می‌توان به مولر و استویان [۲۴] و شیکد و شانتیکومار [۲۸] مراجعه نمود.

تعریف ۳: *(مارشال و همکاران، [۲۷]). فرض کنید* $\{a_{1:n},\dots,a_{n:n}\}$ و $\{b_{1:n},\dots,b_{n:n}\}$ *به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای* $a=(a_1,\dots,a_n)$ و $b=(b_1,\dots,b_n)$ *باشند. بردار a به معنای بیشاندن کوچک‌تر از بردار b است* $(a \overset{m}{\preceq} b)$ *هرگاه*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j:n} = \sum_{j=1}^{n} b_{j:n}, \quad \sum_{j=1}^{i} a_{j:n} \ge \sum_{j=1}^{i} b_{j:n}. \quad i=1,\dots,n-1.$$

تعریف ۴: *(مارشال و همکاران [۲۷]). فرض کنید* $a=(a_1,\dots,a_n)$ و $b=(b_1,\dots,b_n)$ *دو بردار باشند. تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شُور-محدب نامیده می‌شود هرگاه*

$$a \overset{m}{\preceq} b \Rightarrow \phi(a) \le \phi(b).$$

همچنین، تابع ϕ شُور-مقعر نامیده می‌شود هرگاه جهت نامساوی فوق، عوض شود.

لم ۱: *(مارشال و همکاران [۲۷]) فرض کنید* $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ *یک بازه باز و* $\phi:\mathbb{I}^n\to\mathbb{R}$ *یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع* ϕ *روی* $\mathbb{I}^n$ *شُور-محدب (شُور-مقعر) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر*

(الف) تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ متقارن باشد.

(ب) برای هر $i\neq j$ و هر $z\in\mathbb{I}^n$

$$(z_i-z_j)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z_i}(z)-\frac{\partial\phi}{\partial z_j}(z)\right)\geq 0(\leq 0).$$

که در آن $\frac{\partial\phi}{\partial z_i}$ بیانگر مشتق جزئی تابع ϕ نسبت به مؤلفه i-ام است.

تعریف ۵: *تابع حقیقی مقدار* h *را یک تابع* n*-یکنوا روی بازه* $(a,b)\subset[-\infty,+\infty]$ *نامند هرگاه*

$$(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}h(x)>0,\quad x\in(a,b),\ k=0,\dots,n-2,$$

و تابع $(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}h(x)$ تابعی نزولی و محدب در بازه (a,b) باشد.

تعریف ۶: *برای تابع* n*-یکنوا* $\psi:[0,\infty)\to[0,1]$ *با* $\psi(0)=1$ *و* $\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0$ *فرض کنید* $\psi=\phi^{-1}$ *معکوس از راست پیوسته باشد. تابع* C_ψ *را مفصل ارشمیدسی با تابع مولد* ψ *نامند هرگاه*

$$C_\psi(u_1,\dots,u_n)=\psi(\phi(u_1)+\cdots+\phi(u_n)),\quad u_i\in[0,1],\ i=1,\dots,n.$$

لازم به یادآوری است که تابع g یک تابع زبرجمعی نامیده می‌شود هرگاه $g(x+y)\geq g(x)+g(y)$ باشد. براساس لم $A1$ از لی و فانگ [۱۶]، برای دو تابع مفصل ارشمیدسی n-بعدی $C_{\psi_1}(u)$ و $C_{\psi_2}(u)$ با توابع مولد به ترتیب ψ_1 و ψ_2 و توابع معکوس ϕ_1 و ϕ_2 اگر $\phi_2\circ\psi_1$ دارای خاصیت زبرجمعی باشد آنگاه $C_{\psi_1}(u)\leq C_{\psi_2}(u)$ است. در این حالت برای زیر خانواده‌های زیادی از مفصل‌های ارشمیدسی، خاصیت زیرجمعی $\phi_2\circ\psi_1$ به‌صورت زیر تفسیر می‌شود: ضریب همبستگی کندال τ از یک تابع مفصل با مولد ψ_2 بزرگ‌تر از ضریب همبستگی کندال با مولد ψ_1 است و در نتیجه دارای وابستگی مثبت بیشتری است [۲۰].

۳- ترتیب تصادفی معمولی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن وابسته لوماکس پرداخته می‌شود.

قضیه ۱: *فرض کنید $X_i \sim Lomax(\alpha_i,\lambda)$ ، $i=1,...,n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی لوماکس باشند که از مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ψ_1 پیروی کنند. همچنین فرض کنید $Y_i \sim Lomax(\gamma_i,\lambda)$ ، $i=1,...,n$ یک مجموعه دیگر از متغیرهای تصادفی لوماکس باشند که از مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ψ_2 پیروی کنند. اگر $\phi_2 \circ \psi_1$ تابعی زبرجمعی، ψ_1 یا ψ_2 لوگ-محدب و $x\phi_1^{'}(1-x)$ نزولی باشند آنگاه*

$$(\gamma_1,...,\gamma_n)\overset{m}{\preceq}(\alpha_1,...,\alpha_n) \Rightarrow X_{n:n} \le_{st} Y_{n:n}.$$

اثبات: تابع توزیع $X_{n:n}$ و $Y_{n:n}$ عبارتند از:

$$F_{X_{n:n}}(x)=\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right],\quad x>0,$$

$$F_{Y_{n:n}}(x)=\psi_2\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_2\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i}\right)\right],\quad x>0,$$

خاصیت زبرجمعی $\phi_2 \circ \psi_1$ نتیجه می‌دهد:

$$\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i})\right]\le\psi_2\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_2(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i})\right],$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود

$$\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]\le\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i}\right)\right],$$

فرض کنید $\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)=\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]$ طبق تعریف ۴ باید نشان داده شود $\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ تابعی شُور-مقعر در $(\alpha_1,....\alpha_n)$ است. مشتق جزئی از $\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ نسبت به α_j عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)=\psi_1'\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]\ln(1+\frac{x}{\lambda})\times(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j}\times\phi_1'(1-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j}).$$

