مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ...، دوره ...، شماره ...، ص ...-...
شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2020.15405

روش تجزیه ادومین در حل معادله لایه مرزی فالکنر- اسکن

شهرام رضاپور[۱]*، حکیمه محمدی**

*گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

**گروه ریاضی، واحد میاندوآب، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶

چکیده: در این مقاله روش تجزیه ادومین (ADM)، برای حل معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌کاربرده شده است. این روش یکی از روش‌های تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی است. در تحقیق حاضر، معادله فالکنر- اسکن برای شرایط خاص (جریان بلازیوس، جریان نقطه سکون، جریان در کانال همگرا، جریان روی گوه) حل شده است. مشاهده شد که این روش نتایج بسیار دقیقی به دست می‌دهد و همچنین یک ابزار قدرتمند ریاضی است که برای حل مسائل فراوان خطی و غیرخطی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی به‌کاربرده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: لایه مرزی، تجزیه ادومین، فالکنر- اسکن، بلازیوس.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۷A۲۵، ۳۴D۲۰.

۱- مقدمه

روش تجزیه ادومین برای حل طیف وسیعی از مسائل فیزیکی و مهندسی، مخصوصاً برای جریان غیرقابل تراکم دو بعدی و پایا و آرام استفاده شده است. روش ادومین (ADM) مشهورترین روش سیستماتیک برای یافتن جواب‌های کاربردی خطی و غیرخطی و قطعی و تصادفی معادلات عملگر شامل معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) و معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) و معادلات انتگرالی و ... است [۱-۷]. (ADM) تکنیک قدرتمندی است که الگوریتم‌های کارآمدی برای جواب‌های تحلیلی و عددی برای کاربرد در مسائل واقعی جهان در علوم کاربردی و مهندسی

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: rezapourshahram@yahoo.ca

ایجاد می‌کند؛ که به ما امکان حل مسائل مقدار اولیه (IVP) و مسائل مقدار مرزی (BVP) را فراهم می‌کند [۱۰-۸].

مسائل مربوط به جریان غیرقابل تراکم دو بعدی و پایا و آرام لایه مرزی به شکل معادله دیفرانسیل جزئی درجه سوم غیرخطی بیان می‌شود که مستقیماً آن را نمی‌توان حل کرد. این معادلات اولین بار توسط فالکنر- اسکن در سال ۱۹۳۱ بیان شدند و بنابراین معادلات فالکنر- اسکن نامیده شده‌اند. فالکنر- اسکن روش تبدیل تشابهی را برای معادله لایه مرزی دیفرانسیلی توسعه داد. سپس آن را به معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه ۳ غیرخطی کاهش داد که مستقیماً به‌صورت عددی حل شد [۱۱]. راه‌حل‌ها و وابستگی‌شان به هم بعدها توسط هارتری امتحان شد [۱۲]. نا، یک گروه تبدیلات را بکار برد که مسائل مرزی را به یک جفت مسائل مرزی اولیه کاهش داد و سپس این مسائل را توسط روش انتگرالی مستقیم حل کرد [۱۳]. راجا گوپال و همکاران، جریان لایه مرزی فالکنر- اسکن را برای مسائل مرتبه دوم غیرقابل تراکم همگن حول یک گوه متقارن نسبت به جهت جریان مورد مطالعه قرار داد [۱۴]. لین و لین، یک روش حل تشابهی برای جریان انتقال گرمای جابجایی اجباری روی سطح هم‌دما را با هر عدد پرانتل معرفی کرد [۱۵]. هوسو و همکاران، دما و میدان جریان برای جریان حول یک گوه را توسط روش بسط سری‌ها، تبدیلات تشابهی، انتگرال رانگ کوتا و روش شوتینگ مطالعه کردند [۱۶].

اساتامبی، روش اختلاف محدود را برای معادله فالکنر- اسکن پیشنهاد داد [۱۷]. بعداً هرسو و هایو، ترکیبی از بسط سری‌ها، تبدیلات تشابهی و روش اختلاف محدود برای مسائل انتقال گرمای سیال ویسکو الاستیک مرتبه دوم حول پره فن دار را ارائه داد [۱۸]. بور- لی کایو، تحلیل انتقال گرما برای جریان گوه فالکنر- اسکن را توسط روش تبدیلات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که نتایج حاصله تطابق خوبی با دیگر روش‌های عددی دارد [۱۹]. حقیقی در سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۶ معادله برگرهای غیرخطی یک‌بعدی را با روش تجزیه ادومین حل نمود و نتایج حاصل را با روش کرانک نیکلسون و روش شبکه بولتزمن مقایسه کرد [۲۱-۲۰].

در این مقاله کاربرد روش تجزیه ادومین (ADM) برای حل مسئله جریان فالکنر- اسکن مورد ارزیابی قرار گرفته است. چون گرادیان فشار داریم بنابراین لبه لایه مرزی برای شرط مرزی مشخص نیست. برای نشان دادن درستی این روش معادله مومنتوم برای معادله فالکنر- اسکن برای شرایط خاص (جریان بلازیوس، جریان نقطه سکون، جریان در کانال همگرا، جریان روی گوه) حل شده است.

۲- اساس و پایه روش ADM

برای بیان ایده اساسی این روش، ابتدا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$Ly(x)+Ry(x)+Ny(x)=g(x) \tag{۱}$$

به‌طوری‌که شرط مرزی عبارت است از: $y^{i}(0)=\alpha_i$ و $i=0,1,2,\dots,n$

ه‌مچنین L عملگر خطی معکوس‌پذیر، R بقیه عملگر خطی و N عملگر غیرخطی است. عملگر L^{-1} را بر طرفین رابطه (۱) اثر می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$y=\varphi+L^{-1}\left(g(x)\right)-L^{-1}Ry(x)-L^{-1}Ny(x) \tag{۲}$$

به‌طوری‌که φ از اعمال شرایط مرزی موجود حاصل می‌شود. روش تجزیه ادومین (ADM) فرض می‌کند که جواب y(x) به‌صورت سری نامتناهی زیر باشد:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x) \tag{۳}$$

و عملگر غیرخطی N(y) را به‌صورت سری نامتناهی از چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر در نظر می-گیرد:

$$N(y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{۴}$$

و An ها چندجمله‌ای‌هایی از $y_0, y_1, \dots, y_n$ می‌باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n\left(y_0 . y_1 . \dots y_n\right)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad \text{و} \quad n=0,1,\dots \tag{۵}$$

با جای گذاری روابط (۳) و (۵) در معادله دیفرانسیل (۲) و حل آن توابع $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ حاصل می‌شوند.

۳- معادلات حاکم و روش حل آن

معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{۶}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{۷}$$

که در آن u و v به ترتیب سرعت سیال در راستای x و y و P معرف فشار است. برای ارتباط گرادیان فشار با سرعت از معادله برنولی استفاده شده است.

$$-\frac{۱}{p}\frac{\partial p}{\partial x}=U_{\infty}\frac{dU_{\infty}}{dx} \qquad (۸)$$

که در آن U_{∞} سرعت جریان آزاد در جهت x است. برای لایه مرزی آرام، با فرض $\frac{\partial p}{\partial x}=۰$، با تعریف متغیرهای تشابهی و بی‌بعد حل بلازیوس به‌دست‌آمده است؛ اما برای حالتی که گرادیان فشار صفر نیست فالکنر- اسکن شرایط خاصی را که استفاده از حل تشابهی را ممکن می‌سازد را بررسی و ارائه نمود [۱۱]. جریان سیال لزج غیرقابل تراکم را بالای یک گوه در نظر بگیرید:

$$U_{\infty}(x)=Cx^{m} \quad \text{و} \quad m=\frac{\beta}{۲x-\beta} \qquad (۹)$$

متغیرهای تشابهی و بی‌بعد به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$z=\frac{y}{\sqrt{x}}Re_{x}^{۰/۵} \quad \text{و} \quad f'(z)=\frac{u}{U_{\infty}} \qquad (۱۰)$$

با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰) و جاگذاری آن‌ها در معادله (۶) و (۷) معادله مومنتوم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$f'''+\alpha ff''+\beta(۱-f'^{۲})=۰ \qquad (۱۱)$$

که در آن شرایط مرزی برای f؛ سرعت بدون بعد شده؛ به‌صورت زیر است:

$$f(۰)=۰. \quad f'(۰)=۰. \quad f'(\infty)=۱ \qquad (۱۲)$$

ازآنجاکه معادله (۱۱) غیرخطی است و حل تحلیلی آن مشکل است بنابراین برای حل آن از روش تجزیه ادومین استفاده شده است.