تابعی $\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ است و در نتیجه $\psi_1'\leq 0$ یکنوا هست بنابراین n-تابعی ψ_1 چون صعودی است. از طرفی برای $i\neq j$ داریم:

$$I=(\alpha_i-\alpha_j)\left(\frac{\partial\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)}{\partial\alpha_j}\right)$$
$$=\psi_1'\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]\ln(1+\frac{x}{\lambda})(\alpha_i-\alpha_j)$$
$$\times\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i}\times\phi_1'(1-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i})-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j}\times\phi_1'(1-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j})\right),$$

نزولی بودن $t\phi_1'(1-t)$ باعث می‌شود که $(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\times\phi_1'(1-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha})$ تابعی صعودی از α باشد و در نتیجه I همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است. بنابراین $\Psi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ تابعی شُور-مقعر در بردار $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ است.

قضیه ۲: *تحت مفروضات قضیه ۱، اگر $\phi_2\circ\psi_1$ تابعی زبرجمعی، ψ_1 یا ψ_2 لوگ-محدب و $x\phi_1'(x)$ صعودی باشند آنگاه*

$$(\gamma_1,...,\gamma_n)\overset{m}{\preceq}(\alpha_1,...,\alpha_n)\Rightarrow X_{1:n}\leq_{st}Y_{1:n},$$

اثبات: تابع توزیع $X_{1:n}$ و $Y_{1:n}$ عبارتند از:

$$F_{X_{1:n}}(x)=1-\psi\left[\sum_{i=1}^{n}\phi\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i}\right)\right],\quad x>0,$$

$$F_{Y_{1:n}}(x)=1-\psi\left[\sum_{i=1}^{n}\phi\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\gamma_i}\right)\right],\ x>0.$$

خاصیت زبرجمعی $\phi_2\circ\psi_1$ نتیجه می‌دهد:

$$\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i})\right]\leq\psi_2\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_2(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i})\right],$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود

$$1-\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]\geq 1-\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma_i}\right)\right],$$

فرض کنید $\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)=1-\psi_1\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]$ طبق تعریف ۴ باید نشان داده شود $\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)$ تابعی شُور-محدب در $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ است. مشتق جزئی از $\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)$ نسبت به α_j عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)=\psi'\left(\sum_{i=1}^{n}\phi\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i}\right)\right)\ln(1+\frac{x}{\lambda})\times\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_j}\times\phi'((1+\frac{x}{\lambda_i})^{-\alpha_j})$$

از طرفی برای $i\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}I&=(\alpha_i-\alpha_j)\left(\frac{\partial\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)}{\partial\alpha_j}\right)\\&=\psi_1'\left[\sum_{i=1}^{n}\phi_1\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha_i}\right)\right]\ln(1+\frac{x}{\lambda})(\alpha_i-\alpha_j)\\&\times\left[(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i}\times\phi_1'((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_i})-(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j}\times\phi_1'((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha_j})\right],\end{aligned}$$

صعودی بودن $t\phi_1'(t)$ باعث می‌شود که $(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\times\phi_1'((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha})$ تابعی نزولی از α باشد و در نتیجه I همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. بنابراین $\Upsilon(\alpha_1,...,\alpha_n)$ تابعی شُور-محدب در بردار $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ است.

تذکر ۱: *خاصیت زبرجمعی بودن $\phi_2\circ\psi_1$ و لوگ-محدب بودن ψ_1 و ψ_2 در قضایای ۱ و ۲ کاملاً کلی هستند و ساختن آن‌ها در خانواده مفصل‌های ارشمیدسی، کار ساده‌ای است. برای مثال:*

(الف) مفصل کلایتون با $\psi(t)=(\theta t+1)^{-1/\theta}$ را برای $\theta\geq 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\psi_1(t)=(\alpha t+1)^{-1/\alpha},\quad \psi_2(t)=(\beta t+1)^{-1/\beta}.$$

واضح است به ازای $t\in[0,1]$ تابع $\log\psi_1(t)=-\alpha^{-1}\log(\alpha t+1)$ محدب است. از طرف دیگر $\phi_2\circ\psi_1(t)=\beta^{-1}[(\alpha t+1)^{\beta/\alpha}-1]$ است. با دو بار مشتق گرفتن از $\phi_2\circ\psi_1$ نسبت به t، برای

$\circ \le \alpha \le \beta$ می‌توان مشاهده نمود $[\phi_{۲} \circ \psi_{۱}(t)]'' \ge \circ$ است. بنابراین $\phi_{۲} \circ \psi_{۱}$ به ازای $t \in [\circ,۱]$ محدب است که خاصیت زبرجمعی بودن را نتیجه می‌دهد.

(ب) مفصل علی-میخائیل-حق با $\psi(t) = (۱-\theta)/(e^t-\theta)$ را برای $\circ \le \theta < ۱$ را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان نشان داد تابع $\log\psi(t) = \log(۱-\theta) - \log(e^t-\theta)$ تابعی محدب نسبت به $t \in [\circ,۱]$ است. فرض کنید

$$\psi_{۱}(t) = (۱-\alpha)/(e^t-\alpha), \psi_{۲}(t) = (۱-\beta)/(e^t-\beta), \circ \le \alpha < \beta < ۱.$$

بدیهی است $\phi_{۲} \circ \psi_{۱}(t) = \ln[\{(۱-\beta)/(۱-\alpha)\}(e^t-\alpha)+\beta]$ است. اکنون با مشتق گرفتن از $\phi_{۲} \circ \psi_{۱}(t)$ نسبت به t برای $\circ \le \alpha \le \beta$ می‌توان مشاهده نمود

$$[\phi_{۲} \circ \psi_{۱}(t)]' = (\{(\beta-\alpha)/(۱-\beta)\}e^t+۱)^{-۱}, \quad \circ \le \alpha < \beta < ۱,$$

تابعی صعودی برحسب $t \in [\circ,۱]$ است. بنابراین $\phi_{۲} \circ \psi_{۱}(t)$ به ازای $t \in [\circ,۱]$ تابعی زبرجمعی است.

تذکر۲: *لازم است توجه شود که خاصیت نزولی بودن* $t\phi_{۱}'(۱-t)$ *و صعودی بودن* $t\phi_{۱}'(t)$ *در قضایای ۱ و ۲ کاملاً کلی هستند و قابل‌بررسی در خانواده مفصل‌های ارشمیدسی هستند. برای مثال، فرض کنید* $\phi(t) = \theta(t^{-۱/\theta}-۱)$ *باشد. واضح است* $\phi_{۱}'(t) = -t^{-\frac{\theta+۱}{\theta}}$ *و در نتیجه*

$$t\phi_{۱}'(t) = -t^{-۱/\theta}, \quad \theta > ۱.$$

با مشتق گرفتن از $t\phi_{۱}'(t)$ نسبت به t، می‌توان مشاهده نمود $t\phi_{۱}'(t)$ تابعی صعودی در $t \in [\circ,۱]$ است.

همچنین $t\phi_{۱}'(۱-t) = -t(۱-t)^{-\frac{\theta+۱}{\theta}}$ ، $۱ < \theta$، اکنون با مشتق گرفتن از $t\phi_{۱}'(۱-t)$ نسبت به t داریم

$$(t\phi_{۱}'(۱-t))' = -(۱-t)^{-\frac{\theta+۱}{\theta}-۱}(۱+\frac{۱}{\theta}t),$$

که نشان می‌دهد $t\phi_{۱}'(۱-t)$ تابعی نزولی از $t \in [\circ,۱]$ است.

۴- ترتیب تصادفی محدب انتقال‌یافته

در این بخش، به بررسی ترتیب تصادفی محدب انتقال‌یافته بین سیستم‌های موازی و سری متشکل از مؤلفه‌های لوماکس، پرداخته می‌شود.

قضیه ۳: *فرض کنید $X_i \sim Lomax(\alpha_i,\lambda)$ ، $i=1,\dots,n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی لوماکس و $Y_i \sim Lomax(\alpha,\lambda)$ ، $i=1,\dots,n$ یک مجموعه دیگر از متغیرهای تصادفی لوماکس باشند که از مفصل ارشمیدسی با تابع مولد مشترک ψ پیروی کنند. اگر ψ لوگ-مقعر باشند آنگاه $X_{n:n} \le_c Y_{n:n}$.*

اثبات: توابع توزیع $X_{n:n}$ و $Y_{n:n}$ به ترتیب عبارتند از:

$$F_{X_{n:n}}(x)=\psi\left[\sum_{i=1}^{n}\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right)\right],\quad x>0,$$

$$F_{Y_{n:n}}(x)=\psi\left[n\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)\right],\quad x>0,$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود $F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))$ تابعی محدب در $x>0$ است. می‌توان نشان داد

$$F^{-1}_{Y_{n:n}}(x)=\lambda\left(\left[1-\psi(\frac{1}{n}\phi(x))\right]^{\frac{-1}{\alpha}}-1\right)$$

$$F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))=\lambda\left(\left[1-\psi(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right))\right]^{\frac{-1}{\alpha}}-1\right)$$

فرض کنید $L(x)=\psi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right)\right)$ باشد. در این صورت

$$F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))=\lambda(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}}-\lambda.$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))}{\partial x}=\frac{\lambda}{\alpha}L'(x)(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-1},$$

$$\frac{\partial^2 F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))}{\partial x^2}=\frac{\lambda}{\alpha}\left[L''(x)(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-1}+(\frac{1}{\alpha}+1)L'^{2}(x)(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-2}\right]$$

$$=\frac{\lambda}{\alpha}(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-2}\left[L''(x)(1-L(x))+(\frac{1}{\alpha}+1)L'^{2}(x)\right]$$

$$=\frac{\lambda}{\alpha}(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-2}\left[L''(x)+\frac{1}{\alpha}L'^{2}(x)+(L'^{2}(x)-L''(x)L(x))\right].$$

چون ψ تابعی n-یکنوا است در نتیجه $\psi'\leq 0$ و $\psi''\geq 0$ لذا $L''(x)\geq 0$ است. از طرفی، چون $\psi(t)$ تابعی لوگ-مقعر فرض شده است بنابراین $\psi''\psi-\psi'^2\leq 0$ بوده و در نتیجه

$$\frac{\lambda}{\alpha}(1-L(x))^{\frac{-1}{\alpha}-2}\left[L''(x)+\frac{1}{\alpha}L'^{2}(x)+(L'^{2}(x)-L''(x)L(x))\right]\geq 0.$$

که نشان می‌دهد $F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))$ تابعی محدب از x است.

قضیه ۴: *تحت مفروضات قضیه ۳، اگر ψ لوگ-مقعر باشند آنگاه $X_{1:n}\leq_c Y_{1:n}$.*

اثبات: توابع توزیع $X_{1:n}$ و $Y_{1:n}$ به ترتیب عبارتند از:

$$F_{X_{1:n}}(x)=1-\psi\left[\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right)\right],\quad x>0,$$

$$F_{Y_{1:n}}(x)=1-\psi\left[n\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)\right],\quad x>0,$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود $F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))$ تابعی محدب در $x>0$ است. می‌توان نشان داد

$$F^{-1}_{Y_{1:n}}(x)=\lambda\left[\psi(\frac{1}{n}\phi(1-x))^{\frac{-1}{\alpha}}-1\right],$$

$$F^{-1}_{Y_{1:n}}(F_{X_{1:n}}(x))=\lambda\left(\left[\psi(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right))\right]^{\frac{-1}{\alpha}}-1\right).$$