۳-۱ جریان عبور کننده از روی یک صفحه مسطح

برای جریان عبوری از روی یک صفحه مسطح با زاویه حمله صفر معادله فالکنر- اسکن به معادله (۱۳) تقلیل می‌یابد:

$$f'''+\frac{۱}{۲}ff''=۰ \qquad (۱۳)$$

که شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$f(۰)=۰\ , \quad f'(۰)=۰\ , \quad f'(\infty)=۱.$$

برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله را به‌صورت $L(f)+N(f)=0$ می‌نویسیم به‌طوری‌که: $L(f)=f'''$ و $N(f)=\frac{1}{2}ff''$.

عملگر معکوس $L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۱۳) اعمال می‌کنیم:

$$f=A+Bx+Cx^2-L^{-1}\left(N\left(f\right)\right) \qquad (14)$$

از شرط مرزی $f(0)=0$ مقدار $A=0$ و از شرط $f'(0)=0$ مقدار $B=0$ حاصل می‌شود، بنابراین

$$f=Cx^2-L^{-1}\left(\frac{1}{2}ff''\right) \qquad (15)$$

قسمت غیرخطی $N(f)=\frac{1}{2}ff''$ را به‌صورت $N(f)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ تجزیه می‌کنیم بطوریکه

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}f_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0} \quad ، n=0,1,2,3,... \qquad (16)$$

A_n چندجمله‌ای‌های ادومین برای قسمت غیرخطی $N(f)=\frac{1}{2}ff''$ می‌باشند بطوریکه:

$$A_0=N(f_0)=\frac{1}{2}f_0f_0''$$

$$A_1=N'(f_0)f_1=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0^{(3)}\right)f_1$$

$$A_2=N'(f_0)f_2+N''(f_0)\frac{f_1^2}{2!}=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_2+\left(\frac{1}{2}f_0''^2+\frac{1}{2}f_0'f_0^{(3)}+\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0^{(3)}\right).\frac{f_1^2}{2}$$

$$A_3=N'(f_0)f_3+N''(f_0)f_1f_2+N^{(3)}(f_0)\frac{f_1^3}{3!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_3+\left(\frac{1}{2}f_0''^2+f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_1f_2+\left(f_0''f_0^{(3)}+f_0''^2+\frac{3}{2}f_0'f_0^{(3)}+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)\frac{f_1^3}{6}.$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_0=cx^2 \\ f_n=-L^{-1}\left(A_{n-1}\right) \quad ، n=1,2,3,... \end{cases}$$

جملات جواب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_{۱} = -L^{-۱}\left(A_{۰}\right) = -c^{۲}\frac{x^{۵}}{۶۰}$$
$$f_{۲} = -L^{-۱}\left(A_{۱}\right) = \frac{-۱}{۴۹۴}c^{۴}x^{۹}$$

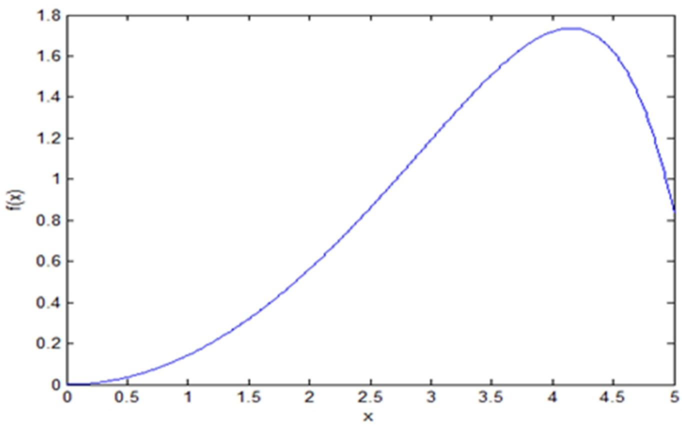
جواب به‌صورت $f = \sum_{n=۰}^{\infty} f_n$ حاصل می‌شود

$$f = f_{۰} + f_{۱} + f_{۲} + \dots = cx^{۲} + (c^{۲}\frac{x^{۵}}{۶۰}) - \frac{۱}{۴۹۴}c^{۴}x^{۹} + \dots - \qquad (۱۷)$$

اگر شرط $f'(\infty) = ۱$ را در $f = f_{۰} + f_{۱} + f_{۲}$ اعمال کنیم مقدار $c = ۰/۱۴۳۵$ به دست می‌آید و جواب زیر حاصل می‌شود:

$$f\left(x\right) = ۰/۱۴۳۵\ x^{۲} - (۰/۱۴۳۵)^{۲}\frac{x^{۵}}{۶۰} - \frac{۱}{۴۹۴}(۰/۱۴۳۵)^{۴}x^{۹} + \dots$$

با افزایش جملات f می‌توان مقدار c را دقیق‌تر محاسبه نمود. نتایج تحلیلی روش حاضر با حل بلازیوس با روش هموتوپی در جدول شماره ۱ مقایسه شده است و همان‌طور که ملاحظه می‌شود سازگاری بسیار خوبی بین حل بلازیوس و روش حاضر وجود دارد و همچنین رفتار تابع در این حالت در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): جریان عبور کننده از روی یک صفحه مسطح

جدول (۱): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده f(x) از روش ADM و HPM [23]

x	f(x) (ADM)	f(x) (ADM)
۰	۰	۰
۰/۲	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۶۶
۰/۴	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۶۶
۰/۶	۰/۰۵۱۶	۰/۰۵۹۷
۰/۸	۰/۰۹۱۷	۰/۱۰۶۱
۱	۰/۱۵۳۲	۰/۱۶۵۵
۱/۲	۰/۲۲۵۸	۰/۲۳۷۹
۱/۴	۰/۳۲۹۴	۰/۳۲۲۹
۱/۶	۰/۳۸۳۷	۰/۴۲۰۳
۱/۸	۰/۴۵۸۳	۰/۵۲۹۵

۳-۲- جریان نقطه سکون

در جریان نقطه سکون، در لایه مرزی دو بعدی معادله فالکنر-اسکن به معادله (۱۸) تقلیل می‌یابد:

$$f''' + ff'' + ۱ - (f')^{۲} = ۰ \quad (۱۸)$$

که در آن شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$f(۰) = ۰ \quad f'(۰) = ۰, \ f'(\infty) = ۱,$$

برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله را به‌صورت $f''' + ff'' - f'^{۲} = -۱$ در نظر می‌گیریم که به‌صورت

$$L(f) + N(f) = g \quad (۱۹)$$

نوشته می‌شود و در آن $L(f) = f'''$، $N(f) = ff'' - f'^{۲}$ و $g = -۱$ است. با اعمال $L^{-۱}(.) = \int_۰^x \int_۰^x \int_۰^x (.) dx\, dx\, dx$ بر طرفین رابطه (۱۹) داریم

$$f = A + Bx + Cx^{۲} - \frac{x^{۳}}{۳!} - L^{-۱}\left(N(f)\right).$$

از شرط $f(۰) = ۰$ مقدار $A = ۰$ و از شرط $f'(۰) = ۰$ مقدار $B = ۰$ حاصل می‌شود بنابراین:

$$f=cx^{۲}-\frac{x^{۳}}{۶}-L^{-۱}\left(N\left(f\right)\right)=\theta\left(x\right)-L^{-۱}\left(N\left(f\right)\right)$$