فرض کنید $L(x)=\psi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}\right)\right)$ باشد. در این صورت

$$F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))=\lambda L^{\frac{-1}{\alpha}}(x)-\lambda.$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))}{\partial x}=-\frac{\lambda}{\alpha}L'(x)L^{\frac{-1}{\alpha}-1}(x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F^{-1}_{Y_{n:n}}(F_{X_{n:n}}(x))}{\partial x^2}&=-\frac{\lambda}{\alpha}\left[L''(x)L^{\frac{-1}{\alpha}-1}(x)-(\frac{1}{\alpha}+1)L'^2(x)L^{\frac{-1}{\alpha}-2}(x)\right]\\&=-\frac{\lambda}{\alpha}L^{\frac{-1}{\alpha}-2}(x)\left[L''(x)L(x)-L'^2(x)-\frac{1}{\alpha}L'^2(x)\right]\end{aligned}$$

چون ψ تابعی لوگ-مقعر فرض شده است بنابراین $L''L-L'^2\leq 0$ بوده و در نتیجه

$$-\frac{\lambda}{\alpha}L^{\frac{-1}{\alpha}-2}(x)\left[L''(x)L(x)-L'^2(x)-\frac{1}{\alpha}L'^2(x)\right]\geq 0,$$

که نشان می‌دهد $F^{-1}_{Y_{1:n}}(F_{X_{1:n}}(x))$ تابعی محدب برحسب x است. □

تذکر۳: *نکته‌ای که لازم است توجه شود این است که شرط لوگ-مقعر بودن در قضایای ۳و ۴ کاملاً کلی است و بررسی کردن این شرط در خانواده مفصل‌های ارشمیدسی، کار ساده‌ای است. برای مثال، مفصل گامبل-هوگارد با تابع مولد $\psi(t)=e^{1-(1+t)^{\theta}}$ را برای $\theta\geq 1$ در نظر بگیرید. واضح است $\log\psi(t)=1-(1+t)^{\theta}$ تابعی مقعر برحسب $t\in[0,1]$ است.*

۵- ترتیب ستاره

در این بخش به بررسی ترتیب ستاره بین سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های لوماکس با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود. بدین منظور از لم پرکاربرد زیر، جهت مشخصه‌سازی ترتیب ستاره در خانواده توزیع‌های پارامتری استفاده می‌شود.

لم ۲: *(ساندرز و موران، [۲۹]) فرض کنید $\{F_\theta \mid \theta\in\mathbb{R}\}$ یک کلاس از توزیع‌ها باشد به‌طوری‌که F_θ روی بازه $(t_0,t_1)\subseteq\mathbb{R}^+$ متمرکزشده باشد. در این صورت:*

$$F_\theta \leq_* F_{\theta^*}, \theta \leq \theta^*;\ \theta, \theta^* \in \mathbb{R},$$

اگر و فقط اگر $F_\theta'(t)/t\, f_\theta(t)$ تابعی نزولی نسبت به t باشد جایی که F_θ' مشتق از F_θ نسبت به θ است.

قضیه ۵: فرض کنید

$$X_i \sim Lomax(\alpha_1, \lambda), \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$X_j \sim Lomax(\alpha_2, \lambda),\ j = p+1, \ldots, n.$$

تحت تابع مفصل ارشمیدسی با تابع مولد مشترک ψ باشند. همچنین فرض کنید

$$Y_i \sim Lomax(\gamma_1, \lambda), \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$Y_j \sim Lomax(\gamma_2, \lambda),\ j = p+1, \ldots, n.$$

تحت تابع مفصل ارشمیدسی با تابع مولد مشترک ψ باشند. اگر $\ln(t)\left[1 - \frac{t\phi''(1-t)}{\phi'(1-t)}\right]$ صعودی و نابرابری $(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \geq 0$ برقرار باشد آنگاه

$$(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{p}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{q}) \overset{m}{\preceq} (\underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_1}_{p}, \underbrace{\gamma_2, \ldots, \gamma_2}_{q}) \Rightarrow Y_{n:n} \leq_* X_{n:n},$$

که در آن $p+q=n$ است.

اثبات: با فرض برقراری شرط $(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \geq 0$ و بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $\alpha_1 \leq \alpha_2$ و $\gamma_1 \leq \gamma_2$ باشد. بنابراین $(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{p}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{q}) \overset{m}{\preceq} (\underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_1}_{p}, \underbrace{\gamma_2, \ldots, \gamma_2}_{q})$ اگر و فقط اگر

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \gamma_2,\ p\alpha_1 + q\alpha_2 = p\gamma_1 + q\gamma_2 = k.$$

قرار دهید $\gamma_2 = \gamma$ ، $\alpha_2 = \alpha$ ، $\alpha_1 = (k - q\alpha)/p$ و $\gamma_1 = (k - q\gamma)/p$ تحت این نمادها، توابع توزیع $X_{n:n}$ و $Y_{n:n}$ به ازای $x > 0$ به ترتیب عبارتند از:

$$F_\alpha(x) = \psi\left[p\phi\left(1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha - k}{p}}\right) + q\phi\left(1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)\right],$$

$$F_\gamma(x)=\psi\left[p\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\gamma-k}{p}}\right)+q\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma}\right)\right].$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است $\frac{F'_\alpha(x)}{xf_\alpha(x)}$ تابعی نزولی برحسب α به ازای $\alpha\in(k/n,k/q]$باشد. مشتق F_α نسبت به α عبارت است از:

$$F'_\alpha(x)=\psi'\left[p\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha-k}{p}}\right)+q\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)\right]B_1,$$

که در آن

$$B_1=-q\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{q\alpha-k}{p}}\phi'\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha-k}{p}}\right)$$
$$+q\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\phi'\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)$$

است. از طرف دیگر، تابع چگالی احتمال متناظر با F_α عبارت است از :

$$f_\alpha(x)=\psi'\left[p\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha-k}{p}}\right)+q\phi\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)\right]B_2,$$

که در آن

$$B_2=\frac{k-q\alpha}{\lambda}(1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{q\alpha-k}{p}-1}\phi'\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha-k}{p}}\right)$$
$$+\frac{q\alpha}{\lambda}(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha-1}\phi'\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right).$$

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{F'_\alpha(x)}{xf_\alpha(x)} \\
&= \left[-\frac{(k-q\alpha)x}{q\lambda(1+\frac{x}{\lambda})\ln(1+\frac{x}{\lambda})} + \frac{x(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha-1}\frac{k}{\lambda}\phi'\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)}{B_1} \right]^{-1} \\
&= \left[-\frac{(k-q\alpha)x}{q\lambda(1+x/\lambda)\ln(1+x/\lambda)} + C \right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

که

$$
C = \left[\frac{q\lambda}{kx}\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})\left(1-\frac{t_2\phi'(1-t_2)}{t_1\phi'(1-t_1)}\right) \right]^{-1},
$$

$$
t_1 = \left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ t_2 = \left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha-k}{p}}.
$$

باید توجه داشت $\frac{\lambda}{x}\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})$ تابعی صعودی مثبت برحسب x است. در نتیجه $\frac{F'_\alpha}{xf_\alpha(x)}$نزولی است هرگاه

$$
\Omega(x) = 1-\frac{t_2\phi'(1-t_2)}{t_1\phi'(1-t_1)}
$$

با استفاده از این واقعیت که $\alpha \in (k/n, k/q]$ می‌توان نتیجه گرفت که $t_1 \le t_2$ است. لذا کافی است نشان داده شود $\Omega(x)$ تابعی نزولی برحسب x است. با مشتق گرفتن از $\Omega(x)$ نسبت به x داریم:

$$
\begin{aligned}
\Omega'(x) &\overset{sgn}{=} -t_1\phi'(1-t_1)\left[t'_2\phi'(1-t_2)-t_2t'_2\phi''(1-t_2)\right]+t_2\phi'(1-t_2)\left[t'_1\phi'(1-t_1)-t_1t'_1\phi''(1-t_1)\right] \\
&= -t'_2t_1\phi'(1-t_1)\left[\phi'(1-t_2)+t_2\phi''(1-t_2)\right]+t'_1t_2\phi'(1-t_2)\left[\phi'(1-t_1)-t_1\phi''(1-t_1)\right] \\
&\overset{sgn}{=} +\frac{t'_1}{t_1}\left(1-\frac{t_1\phi''(1-t_1)}{\phi'(1-t_1)}\right)-\frac{t'_2}{t_2}\left(1-\frac{t_2\phi''(1-t_2)}{\phi'(1-t_2)}\right).
\end{aligned}
$$

می‌توان نشان داد مشتق‌های t_1 و t_2 نسبت به x به ترتیب عبارتند از:

$$t'_{۱} = -\frac{\alpha}{\lambda}(۱+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha-۱} = \frac{-\alpha}{x+\lambda}t_{۱} = \frac{\ln(t_{۱})}{(x+\lambda)\ln(۱+\frac{x}{\lambda})}t_{۱},$$

$$t'_{۲} = \frac{q\alpha-k}{p\lambda}(۱+\frac{x}{\lambda})^{\frac{q\alpha-k}{p}-۱} = \frac{q\alpha-k}{p(x+\lambda)}t_{۲} = \frac{\ln(t_{۲})}{(x+\lambda)\ln(۱+\frac{x}{\lambda})}t_{۲}.$$

بنابراین

$$\Omega'(x) \overset{sgn}{=} \frac{\ln(t_{۱})}{(x+\lambda)\ln(۱+\frac{x}{\lambda})}\left(۱-\frac{t_{۱}\phi''(۱-t_{۱})}{\phi'(۱-t_{۱})}\right) - \frac{\ln(t_{۲})}{(x+\lambda)\ln(۱+\frac{x}{\lambda})}\left(۱-\frac{t_{۲}\phi''(۱-t_{۲})}{\phi'(۱-t_{۲})}\right)$$

$$\overset{sgn}{=} \ln(t_{۱})\left(۱-\frac{t_{۱}\phi''(۱-t_{۱})}{\phi'(۱-t_{۱})}\right) - \ln(t_{۲})\left(۱-\frac{t_{۲}\phi''(۱-t_{۲})}{\phi'(۱-t_{۲})}\right).$$

و در نتیجه از اینکه $t_{۱} \le t_{۲}$ ، $\Omega'(x) \le ۰$ است هرگاه $\ln(t)\left[۱-\frac{t\phi''(۱-t)}{\phi'(۱-t)}\right]$ صعودی باشد.

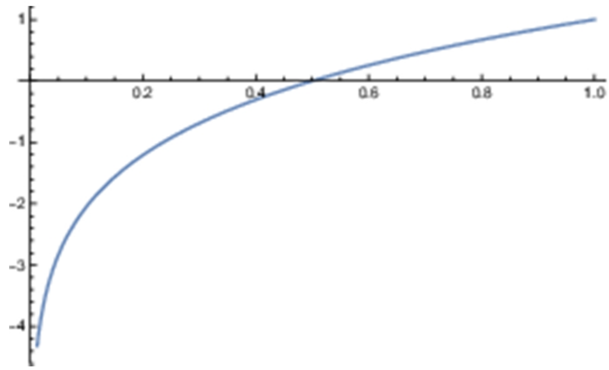
مثال ۱: *در حالت استقلال، تابع مولد ارشمیدسی به‌صورت* $\psi(u)=e^{-u}$, $u\geq ۰$ *است. بنابراین* $\phi(t)=-\ln(t)$ *و* $\phi(۱-t)=-\ln(۱-t)$ *است* $(t\in(۰,۱])$ *. می‌توان نشان داد*