اگر قسمت غیرخطی $N\left(f\right)=ff''-f'^{۲}$ را تجزیه کنیم در این صورت خواهیم داشت $N\left(f\right)=\sum_{n=۰}^{\infty}A_n$ به‌طوری‌که $A_n=\frac{۱}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[N\left(\sum_{K=۰}^{\infty}f_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=۰}$ ، بنابراین

$$A_{۰}=N\left(f_{۰}\right)=f_{۰}f_{۰}'-f_{۰}'^{۲}$$

$$A_{۱}=N'\left(f_{۰}\right)f_{۱}=\left[f_{۰}'f_{۰}''+f_{۰}f_{۰}^{(۳)}-2f_{۰}'f_{۰}''\right]f_{۱}$$

$$A_{۲}=N'\left(f_{۰}\right)f_{۲}+N''\left(f_{۰}\right)\frac{f_{۱}^{۲}}{۲!}=\left[f_{۰}'f_{۰}''+f_{۰}f_{۰}''-2f_{۰}'f_{۰}'\right]f_{۲}+\left[-f_{۰}''^{۲}+f_{۰}f_{۰}^{(۴)}\right]\frac{f_{۱}^{۲}}{۲}$$

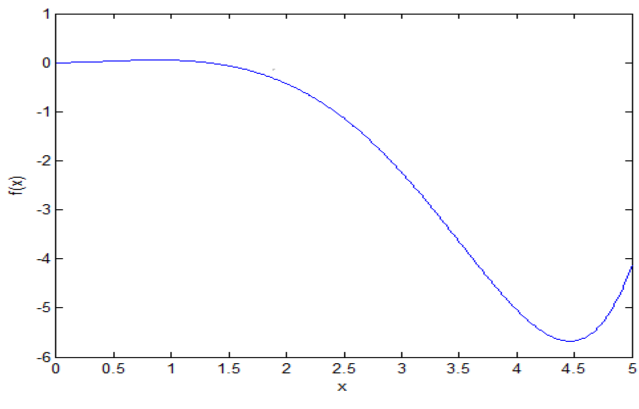
با در نظر گرفتن دنباله بازگشتی به‌صورت

$$\begin{cases} f_{۰}=\theta\left(x\right)=cx^{۲}-\frac{x^{۳}}{۶} \\ f_n=-L^{-۱}\left(A_{n-۱}\right)\ ,\ n=۱,۲,۳,... \end{cases}$$

جملات بعدی جواب حاصل می‌شوند:

$$f_{۱}=\frac{1}{۳۰}\ c^{۲}x^{۵}-\frac{۱}{۱۸۰}\ cx^{۶}+\frac{۱}{۲۵۲۰}\ x^{۷}$$

$$f_{۲}=\frac{1}{۷۲۰۰}c^{۲}x^{۱۰}-\frac{۶۲}{۲۴۹۴۸۰۰}c^{۲}x^{۱۱}+\frac{۳۶۰۰}{۱۷۹۶۲۵۶۰۰۰}c\,x^{۱۲}+\frac{۱}{۲۵۲۰}c^{۴}x^{۹}+\frac{۱}{۱۲۹۷۲۹۶۰}x^{۱۳}.$$



شکل (۲): جریان نقطه سکون

جدول (۲): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده f(x) از روش ADM و [22] HPM

x	f(x) (ADM)	f(x) (ADM)
۰	۰	۰
۰/۱	۰/۱۱۸۲۶۴	۰/۱۱۸۲۶
۰/۲	۰/۲۲۶۶۱۲	۰/۲۲۶۶۱
۰/۳	۰/۳۲۵۲۳۹	۰/۳۲۵۲۴
۰/۴	۰/۴۱۴۴۰۳	۰/۴۱۴۴۶
۰/۵	۰/۴۹۴۶۰۱	۰/۴۹۴۶۵
۰/۶	۰/۵۶۶۲۴۹	۰/۵۶۶۲۸
۰/۷	۰/۶۲۹۸۰۳	۰/۶۲۹۸۶
۰/۸	۰/۶۸۵۸۴۱	۰/۶۸۵۹۴
۰/۹	۰/۷۳۴۸۸۱	۰/۷۳۵۰۸
۱	۰/۷۷۷۶۳۶	۰/۷۷۷۸۷
۱/۱	۰/۸۱۴۵۳۸	۰/۸۱۴۸۷

بدین ترتیب جواب مسئله $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ حاصل می‌شود. مقدار c را با هر تعداد از جملات سری و شرط مرزی می‌توان به دست آورد. مثلاً اگر $f=f_0+f_1+f_2$ را در نظر بگیریم با توجه به‌شرط مرزی $f'(\infty)=1$ مقدار $c=0/210034$ حاصل می‌شود. در جدول شماره ۲، نتایج تحلیلی روش آدومیان حاضر با حل عددی [۲۲] مقایسه شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود سازگاری خوبی بین حل عددی و روش حاضر وجود دارد. همچنین در شکل ۲ رفتار تابع در حالت جریان نقطه سکون نشان داده شده است .

۳-۳- جریان در کانال همگرا

برای جریان در یک کانال همگرا، معادله فالکنر – اسکن به معادله (۲۰) تقلیل می‌یابد:

$$f''' + 1 - (f')^2 = 0 \qquad (20)$$

که در آن شرایط مرزی به‌صورت

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=0, \qquad f'(\infty)=1$$

است. برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله

$f''' - (f')^{۲} = -۱$ را در نظر می‌گیریم که $L(f)=f'''$ و $N(f)= u'^{۲}$ و $g=-۱$ و معادله به‌صورت زیر است:

$$L(f) - N(f)=g \qquad (۲۱)$$

عملگر معکوس $L^{-۱}(.)=\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x}(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۲۱) اعمال می‌کنیم:

$$f = A + Bx + Cx^{۲} + L^{-۱}\left(N(f)\right)+L^{-۱}\left(-۱\right)$$

از طرفی $L^{-۱}\left(-۱\right)=-\frac{۱}{۶}x^{۳}$، بنابراین:

$$f = A + Bx + Cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} + L^{-۱}\left(N(f)\right)$$

چون $f(۰)=۰$ پس $A=۰$ و $f'(۰)=۰$ پس $B=۰$ بنابراین:

$$f = Cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} - L^{-۱}\left(N(f)\right)$$

تجزیه ادومین را برای $N(f)$ به‌صورت $N(f)=\sum_{n=۰}^{\infty}A_n$ در نظر می‌گیریم، بطوریکه

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{\delta^n}{\delta\lambda^n}\left[N(\sum_{k=۰}^{\infty}f_k\lambda^k)\right]_{\lambda=۰}.$$

در این صورت:

$$A_{۰} = N(f_{۰})=f_{۰}'^{۲}$$

$$A_{۱} = N'(f_{۰}).f_{۱}=۲f_{۰}'\,f_{۰}''f_{۱}$$

$$A_{۲} = N'(f_{۰}).f_{۲}+N''(f_{۰})\frac{f_{۱}^{۲}}{۲!} = ۲\,f_{۰}''\,f_{۰}'.f_{۲} + \left[۲\,f_{۰}''^{\,۲} + 2\,f_{۰}'\,f_{۰}^{(۳)}\right].\frac{f_{۱}^{۲}}{۲}$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_{۰}=\theta(x)= cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} \\ f_n = -L^{-۱}\left(A_{n-۱}\right)\ , \quad n=۱,۲,\ \dots \end{cases}$$