$$\phi'(۱-t) = \frac{۱}{۱-t},\ \phi''(۱-t) = \frac{۱}{(۱-t)^{۲}},$$

و در نتیجه

$$۱-\frac{t\phi''(۱-t)}{\phi'(۱-t)} = \frac{۱-۲t}{۱-t}.$$

شکل ۱ نمودار تابع $\ln(t)[۱-\frac{t\phi''(۱-t)}{\phi'(۱-t)}] = \ln(t)[\frac{۱-۲t}{۱-t}]$ را به ازای $t\in[۰,۱]$ نشان می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان نتیجه گرفت $\ln(t)[۱-\frac{t\phi''(۱-t)}{\phi'(۱-t)}] = \ln(t)[\frac{۱-۲t}{۱-t}]$ همواره صعودی برحسب $t\in[۰,۱]$ است.



شکل (۱): نمودار تابع $\ln(t)[\frac{۱-۲t}{۱-t}] = \ln(t)[۱-\frac{t\phi''(۱-t)}{\phi'(۱-t)}]$

قضیه ۶: *تحت مفروضات قضیه ۵،* اگر $\ln(t)\left[۱+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]$ نزولی و نابرابری $(\alpha_۱-\alpha_۲)(\gamma_۱-\gamma_۲)\geq ۰$ برقرار باشد آنگاه

$$(\underbrace{\alpha_۱,\ldots,\alpha_۱}_{p},\underbrace{\alpha_۲,\ldots,\alpha_۲}_{q})\overset{m}{\preceq}(\underbrace{\gamma_۱,\ldots,\gamma_۱}_{p},\underbrace{\gamma_۲,\ldots,\gamma_۲}_{q})\Rightarrow Y_{۱:n}\leq_{*} X_{۱:n},$$

که در آن $p+q=n$ است.

اثبات: فرض کنید $(\alpha_۱-\alpha_۲)(\gamma_۱-\gamma_۲)\geq ۰$ باشد. اکنون، بدون کاستن از کلیت مسئله، قرار دهید $\alpha_۱\leq\alpha_۲$ و $\gamma_۱\leq\gamma_۲$ بنابراین

$$(\underbrace{\alpha_۱,\ldots,\alpha_۱}_{p},\underbrace{\alpha_۲,\ldots,\alpha_۲}_{q})\overset{m}{\preceq}(\underbrace{\gamma_۱,\ldots,\gamma_۱}_{p},\underbrace{\gamma_۲,\ldots,\gamma_۲}_{q})$$

برقرار است اگر و فقط اگر

$$\gamma_۱\leq\alpha_۱\leq\alpha_۲\leq\gamma_۲,\quad p\alpha_۱+q\alpha_۲=p\gamma_۱+q\gamma_۲=k.$$

قرار دهید $\gamma_۱=\gamma$, $\alpha_۱=\alpha$ ، $\alpha_۲=(k-p\alpha)/p$ و $\gamma_۲=(k-p\gamma)/q$ بنابراین توابع توزیع $X_{۱:n}$ و $Y_{۱:n}$ به ازای $x>۰$ به ترتیب عبارتند از:

$$F_{\alpha}(x)=۱-\psi\left[p\phi\left(\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)+q\phi\left(\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\alpha-k}{q}}\right)\right],$$

$$F_\gamma(x)=1-\psi\left[p\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma}\right)+q\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\gamma-k}{q}}\right)\right],$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است $\frac{F'_\alpha(x)}{xf_\alpha(x)}$ تابعی نزولی برحسب α به ازای $\alpha\in(0,k/n]$ باشد. مشتق F_α نسبت به α عبارت است از:

$$F'_\alpha(x)=-\psi'\left(p\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)+q\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\alpha-k}{q}}\right)\right)A_1$$

که در آن

$$A_1=-p\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\phi'\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\right)+p\ln(1+\frac{x}{\lambda})(1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{p\alpha-k}{q}}\phi'\left((1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{p\alpha-k}{q}}\right)$$

از طرف دیگر، تابع چگالی احتمال متناظر با F_α عبارت است از:

$$f_\alpha(x)=-\psi'\left(p\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)+q\phi\left(\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\alpha-k}{q}}\right)\right)A_2$$

که در آن

$$A_2=-p\frac{\alpha}{\lambda}(1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha-1}\phi'\left((1+\frac{x}{\lambda})^{-\alpha}\right)+\frac{p\alpha-k}{\lambda}(1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{p\alpha-k}{q}-1}\phi'\left((1+\frac{x}{\lambda})^{\frac{p\alpha-k}{q}}\right)$$

بنابراین داریم:

$$A=\frac{F'_\alpha(x)}{xf_\alpha(x)}=\frac{-p\ln(1+\frac{x}{\lambda})t_1\phi'(t_1)+p\ln(1+\frac{x}{\lambda})t_2\phi'(t_2)}{-px\frac{\alpha}{\lambda}t_1^{-1}\phi'(t_1)+\frac{p\alpha-k}{\lambda}xt_2^{-1}\phi'(t_2)}$$

$$=\left[\frac{(p\alpha-k)x}{p(\lambda+x)\ln(1+x/\lambda)}+\frac{-k\frac{x}{\lambda}t_1^{-1}\phi'(t_1)}{A_1}\right]^{-1}=\left[\frac{(p\alpha-k)x}{p(\lambda+x)\ln(1+x/\lambda)}+B\right]^{-1},$$

که

$$B=\left[\frac{p\ln(۱+\frac{x}{\lambda})(\lambda+x)}{kx}\left(۱-\frac{t_۲\phi'(t_۲)}{t_۱\phi'(t_۱)}\right)\right]^{-۱},$$

$$t_۱=\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ t_۲=\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\alpha-k}{q}}.$$