جملات سری جواب $f=\sum_{n=۰}^{\infty}f_n$، به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$f_1=\frac{1}{15}\,c^2x^5+\frac{1}{840}\,x^7-\frac{1}{60}\,cx^6$$

$$f_2=\frac{1}{810}c^4x^9+\frac{148}{831600}c^2x^{11}-\frac{32}{43200}c^3x^{10}-\frac{1}{55440}c\,x^{12}+\frac{1}{1469520}x^{13}$$

۳-۴- جریان بر روی گوه

برای جریان روی گوه، با انتخاب $\alpha=1$ و $\beta=0/5$ معادله فالکنر – اسکن به معادله

$$f'''+f\,f''+\frac{1}{2}\left[1-\left(f'\right)^2\right]=0 \qquad (22)$$

تقلیل می‌یابد که در آن شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$f'\left(\infty\right)=1,\quad f'\left(0\right)=0,\quad f\left(0\right)=0.$$

برای حل معادله بالا با استفاده از روش تجزیه ادومین، معادله را به‌صورت:

$$L(f)+N(f)=g \qquad (23)$$

در نظر می‌گیریم که $L(f)=f'''$، $N(f)=f\,f''-\frac{1}{2}(f')^2$ و $g=-\frac{1}{2}$ است. عملگر معکوس $L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۲۳) اعمال می‌کنیم:

$$f=A+Bx+Cx^2-L^{-1}\left(N(f)\right)+L^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

از طرفی: $L^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}x^3$ بنابراین

$$f=A+Bx+Cx^2-\frac{1}{12}x^3-L^{-1}\left(N(f)\right)$$

از شرایط مرزی $f\left(0\right)=0$ و $f'\left(0\right)=0$ مقادیر $A=0$ و $B=0$ حاصل می‌شود:

$$f=Cx^2-\frac{1}{12}x^3-L^{-1}\left(N(f)\right)$$

تجزیه ادومین را برای $N(f)$ به‌صورت: $N(f)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ در نظر می‌گیریم بطوریکه:

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\delta^n}{\delta\lambda^n}\left[N(\sum_{k=0}^{\infty}f_k\lambda^k)\right]_{\lambda=0}$$

در این صورت:

$$A_0=N(f_0)=f_0\,f_0''-\frac{1}{2}(f_0')^2$$
$$A_1=N'(f_0)f_1=f_0\,f_0'''f_1$$
$$A_2=N'(f_0)\,f_2+N''(f_0)\frac{f_1^2}{2}=f\,f_0''f_2+\left[\,f_0'\,f_0'''+f_0\,f_0^{(4)}\right].\frac{f_1^2}{2}$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_0=\theta(x)=cx^2-\frac{1}{12}x^3 \\ f_n=-L^{-1}(A_{n-1})\ ,\ n=1,2,\ldots \end{cases}$$

جملات سری جواب $f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n$، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_1=-L^{-1}(A_0)=-\frac{1}{20160}\,x^7+\frac{1}{720}\,cx^6$$
$$f_2=\frac{1}{1425600}c^2x^{11}+\frac{1}{830269440}x^{13}-\frac{1}{1596720}c\,x^{12}$$

۴- نتیجه‌گیری

روش تجزیه ادومین، (ADM) *برای* حل معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌کاربرده شده است به‌طوری‌که روش ادومین می‌تواند رفتار لایه مرزی را پیش‌بینی کند. این روش دارای مزایای زیادی است که از آن جمله می‌توان به‌دقت بالا و سرعت زیاد همگرایی سری جواب اشاره کرد و بر اساس مقایسه‌ای که با روش عددی انجام شد نشان می‌دهد که سازگاری خوبی با جواب‌های روش‌های دیگر دارد.

منابع

[1] Adomian, G. and Rach, R. (1983). Inversion of nonlinear Stochastic operators, *J. Math. Anal. Appl.* **91**, 39-46.

[2] Adomian, G. (1983). *Stochastic systems*, Academic, New York.

[3] Bellman, R.E. and Adomian, G. (1985). *Partial Differential Equations: New Methods for their Teatment and Solution*, D. Reidel, Dordrecht.

[4] Adomian, G. (1986). *Nonlinear Stochastic operator equations*, Academic, Orlando, FL.

[5] Bellomo, N. and Riganti, R. (1987*). Nonlinear Stochastic System Analysis in Physics and Mechanics*, world Scientific, Sigapore and River Edge, Nd.

[6] Adomian, G. (1989). *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Application to Physics*, Kluwer Academic, Dordrecht.

[7] Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic, Dordrecht.

[8] Cherruault, Y. (1998). *Models et methods mathematiques pour les Sciences du virant*, Presses Universitaires de France, Paris.

[9] Wazwaz, A.M. (1997). *A First course in Integral Equations, world Scientific*, Singapore and River Edge, NJ.

[10] Wazwaz, A.M. (2002). *Partial differential Equations: Methods and Applications, Lisse*, The Netherlands.

[11] Falkner, V.M. and Skan, S.W. (1931).Some approrimate Solutions of the boundary layer equations*, Philos. Mag.*, **12**, 865-896.

[12] Hartree, D.H. (1937). on an equation occurring in Falkner and Slcan, S approximate treatment of the boundary layer, *Proc Soc. Cambridge Philos.*, **33**, 223-239.

[13] Na, T.Y. (1979). *Computational methods in engineering boundary value problems*, Academic Press, New York.

[14] Rajagopal, K.R., Gupta, A.S. and Na, T.Y. (1983). A note on the falkner-Skan flows of a non- New tonian fluid. *Int. J. Non-Linear Mech.*, **18**, 313-320.

[15] Lin, H.T. and Lin, L.K. (1987). Similarity Solutions for laminar forced convection heah transfer from wedges to fluids of any prandtl number. *Int. J. Heat Mass. Transfer*, **30**, 1111-1118.

[16] Hsu, CH., Chen, CS. And Teng, H.T. (1997). Temperature and flow fields for the flow of a Second grade fluid past a wedge, *Int. J. Non- linear Mech.*, **32**, 933-946.

[17] Asaithambi, A. (1998). A finite- difference method for the solution of the falkner-Skan equation, *Apple., Math., Comput.,* **92**, 135-141.

[18] Hsu, C.H. and Hsiao, K.L. (1998). Conjugate heat transfer of a plate fin in a second- grade fluid flow. *Jnt. J. Heat Mass. Transfer*, **41**, 1087-1102.

[19] Kuo, B.L. (2005). Transfer analysis for the falkner-Skan wedge flow by the differential transformation method, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, 5036-5046.

[20] Haghighi, AR. And Shojaeifard, M. (2015). Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method, *Int. J. Industrial Mathematics* ,7, 149-159.

[21] Haghighi, A.R. and Pakrou, S. (2016). Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional nonlinear Burgers' equation, *Int. J. of Computing Science and Mathematics*, 7, 459-466.

[22] Shah, R.A., Islam, S., Zaman and Hussain, G. T. (2004). Solution of stagnation point flow with heat transfer analysis by optimal Homotopy Asymptotic method, *Proceedings of the Romanian Academy Series*, 11. 312-321.

[23] He, J.H. (2004). Comparition of Homotopy perturbation method and Homotopy analysis method, *Appl. Math. Comput*, 156, 527-539.

JAMM (2020) 10(1): 231-244
DOI: 10.22055/JAMM.2020.15405

Shahid Chamran University of Ahvaz

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Adomian Decomposition Method in Solving of Falkner-Skan Boundary Layer Equation

Shahram Rezapour*, Hakimeh Mohammadi**

*Department of Mathematics, Azarbaidjan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

**Department of Mathematics, Miandoab Branch, Islamic Azad University, Miandoab, Iran

Received: November 2 2018 Accepted for publication: March 6 2020
Corresponding author: rezapourshahram@yahoo.ca

Abstract

In this paper an analytical technique, namely the adomian decomposition method (ADM), has been applied to solve the governing equations for boundary- Layer problems in the case of a two dimensional incompressible flow. In the present work, Falkner-Skan equation for special circumstances (Blasius flow, Stagnation point flow, flow in a convergent channel, flow over a wedge) has been solved. It is found that this method can give very accurate results and also it is powerful mathematical tool that can be applied to a large class of Linear and nonlinear problems in different fields of science and engineering.