چون $\frac{x}{(\lambda+x)\ln(۱+\frac{x}{\lambda})}$ تابعی نزولی برحسب x است. لذا $\ln(۱+\frac{x}{\lambda})(\lambda+x)/x$ یک تابع نزولی مثبت است، اگر $\Omega(x)=\frac{t_۱\phi'(t_۱)}{t_۲\phi'(t_۲)}$ تابعی نزولی باشد آنگاه $\frac{F'_\alpha(x)}{xf_\alpha(x)}$ نیز نزولی است. با استفاده از این واقعیت که $\alpha\in(۰.k/n]$ می‌توان نتیجه گرفت که $t_۲\le t_۱$ است. لذا کافی است نشان داده شود $\Omega(x)$ تابعی نزولی برحسب x است. با مشتق گرفتن از $\Omega(x)$ نسبت به x داریم:

$$\begin{aligned}\Omega'(x)&\overset{sgn}{=}t_۲\phi'(t_۲)\left[t'_۱\phi'(t_۱)+t_۱t'_۱\phi''(t_۱)\right]-t_۱\phi'(t_۱)\left[t'_۲\phi'(t_۲)+t_۲t'_۲\phi''(t_۲)\right]\\&=t'_۱t_۲\phi'(t_۲)\left[\phi'(t_۱)+t_۱\phi''(t_۱)\right]-t'_۲t_۱\phi'(t_۱)\left[\phi'(t_۲)+t_۲\phi''(t_۲)\right]\\&\overset{sgn}{=}\frac{t'_۱}{t_۱}\left(۱+\frac{t_۱\phi''(t_۱)}{\phi'(t_۱)}\right)-\frac{t'_۲}{t_۲}\left(۱+\frac{t_۲\phi''(t_۲)}{\phi'(t_۲)}\right).\end{aligned}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$t'_۱=-\frac{\alpha}{\lambda}\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha-۱}=\frac{\ln(t_۱)}{\ln(۱+\frac{x}{\lambda})(x+\lambda)}t_۱,$$

$$t'_۲=\frac{p\alpha-k}{q\lambda}\left(۱+\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{p\alpha-k}{q}-۱}=\frac{\ln(t_۲)}{\ln(۱+\frac{x}{\lambda})(x+\lambda)}t_۲.$$

بنابراین

$$\Omega'(x) \overset{sgn}{=} \frac{\ln(t_1)}{\ln(1+\frac{x}{\lambda})(x+\lambda)}\left(1+\frac{t_1\phi''(t_1)}{\phi'(t_1)}\right)-\frac{\ln(t_2)}{\ln(1+\frac{x}{\lambda})(x+\lambda)}\left(1+\frac{t_2\phi''(t_2)}{\phi'(t_2)}\right)$$

$$\overset{sgn}{=} \ln(t_1)\left(1+\frac{t_1\phi''(t_1)}{\phi'(t_1)}\right)-\ln(t_2)\left(1+\frac{t_2\phi''(t_2)}{\phi'(t_2)}\right).$$

در نتیجه از اینکه $t_2 \le t_1$ است $\Omega'(x) \le 0$ است هرگاه $\ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]$ نزولی باشد.

مثال ۲: *(الف) برای حالت استقلال،* $\phi(t)=-\ln(t)$ *است. بنابراین* $t\phi'(t)=-1$ *و در نتیجه* $1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}=0$ *که نشان می‌دهد* $\ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]$ *تابعی نزولی برحسب* $t\in[0,1]$ *است.*

(ب) فرض کنید $\phi(t)=\theta(t^{-1/\theta}-1)$، $\theta>1$ *باشد. در این صورت* $\phi'(t)=-t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}$ *و همچنین* $\phi''(t)=\frac{\theta+1}{\theta}t^{-\frac{2\theta+1}{\theta}}$ *است. بنابراین*

$$\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]=\frac{-1}{\theta},\ \ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]=\frac{-\ln(t)}{\theta}.$$

با مشتق گرفتن از $\ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]=\frac{-\ln(t)}{\theta}$ داریم:

$$\left(\ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]\right)=\frac{-1}{t\theta}<0,$$

که نشان می‌دهد $\ln(t)\left[1+\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}\right]$ تابعی نزولی از $t\in[0,1]$ است.

ساختار وابستگی بین مقادیر خسارات در کارهای بیمه‌ای، معمول‌تر و منطقی‌تر است لذا مطالعه و بررسی مدل بندی وابستگی‌ها، می‌تواند حائز اهمیت باشد. باید توجه داشت که در حالت کلی مقادیر خسارت‌ها نمی‌توانند مستقل باشند. زیرا که از یک ساختار تولید ادعای خسارت ناشی شده‌اند یا تحت تأثیر یک محیط خاص اقتصادی یا فیزیکی قرار دارند. بنابراین از فرض استقلال تخطی می‌شود. خسارت‌ها مربوط به بیمه‌نامه‌های یک سبد بیمه که از یک منطقه جغرافیایی انتخاب شده‌اند مانند خسارت‌ها بیمه‌نامه‌های زمین‌لرزه در یک شهر خاص، به هم وابسته هستند. مثال دیگر اینکه در یک روز مه‌آلود، همه اتومبیل‌های در حال حرکت واقع در یک ناحیه، به علت

شرایط بد جوی دارای احتمال تصادف بالایی هستند و به‌این‌ترتیب، شدت خسارت‌ها وارده به اتومبیل‌ها با تعداد خسارات وابسته‌اند و یا در بیمه عمر، گواه کافی وجود دارد که بین طول عمر زن و شوهر و کیفیت زندگی آنان (مانند رفاه مالی، آسایش و آرامش و غیره) وابستگی وجود دارد. با توجه به مطالب فوق، چون

لازم است توجه شود که در مباحث بیمه‌ای اگر توزیع ریسک‌های تصادفی را به‌صورت لوماکس در نظر بگیریم و متناظر با هر ریسک تصادفی، یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت p_i تعریف کنیم آنگاه نتایج به‌دست‌آمده در مورد ترتیب تصادفی معمولی در مورد کوچک‌ترین آماره مرتب، به‌سادگی قابل‌تعمیم به کوچک‌ترین مقادیر خسارت‌ها خواهد بود. برای جزئیات و آگاهی بیشتر در این زمینه به برمال‌زن و همکاران [۱۲]مراجعه نمایید .