Keywords: Boundary-Layer, Adomian decomposition, Falkner-Skan, Blasius.

Mathematics Subject Classification (2010): 37A25, 34D20.

مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۱، ص ۲۴۴-۲۳۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2020.15405

روش تجزیه ادومین در حل معادله لایه مرزی فالکنر- اسکن

شهرام رضاپور[۱]*، حکیمه محمدی**

*گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

**گروه ریاضی، واحد میاندوآب، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۱۶

چکیده: در این مقاله روش تجزیه ادومین (ADM)، برای حل معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌کاربرده شده است. این روش یکی از روش‌های تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی است. در تحقیق حاضر، معادله فالکنر- اسکن برای شرایط خاص (جریان بلازیوس، جریان نقطه سکون، جریان در کانال همگرا، جریان روی گوه) حل شده است. مشاهده شد که این روش نتایج بسیار دقیقی به دست می‌دهد و همچنین یک ابزار قدرتمند ریاضی است که برای حل مسائل فراوان خطی و غیرخطی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی به‌کاربرده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: لایه مرزی، تجزیه ادومین، فالکنر- اسکن، بلازیوس.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۷A۲۵، ۳۴D۲۰.

۱- مقدمه

روش تجزیه ادومین برای حل طیف وسیعی از مسائل فیزیکی و مهندسی، مخصوصاً برای جریان غیرقابل تراکم دو بعدی و پایا و آرام استفاده شده است. روش ادومین (ADM) مشهورترین روش سیستماتیک برای یافتن جواب‌های کاربردی خطی و غیرخطی و قطعی و تصادفی معادلات عملگر شامل معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) و معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) و معادلات انتگرالی و ... است [۷-۱]. (ADM) تکنیک قدرتمندی است که الگوریتم‌های کارآمدی برای جواب‌های تحلیلی و عددی برای کاربرد در مسائل واقعی جهان در علوم کاربردی و مهندسی

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: rezapourshahram@yahoo.ca

ایجاد می‌کند؛ که به ما امکان حل مسائل مقدار اولیه (IVP) و مسائل مقدار مرزی (BVP) را فراهم می‌کند [۱۰-۸].

مسائل مربوط به جریان غیرقابل تراکم دو بعدی و پایا و آرام لایه مرزی به شکل معادله دیفرانسیل جزئی درجه سوم غیرخطی بیان می‌شود که مستقیماً آن را نمی‌توان حل کرد. این معادلات اولین بار توسط فالکنر- اسکن در سال ۱۹۳۱ بیان شدند و بنابراین معادلات فالکنر- اسکن نامیده شده‌اند. فالکنر- اسکن روش تبدیل تشابهی را برای معادله لایه مرزی دیفرانسیلی توسعه داد. سپس آن را به معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه ۳ غیرخطی کاهش داد که مستقیماً به‌صورت عددی حل شد [۱۱]. راه‌حل‌ها و وابستگی‌شان به هم بعدها توسط هارتری امتحان شد [۱۲]. نا، یک گروه تبدیلات را بکار برد که مسائل مرزی را به یک جفت مسائل مرزی اولیه کاهش داد و سپس این مسائل را توسط روش انتگرالی مستقیم حل کرد [۱۳]. راجا گوپال و همکاران، جریان لایه مرزی فالکنر- اسکن را برای مسائل مرتبه دوم غیرقابل تراکم همگن حول یک گوه متقارن نسبت به جهت جریان مورد مطالعه قرار داد [۱۴]. لین و لین، یک روش حل تشابهی برای جریان انتقال گرمای جابجایی اجباری روی سطح هم‌دما را با هر عدد پرانتل معرفی کرد [۱۵]. هوسو و همکاران، دما و میدان جریان برای جریان حول یک گوه را توسط روش بسط سری‌ها، تبدیلات تشابهی، انتگرال رانگ کوتا و روش شوتینگ مطالعه کردند [۱۶].

اساتامبی، روش اختلاف محدود را برای معادله فالکنر- اسکن پیشنهاد داد [۱۷]. بعداً هرسو و هایو، ترکیبی از بسط سری‌ها، تبدیلات تشابهی و روش اختلاف محدود برای مسائل انتقال گرمای سیال ویسکو الاستیک مرتبه دوم حول پره فن دار را ارائه داد [۱۸]. بور- لی کایو، تحلیل انتقال گرما برای جریان گوه فالکنر- اسکن را توسط روش تبدیلات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که نتایج حاصله تطابق خوبی با دیگر روش‌های عددی دارد [۱۹]. حقیقی در سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۶ معادله برگرهای غیرخطی یک‌بعدی را با روش تجزیه ادومین حل نمود و نتایج حاصل را با روش کرانک نیکلسون و روش شبکه بولتزمن مقایسه کرد [۲۱-۲۰].

در این مقاله کاربرد روش تجزیه ادومین (ADM) برای حل مسئله جریان فالکنر- اسکن مورد ارزیابی قرار گرفته است. چون گرادیان فشار داریم بنابراین لبه لایه مرزی برای شرط مرزی مشخص نیست. برای نشان دادن درستی این روش معادله مومنتوم برای معادله فالکنر- اسکن برای شرایط خاص (جریان بلازیوس، جریان نقطه سکون، جریان در کانال همگرا، جریان روی گوه) حل شده است.

۲- اساس و پایه روش ADM

برای بیان ایده اساسی این روش، ابتدا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$Ly(x)+Ry(x)+Ny(x)=g(x) \tag{۱}$$

به‌طوری‌که شرط مرزی عبارت است از: $y^{i}(\circ)=\alpha_i$ و $i=\circ,۱,۲,...,n$

ه‌مچنین L عملگر خطی معکوس‌پذیر، R بقیه عملگر خطی و N عملگر غیرخطی است. عملگر L^{-1} را بر طرفین رابطه (۱) اثر می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$y=\varphi+L^{-۱}\left(g(x)\right)-L^{-۱}Ry(x)-L^{-۱}Ny(x) \tag{۲}$$

به‌طوری‌که φ از اعمال شرایط مرزی موجود حاصل می‌شود. روش تجزیه ادومین (ADM) فرض می‌کند که جواب y(x) به‌صورت سری نامتناهی زیر باشد:

$$y(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty}y_n(x) \tag{۳}$$

و عملگر غیرخطی N(y) را به‌صورت سری نامتناهی از چندجمله‌ای‌ها به‌صورت زیر در نظر می‌گیرد:

$$N(y)=\sum_{n=\circ}^{\infty}A_n \tag{۴}$$

و An ها چندجمله‌ای‌هایی از $y_\circ, y_۱, ..., y_n$ می‌باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n\left(y_\circ.\ y_۱.\ ...\ y_n\right)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=\circ}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=\circ} \quad \text{و} \quad n=\circ,۱,... \tag{۵}$$

با جای گذاری روابط (۳) و (۵) در معادله دیفرانسیل (۲) و حل آن توابع $y_\circ, y_۱, y_۲, ..., y_n$ حاصل می‌شوند.

۳- معادلات حاکم و روش حل آن

معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\circ \tag{۶}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-۱}{p}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}} \tag{۷}$$

که در آن u و v به ترتیب سرعت سیال در راستای x و y و P معرف فشار است. برای ارتباط گرادیان فشار با سرعت از معادله برنولی استفاده شده است.

$$-\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx} \qquad (8)$$

که در آن U_∞ سرعت جریان آزاد در جهت x است. برای لایه مرزی آرام، با فرض $\frac{\partial p}{\partial x}=0$، با تعریف متغیرهای تشابهی و بی‌بعد حل بلازیوس به‌دست‌آمده است؛ اما برای حالتی که گرادیان فشار صفر نیست فالکنر- اسکن شرایط خاصی را که استفاده از حل تشابهی را ممکن می‌سازد را بررسی و ارائه نمود [۱۱]. جریان سیال لزج غیرقابل تراکم را بالای یک گوه در نظر بگیرید:

$$U_\infty(x)=Cx^m \quad \text{و} \quad m=\frac{\beta}{2x-\beta} \qquad (9)$$

متغیرهای تشابهی و بی‌بعد به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$z=\frac{y}{\sqrt{x}}Re_x^{0/5} \quad \text{و} \quad f'(z)=\frac{u}{U_\infty} \qquad (10)$$

با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰) و جاگذاری آن‌ها در معادله (۶) و (۷) معادله مومنتوم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$f'''+\alpha ff''+\beta(1-f'^2)=0 \qquad (11)$$

که در آن شرایط مرزی برای f؛ سرعت بدون بعد شده؛ به‌صورت زیر است:

$$f(0)=0. \qquad f'(0)=0. \qquad f'(\infty)=1 \qquad (12)$$

ازآنجاکه معادله (۱۱) غیرخطی است و حل تحلیلی آن مشکل است بنابراین برای حل آن از روش تجزیه ادومین استفاده شده است.

۳-۱ جریان عبور کننده از روی یک صفحه مسطح

برای جریان عبوری از روی یک صفحه مسطح با زاویه حمله صفر معادله فالکنر- اسکن به معادله (۱۳) تقلیل می‌یابد:

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=0 \qquad (13)$$

که شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$f(0)=0\ , \qquad f'(0)=0\ , \qquad f'(\infty)=1.$$

برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله را به‌صورت $L(f)+N(f)=0$ می‌نویسیم به‌طوری‌که: $L(f)=f'''$ و $N(f)=\frac{1}{2}ff''$.

عملگر معکوس $L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۱۳) اعمال می‌کنیم:

$$f=A+Bx+Cx^2-L^{-1}\left(N(f)\right) \quad (۱۴)$$

از شرط مرزی $f(0)=0$ مقدار $A=0$ و از شرط $f'(0)=0$ مقدار $B=0$ حاصل می‌شود، بنابراین

$$f=Cx^2-L^{-1}\left(\frac{1}{2}ff''\right) \quad (۱۵)$$

قسمت غیرخطی $N(f)=\frac{1}{2}ff''$ را به‌صورت $N(f)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ تجزیه می‌کنیم بطوریکه

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}f_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0} \quad ، n=0,1,2,3,\ldots \quad (۱۶)$$

A_n چندجمله‌ای‌های ادومین برای قسمت غیرخطی $N(f)=\frac{1}{2}ff''$ می‌باشند بطوریکه:

$$A_0=N(f_0)=\frac{1}{2}f_0f_0''$$

$$A_1=N'(f_0)f_1=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0^{(3)}\right)f_1$$

$$A_2=N'(f_0)f_2+N''(f_0)\frac{f_1^2}{2!}=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_2+\left(\frac{1}{2}f_0''^2+\frac{1}{2}f_0'f_0^{(3)}+\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0^{(3)}\right).\frac{f_1^2}{2}$$

$$A_3=N'(f_0)f_3+N''(f_0)f_1f_2+N^{(3)}(f_0)\frac{f_1^3}{3!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_3+\left(\frac{1}{2}f_0''^2+f_0'f_0''+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)f_1f_2+\left(f_0''f_0^{(3)}+f_0''^2+\frac{3}{2}f_0'f_0^{(3)}+\frac{1}{2}f_0f_0''\right)\frac{f_1^3}{6}.$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_0=cx^2 \\ f_n=-L^{-1}\left(A_{n-1}\right) \text{ ، } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

جملات جواب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_1=-L^{-1}\left(A_0\right)=-c^2\frac{x^5}{60}$$
$$f_2=-L^{-1}\left(A_1\right)=\frac{-1}{494}c^4x^9$$

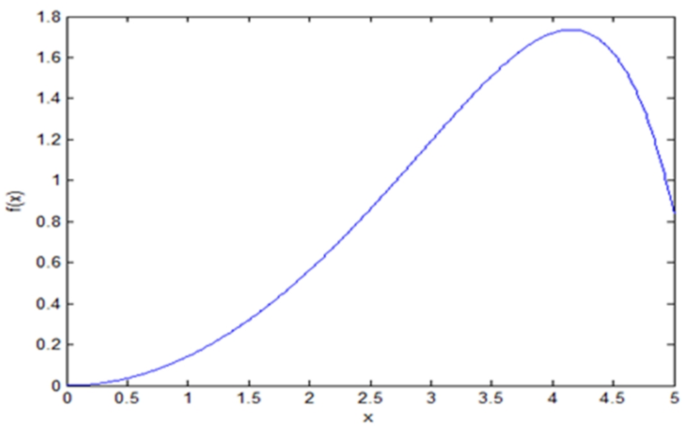
جواب به‌صورت $f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ حاصل می‌شود

$$f=f_0+f_1+f_2+\ldots=cx^2+(c^2\frac{x^5}{60})-\frac{1}{494}c^4x^9+\ldots- \qquad (17)$$

اگر شرط $f'(\infty)=1$ را در $f=f_0+f_1+f_2$ اعمال کنیم مقدار $c=0/1435$ به دست می‌آید و جواب زیر حاصل می‌شود:

$$f\left(x\right)=0/1435\ x^2-(0/1435)^2\frac{x^5}{60}-\frac{1}{494}(0/1435)^4x^9+\ldots$$

با افزایش جملات f می‌توان مقدار c را دقیق‌تر محاسبه نمود. نتایج تحلیلی روش حاضر با حل بلازیوس با روش هموتوپی در جدول شماره ۱ مقایسه شده است و همان‌طور که ملاحظه می‌شود سازگاری بسیار خوبی بین حل بلازیوس و روش حاضر وجود دارد و همچنین رفتار تابع در این حالت در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): جریان عبور کننده از روی یک صفحه مسطح

جدول (۱): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده f(x) از روش ADM و HPM [23]

x	f(x) (ADM)	f(x) (ADM)
۰	۰	۰
۰/۲	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۶۶
۰/۴	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۶۶
۰/۶	۰/۰۵۱۶	۰/۰۵۹۷
۰/۸	۰/۰۹۱۷	۰/۱۰۶۱
۱	۰/۱۵۳۲	۰/۱۶۵۵
۱/۲	۰/۲۲۵۸	۰/۲۳۷۹
۱/۴	۰/۳۲۹۴	۰/۳۲۲۹
۱/۶	۰/۳۸۳۷	۰/۴۲۰۳
۱/۸	۰/۴۵۸۳	۰/۵۲۹۵

۳-۲- جریان نقطه سکون

در جریان نقطه سکون، در لایه مرزی دو بعدی معادله فالکنر-اسکن به معادله (۱۸) تقلیل می‌یابد:

$$f''' + ff'' + 1 - (f')^2 = 0 \tag{۱۸}$$

که در آن شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0, \; f'(\infty) = 1,$$

برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله را به‌صورت $f''' + ff'' - f'^2 = -1$ در نظر می‌گیریم که به‌صورت

$$L(f) + N(f) = g \tag{۱۹}$$

نوشته می‌شود و در آن $L(f) = f'''$، $N(f) = ff'' - f'^2$ و $g = -1$ است. با اعمال $L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x (.) dx\, dx\, dx$ بر طرفین رابطه (۱۹) داریم

$$f = A + Bx + Cx^2 - \frac{x^3}{3!} - L^{-1}(N(f)).$$

از شرط $f(0) = 0$ مقدار $A = 0$ و از شرط $f'(0) = 0$ مقدار $B = 0$ حاصل می‌شود بنابراین:

$$f = cx^{2} - \frac{x^{3}}{6} - L^{-1}\left(N(f)\right) = \theta(x) - L^{-1}\left(N(f)\right)$$