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه ترتیب‌های تصادفی معمولی، ستاره و محدب انتقال‌یافته از سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های ناهمگن و وابسته پرداخته می‌شود. شرایط کافی برای برقراری ترتیب تصادفی ستاره بین سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های وابسته لوماکس با چند دورافتاده اثبات شده است. همچنین نشان داده است بدون هیچ‌گونه محدودیتی روی پارامترها، طول عمر سیستم‌های سری یا موازی با مؤلفه‌های همگن کوچک‌تر از مؤلفه‌های وابسته ناهمگن، در ترتیب محدب انتقال‌یافته است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شد کمال قدردانی و تشکر را دارند. این تحقیق با حمایت مالی دانشگاه زابل انجام شده است. شماره گرنت: UOZ-GR-9618-14

منابع

[۱۳] برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴). مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، *مجله علوم آماری*، **۹**، ۲۰۶-۱۸۹.

[1] Barlow, R.E., Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Silver Spring.

[2] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. **54**, John Wiley, New York.

[3] David, H.A. and Nagaraja, H.N. (2003). *Order Statistics*, 3rd Ed., John Wiley, Hoboken, New Jersey.

[4] Lehmann, E. (1955). Ordered Families of Distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 399-419.

[5] Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2006). Weibull Distribution: Some Stochastic Comparisons Results. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3121-3129.

[6] Kochar, S.C. and Xu, M. (2007a). Some Recent Results on Stochastic Comparisons and Dependence among Order Statistics in the case of PHR Model. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **6**, 125-140.

[7] Kochar, S.C. and Xu, M. (2007b). Stochastic Comparisons of Parallel Systems when Components Have Proportional Hazard Rates. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 597-609.

[8] Fang, L. and Zhang, X. (2013). Stochastic Comparison of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

[9] Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011). New Results on Comparisons of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components. *Statistics & Probability Letters*, **81**, 36-44.

[10] Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013). Hazard Rate Comparison of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components. *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 153-160.

[11] Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2019). Orderings for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull-Geometric Components. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9869-9880.

[12] Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2017). Ordering Properties of the Smallest and Largest Claim Amounts in a General Scale Model. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2017**, 1-20.

[14] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. New York: Springer.

[15] Rezapour, M. and Alamatsaz, M.H. (2014). Stochastic Comparison of Lifetimes of Two $(n-k+1)$-out-of-n Systems with

Heterogeneous Dependent Components. *Journal of Multivariate Analysis*, **130**, 240-251.

[16] Li, X. and Fang, R. (2015). Ordering Properties of Order Statistics from Random Variables of Archimedean Copulas with Applications. *Journal of Multivariate Analysis,* **133**, 304-320.

[17] Li, C. and Li, X. (2015). Likelihood Ratio Order of Sample Minimum from Heterogeneous Weibull Random Variables. *Statistics & Probability Letters*, **97**, 46-53.

[18] Li, C., Fang, R. and Li, X. (2015). Stochastic Comparisons of Order Statistics from Scaled and Interdependent Random Variables, *Metrika,* **79**, 553-578.

[19] Fang, R., Li, C. and Li, X. (2016). Stochastic Comparisons on Sample Extremes of Dependent and Heterogeneous Observations, *Statistics*, **50**, 930-955.

[20] Zhang, Y., Cai, X., Zhao, P., Hairu Wang, H. (2018). Stochastic Comparisons of Parallel and Series Systems with Heterogeneous Resilience-scaled Components, *Statistics*, **5** , 126-147.

[21] Fang, R. and Li, X. (2018). Ordering Extremes of Interdependent Random Variables. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **47**, 4187-4201.

[22] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions,* vol. 1.

[23] Nadeb, H. and Torabi, H. (2018). Stochastic Comparisons of Series systems with Independent Heterogeneous Lomax-exponential Components. *Journal of Statistical Theory and Practice,* **12**, *794-812.*

[24] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

[25] van Zwet, W.R. (1964). *Convex Transformations of Random Variables.* Mathematische Centrum, Amsterdam.

[26] Oja, H. (1981). On Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions. *Scandinavian Journal of Statistics,* **8**, 154-168.

[27] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Second edition. Springer, Verlag, New York.

[28] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* John Wiley & Sons, New York.

[29] Saunders, I.W., Moran, P.A. (1978). On the Quantiles of the Gamma and F Distributions. *Journal of Applied Probability*, **15**, 426-432.

JAMM (2020) 10(1): 172-195
DOI: 10.22055/JAMM.2020.28651.1690

Shahid Chamran University of Ahvaz

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems arising from Lomax Components with Archimedean Copula

Ghobad Barmalzan*, Seyed Masih Ayat**, Abbas Akrami**

*Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

**Department of Mathematics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Received: April 5 2017 Accepted for publication: September 6 2019
Corresponding author: ghobad.barmalzan@gmail.com

Abstract

This paper studies the usual stochastic, star and convex transform orders of both series and parallel systems comprising heterogeneous (and dependent) components. Sufficient conditions are established for the star ordering between the lifetimes of series and parallel systems consisting of dependent components having multiple-outlier Lomax model. We also prove that, without any restriction on the Archimedean copula and the parameters, the lifetime of a parallel or series system with dependent heterogeneous components is smaller than that with dependent homogeneous components in the sense of the convex transform order.

Keywords: Archimedean copula, Stochastic orders, Lomax distribution, Series systems, Parallel systems, Majorization order.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25**.**