اگر قسمت غیرخطی $N(f) = ff'' - f'^{2}$ را تجزیه کنیم در این صورت خواهیم داشت $N(f) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ به‌طوری‌که $A_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[N\left(\sum_{K=0}^{\infty} f_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0}$ ، بنابراین

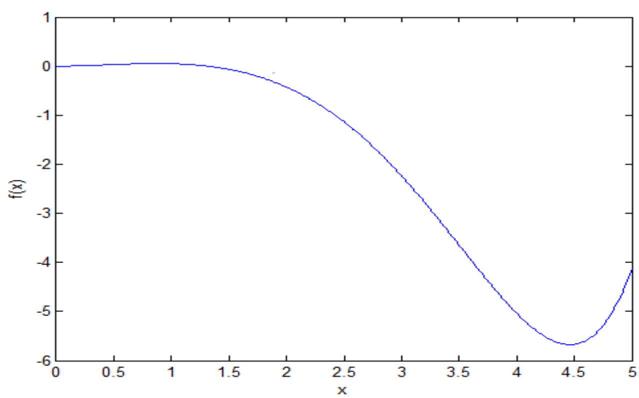
$$A_0 = N(f_0) = f_0 f_0' - f_0'^{2}$$
$$A_1 = N'(f_0) f_1 = \left[f_0' f_0'' + f_0 f_0^{(3)} - 2f_0' f_0''\right] f_1$$
$$A_2 = N'(f_0) f_2 + N''(f_0)\frac{f_1^{2}}{2!} = \left[f_0' f_0'' + f_0 f_0'' - 2f_0' f_0'\right] f_2 + \left[-f_0''^{2} + f_0 f_0^{(4)}\right]\frac{f_1^{2}}{2}$$

با در نظر گرفتن دنباله بازگشتی به‌صورت

$$\begin{cases} f_0 = \theta(x) = cx^{2} - \dfrac{x^{3}}{6} \\ f_n = -L^{-1}\left(A_{n-1}\right), \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

جملات بعدی جواب حاصل می‌شوند:

$$f_1 = \frac{1}{30} c^{2}x^{5} - \frac{1}{180} cx^{6} + \frac{1}{2520} x^{7}$$
$$f_2 = \frac{1}{7200}c^{3}x^{10} - \frac{62}{2494800}c^{2}x^{11} + \frac{3600}{1796256000}c\,x^{12} + \frac{1}{2520}c^{4}x^{9} + \frac{1}{12972960}x^{13}.$$



شکل (۲): جریان نقطه سکون

جدول (۲): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده f(x) از روش ADM و HPM [22]

x	f(x) (ADM)	f(x) (ADM)
۰	۰	۰
۰/۱	۰/۱۱۸۲۶۴	۰/۱۱۸۲۶
۰/۲	۰/۲۲۶۶۱۲	۰/۲۲۶۶۱
۰/۳	۰/۳۲۵۲۳۹	۰/۳۲۵۲۴
۰/۴	۰/۴۱۴۴۰۳	۰/۴۱۴۴۶
۰/۵	۰/۴۹۴۶۰۱	۰/۴۹۴۶۵
۰/۶	۰/۵۶۶۲۴۹	۰/۵۶۶۲۸
۰/۷	۰/۶۲۹۸۰۳	۰/۶۲۹۸۶
۰/۸	۰/۶۸۵۸۴۱	۰/۶۸۵۹۴
۰/۹	۰/۷۳۴۸۸۱	۰/۷۳۵۰۸
۱	۰/۷۷۷۶۳۶	۰/۷۷۷۸۷
۱/۱	۰/۸۱۴۵۳۸	۰/۸۱۴۸۷

بدین ترتیب جواب مسئله $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ حاصل می‌شود. مقدار c را با هر تعداد از جملات سری و شرط مرزی می‌توان به دست آورد. مثلاً اگر $f= f_0 + f_1 + f_2$ را در نظر بگیریم با توجه به‌شرط مرزی $f'(\infty)=1$ مقدار $c=0/210034$ حاصل می‌شود. در جدول شماره ۲، نتایج تحلیلی روش آدومیان حاضر با حل عددی [۲۲] مقایسه شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود سازگاری خوبی بین حل عددی و روش حاضر وجود دارد. همچنین در شکل ۲ رفتار تابع در حالت جریان نقطه سکون نشان داده شده است .

۳-۳- جریان در کانال همگرا

برای جریان در یک کانال همگرا، معادله فالکنر – اسکن به معادله (۲۰) تقلیل می‌یابد:

$$f''' + 1 - (f')^2 = 0 \qquad (20)$$

که در آن شرایط مرزی به‌صورت

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=0, \qquad f'(\infty)=1$$

است. برای حل معادله بالا از روش تجزیه ادومین استفاده می‌کنیم. برای این کار معادله

$f''' - (f')^{۲} = -۱$ را در نظر می‌گیریم که $L(f)=f'''$ و $N(f)= u'^{۲}$ و $g = -۱$ و معادله به‌صورت زیر است:

$$L(f) - N(f)=g \qquad (۲۱)$$

عملگر معکوس $L^{-۱}(.)=\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x}(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۲۱) اعمال می‌کنیم:

$$f = A + Bx + Cx^{۲} + L^{-۱}\left(N(f)\right)+L^{-۱}\left(-۱\right)$$

از طرفی $L^{-۱}\left(-۱\right)=-\frac{۱}{۶}x^{۳}$، بنابراین:

$$f = A + Bx + Cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} + L^{-۱}\left(N(f)\right)$$

چون $f(۰)=۰$ پس $A=۰$ و $f'(۰)=۰$ پس $B=۰$ بنابراین:

$$f = Cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} - L^{-۱}\left(N(f)\right)$$

تجزیه ادومین را برای $N(f)$ به‌صورت $N(f)=\sum_{n=۰}^{\infty}A_n$ در نظر می‌گیریم، بطوریکه

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{\delta^n}{\delta\lambda^n}\left[N(\sum_{k=۰}^{\infty}f_k\lambda^k)\right]_{\lambda=۰}.$$

در این صورت:

$$A_{۰} = N(f_{۰})=f_{۰}'^{۲}$$

$$A_{۱} = N'(f_{۰}).f_{۱}=۲f_{۰}'\,f_{۰}''f_{۱}$$

$$A_{۲} = N'(f_{۰}).f_{۲}+N''(f_{۰})\frac{f_{۱}^{۲}}{۲!} = ۲\;f_{۰}''\,f_{۰}'.f_{۲} + \left[۲\;f_{۰}''^{\,۲} + 2\;f_{۰}'\,f_{۰}^{(۳)}\right].\frac{f_{۱}^{۲}}{۲}$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f_{۰}=\theta(x)= cx^{۲} - \frac{۱}{۶}x^{۳} \\ f_n = -L^{-۱}\left(A_{n-۱}\right)\;, \quad n=۱,۲,\dots \end{cases}$$

جملات سری جواب $f=\sum_{n=۰}^{\infty}f_n$، به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$f_1=\frac{1}{15}c^2x^5+\frac{1}{840}x^7-\frac{1}{60}cx^6$$

$$f_2=\frac{1}{810}c^4x^9+\frac{148}{831600}c^2x^{11}-\frac{32}{43200}c^3x^{10}-\frac{1}{55440}cx^{12}+\frac{1}{1469520}x^{13}$$

۳-۴- جریان بر روی گوه

برای جریان روی گوه، با انتخاب $\alpha=1$ و $\beta=0/5$ معادله فالکنر – اسکن به معادله

$$f'''+ff''+\frac{1}{2}\left[1-(f')^2\right]=0 \qquad (22)$$

تقلیل می‌یابد که در آن شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$f'(\infty)=1,\quad f'(0)=0,\quad f(0)=0.$$

برای حل معادله بالا با استفاده از روش تجزیه ادومین، معادله را به‌صورت:

$$L(f)+N(f)=g \qquad (23)$$

در نظر می‌گیریم که $L(f)=f'''$، $N(f)=ff''-\frac{1}{2}(f')^2$ و $g=-\frac{1}{2}$ است. عملگر معکوس $L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x(.)dx\,dx\,dx$ را بر طرفین معادله (۲۳) اعمال می‌کنیم:

$$f=A+Bx+Cx^2-L^{-1}(N(f))+L^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

از طرفی: $L^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}x^3$ بنابراین

$$f=A+Bx+Cx^2-\frac{1}{12}x^3-L^{-1}(N(f))$$

از شرایط مرزی $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ مقادیر $A=0$ و $B=0$ حاصل می‌شود:

$$f=Cx^2-\frac{1}{12}x^3-L^{-1}(N(f))$$

تجزیه ادومین را برای $N(f)$ به‌صورت: $N(f)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ در نظر می‌گیریم بطوریکه:

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\delta^n}{\delta\lambda^n}\left[N(\sum_{k=0}^{\infty}f_k\lambda^k)\right]_{\lambda=0}$$

در این صورت:

$$A_0=N(f_0)=f_0\,f_0''-\frac{1}{2}(f_0')^2$$
$$A_1=N'(f_0)f_1=f_0\,f_0'''f_1$$
$$A_2=N'(f_0)\,f_2+N''(f_0)\frac{f_1^2}{2}=f\,f_0''f_2+\left[\,f_0'\,f_0'''+f_0\,f_0^{(4)}\right].\frac{f_1^2}{2}$$

دنباله بازگشتی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}f_0=\theta\left(x\right)=cx^2-\frac{1}{12}x^3\\ f_n=-L^{-1}\left(A_{n-1}\right)\ ,\ n=1,2,\ldots\end{cases}$$

جملات سری جواب $f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n$، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f_1=-L^{-1}\left(A_0\right)=-\frac{1}{20160}\,x^7+\frac{1}{720}\,cx^6$$
$$f_2=\frac{1}{1425600}c^2x^{11}+\frac{1}{830269440}x^{13}-\frac{1}{1596720}c\,x^{12}$$

۴- نتیجه‌گیری

روش تجزیه ادومین، (ADM) *برای* حل معادلات حاکم بر لایه مرزی دو بعدی برای سیال تراکم ناپذیر به‌کاربرده شده است به‌طوری‌که روش ادومین می‌تواند رفتار لایه مرزی را پیش‌بینی کند. این روش دارای مزایای زیادی است که از آن جمله می‌توان به‌دقت بالا و سرعت زیاد همگرایی سری جواب اشاره کرد و بر اساس مقایسه‌ای که با روش عددی انجام شد نشان می‌دهد که سازگاری خوبی با جواب‌های روش‌های دیگر دارد.

منابع

[1] Adomian, G. and Rach, R. (1983). Inversion of nonlinear Stochastic operators, *J. Math. Anal. Appl.* **91**, 39-46.

[2] Adomian, G. (1983). *Stochastic systems*, Academic, New York.

[3] Bellman, R.E. and Adomian, G. (1985). *Partial Differential Equations: New Methods for their Teatment and Solution*, D. Reidel, Dordrecht.

[4] Adomian, G. (1986). *Nonlinear Stochastic operator equations*, Academic, Orlando, FL.

[5] Bellomo, N. and Riganti, R. (1987). *Nonlinear Stochastic System Analysis in Physics and Mechanics*, world Scientific, Sigapore and River Edge, Nd.

[6] Adomian, G. (1989). *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Application to Physics*, Kluwer Academic, Dordrecht.

[7] Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic, Dordrecht.

[8] Cherruault, Y. (1998). *Models et methods mathematiques pour les Sciences du virant*, Presses Universitaires de France, Paris.

[9] Wazwaz, A.M. (1997). *A First course in Integral Equations, world Scientific*, Singapore and River Edge, NJ.

[10] Wazwaz, A.M. (2002). *Partial differential Equations: Methods and Applications, Lisse*, The Netherlands.

[11] Falkner, V.M. and Skan, S.W. (1931).Some approrimate Solutions of the boundary layer equations, *Philos. Mag.*, **12**, 865-896.

[12] Hartree, D.H. (1937). on an equation occurring in Falkner and Slcan, S approximate treatment of the boundary layer, *Proc Soc. Cambridge Philos.*, **33**, 223-239.

[13] Na, T.Y. (1979). *Computational methods in engineering boundary value problems*, Academic Press, New York.

[14] Rajagopal, K.R., Gupta, A.S. and Na, T.Y. (1983). A note on the falkner-Skan flows of a non- New tonian fluid. *Int. J. Non-Linear Mech.*, **18**, 313-320.

[15] Lin, H.T. and Lin, L.K. (1987). Similarity Solutions for laminar forced convection heah transfer from wedges to fluids of any prandtl number. *Int. J. Heat Mass. Transfer*, **30**, 1111-1118.

[16] Hsu, CH., Chen, CS. And Teng, H.T. (1997). Temperature and flow fields for the flow of a Second grade fluid past a wedge, *Int. J. Non- linear Mech.*, **32**, 933-946.

[17] Asaithambi, A. (1998). A finite- difference method for the solution of the falkner-Skan equation, *Apple., Math., Comput.*, **92**, 135-141.

[18] Hsu, C.H. and Hsiao, K.L. (1998). Conjugate heat transfer of a plate fin in a second- grade fluid flow. *Jnt. J. Heat Mass. Transfer*, **41**, 1087-1102.

[19] Kuo, B.L. (2005). Transfer analysis for the falkner-Skan wedge flow by the differential transformation method, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, 5036-5046.

[20] Haghighi, AR. And Shojaeifard, M. (2015). Numerical solution of the one dimensional non-linear Burgers equation using the Adomian decomposition method and the comparison between the modified Local Crank-Nicolson method, *Int. J. Industrial Mathematics* ,7, 149-159.

[21] Haghighi, A.R. and Pakrou, S. (2016). Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional nonlinear Burgers' equation, *Int. J. of Computing Science and Mathematics*, 7, 459-466.

[22] Shah, R.A., Islam, S., Zaman and Hussain, G. T. (2004). Solution of stagnation point flow with heat transfer analysis by optimal Homotopy Asymptotic method, *Proceedings of the Romanian Academy Series*, 11. 312-321.

[23] He, J.H. (2004). Comparition of Homotopy perturbation method and Homotopy analysis method, *Appl. Math. Comput*, 156, 527-539.

JAMM (2020) 10(1): 231-244
DOI: 10.22055/JAMM.2020.15405

Shahid Chamran
University of Ahvaz

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Adomian Decomposition Method in Solving of Falkner-Skan Boundary Layer Equation

Shahram Rezapour*, Hakimeh Mohammadi**

*Department of Mathematics, Azarbaidjan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

**Department of Mathematics, Miandoab Branch, Islamic Azad University, Miandoab, Iran

Received: November 2 2018 Accepted for publication: March 6 2020
Corresponding author: rezapourshahram@yahoo.ca

Abstract

In this paper an analytical technique, namely the adomian decomposition method (ADM), has been applied to solve the governing equations for boundary- Layer problems in the case of a two dimensional incompressible flow. In the present work, Falkner-Skan equation for special circumstances (Blasius flow, Stagnation point flow, flow in a convergent channel, flow over a wedge) has been solved. It is found that this method can give very accurate results and also it is powerful mathematical tool that can be applied to a large class of Linear and nonlinear problems in different fields of science and engineering.

Keywords: Boundary-Layer, Adomian decomposition, Falkner-Skan, Blasius.

Mathematics Subject Classification (2010): 37A25, 34D20.