

حل عددی معادله تلگراف دو بعدی با استفاده از روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه بندی مستقیم

علی شکری^۱، عرفان بهمنی

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۹/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱/۲

چکیده: روش های تفاضلات متناهی و المان های محدود برای حل برخی از مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با محدودیت هایی همراه می باشند. برای رفع این گونه محدودیت ها، می توان از یک روش بدون شبکه بندی بهره برد. در روش های بدون شبکه بندی، برای حل مسئله نیازی به شبکه بندی دامنه نیست و از نقاط پراکنده شده در فضا برای تقریب تابع مجهول استفاده می شود. در این مقاله معادله تلگراف دو بعدی با استفاده از روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه بندی مستقیم مبتنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته به صورت عددی حل شده است. برای سنجش دقت این روش از مقایسه نتایج با مقدار دقیق و سایر روش های موجود استفاده شده است که نتایج حاصل نشان دهنده دقت بالای این روش است.

واژه های کلیدی: روش بدون شبکه پترو-گالرکین مستقیم، تقریب کمترین مربعات متحرک، تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته، معادله تلگراف دو بعدی، فرم ضعیف محلی.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۵M۹۹، ۳۵L۱۰

۱- مقدمه

معادله ی دیفرانسیل یک معادله ی ریاضی است که شامل یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتق های مراتب مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت (در فیزیک، شیمی، زیست شناسی و ستاره شناسی) طبیعی ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می یابند. معادلات دیفرانسیل همچنین در مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم کاربرد فراوانی دارند. هر زمان که یک رابطه بین چند متغیر با

مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود داشته باشد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالات مختلف معلوم باشد، می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد. معادلات دیفرانسیل به‌طور کلی به دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) تقسیم می‌شوند. تاکنون روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه شده است. به‌عنوان مثال روش المان‌های محدود یکی از روش‌های عددی است که در دهه‌های اخیر توانایی خود را در عرصه‌های مختلف محاسباتی نشان داده و به همین دلیل به‌عنوان یکی از متداول‌ترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده نویسندگان و متخصص‌های مختلف قرار گرفته است [۱ و ۲]. باوجود موفقیت‌های چشم‌گیری که این روش در حل مسائل مختلف خطی و غیرخطی از خود نشان داده، موارد مختلفی نیز وجود دارد که این روش در آن‌ها با مشکلاتی همراه است. یکی از این موارد مسائلی است که هندسه‌ی مسئله در آن‌ها باید به نحوی در خلال انجام مراحل حل تغییر یابد. از این نمونه مسائل می‌توان به موضوع گسترش ترک و مسائل سطح آزاد اشاره کرد که اصلاح شبکه محاسباتی در هر مرحله امری ضروری است. علت بروز چنین مشکلاتی به ارتباط تنگاتنگ روش المان‌های محدود با المان بندی مسئله مربوط است. در واقع المان‌های مورد استفاده باید در هر مرحله از فرآیند حل مسئله تغییر هندسه مسئله را به‌نحو مقتضی دنبال کرده و در برخی موارد حتی لازم است که هندسه جدید مسئله دوباره المان بندی شود [۳].

در طی سال‌های اخیر دسته جدیدی از روش‌های محاسباتی ارائه شده است که برخلاف روش المان‌های محدود، برای حل معادلات دیفرانسیل، به شبکه‌بندی ناحیه مسئله نیاز نیست. این دسته از روش‌ها را روش‌های بدون المان یا روش‌های بدون شبکه می‌نامند. یکی از این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل در فرم ضعیف محلی، روش المان آزاد گالرکین است [۴]. در این‌گونه از روش‌ها، از مجموعه‌ی گره‌ها که در ناحیه مسئله توزیع شده است، برای ساخت توابع تقریب، گسسته‌سازی و حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌شود [۵].

مزایای روش‌های بدون المان سبب شده است که در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققین در زمینه مکانیک محاسباتی به این دسته از روش‌ها جلب شده و تحقیقات گسترده‌ای در زمینه خواص و کاربردهای این‌گونه از روش‌ها انجام شود. اولین نمونه از چنین روش‌هایی در سال ۱۹۷۷ معرفی شد [۶]. پایه و اساس این روش‌ها بر مبنای مدل‌سازی اثر متقابل ذرات بر یکدیگر در علم فیزیک نوین شکل گرفت که درنهایت با توسعه ایده‌ی اولیه، پژوهشگران توانستند روش‌های بدون شبکه‌بندی متنوعی را ارائه دهند.

در سال‌های اخیر، تلاش‌های گسترده‌ای برای یافتن روش مناسب جهت حل عددی مسائل با مقادیر مرزی صورت گرفته است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش تابع پایه‌ای شعاعی [۷] و

[۸] و روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین مستقیم اشاره کرد. این روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از شکل ضعیف محلی و تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته است [۹]. در این مقاله به بیان این روش پرداخته و از این روش برای حل معادله تلگراف دو بعدی استفاده شده است.

معادله تلگراف یک معادله دیفرانسیل جزئی هذلولوی است که ولتاژ و جریان در یک خط انتقال را برحسب مسافت و زمان توصیف می‌کند و پایه‌ای برای معادلات بنیادی فیزیک اتمی است [۱۰]. همچنین از معادله تلگراف برای مدل‌سازی مسائل متعددی از قبیل آنالیز سیگنال‌ها و انتشار امواج استفاده می‌شود [۱۱]. این معادله در مدل‌سازی انتشار سیگنال‌های میانی یک خط انتقال، پردازش تصویرهای دیجیتالی و ارتباط از راه دور سیستم‌ها با یکدیگر نمود پیدا می‌کند [۱۲]. همچنین زیست‌شناسان از این معادله در مطالعه گردش خون در سرخرگ‌ها استفاده کرده‌اند [۱۳].

به دلیل کاربرد گسترده معادله تلگراف، این معادله مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است و تاکنون از روش‌های عددی مختلفی برای حل این معادله استفاده شده است. برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش ماتریس تیلور [۱۴]، روش تفاضلات متناهی [۱۵]، روش بدون شبکه ترکیبی ضعیف-قوی محلی [۱۶]، روش ترکیبی تفاضلات متناهی و موجک‌های هار [۱۷]، روش چندوجهی لژاندر [۱۸]، روش المان محدود [۱۹-۲۰]، روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی [۲۱] و روش B-اسپلاین اصلاح شده (DQM) [۲۲].

روش بدون شبکه پترو-گالرکین مستقیم (DMLPG) بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته است. این روش برای اولین بار توسط میرزایی و شابک [۹] برای حل عددی معادله انتشار گرمای دو بعدی ابداع و پیاده‌سازی شد. تاکنون از روش بدون شبکه پترو-گالرکین مستقیم برای حل عددی بسیاری از معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده شده است. به‌عنوان مثال شکری و بهمنی از این روش برای حل عددی معادله گینزبرگ-لاندو دو بعدی استفاده کرده‌اند [۲۳]. سارتورتو و همکاران در [۲۴] از این روش برای حل معادله پواسون ۳ بعدی استفاده کرده‌اند. در [۲۵] دهقان و عباس‌زاده از روش DMLPG برای حل دستگاه زاخاروف تعمیم‌یافته یک بعدی و دو بعدی بهره گرفته‌اند.

در بخش‌های بعدی این مقاله ابتدا تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته بیان شده است و سپس روش بدون شبکه پترو-گالرکین مستقیم روی شکل ضعیف محلی معادله تلگراف دو بعدی پیاده‌سازی شده و در نهایت نتایج عددی حاصل از این روش در قالب دو مثال گزارش شده است.

۲- تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته

در این بخش تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته (GMLS) معرفی شده است. برای درک بهتر این تقریب، در ابتدا ناگزیر به بیان تقریب کمترین مربعات متحرک هستیم. تقریب کمترین مربعات متحرک که از این پس آن را به اختصار MLS می نامیم، برای اولین بار توسط لنکستر و سال کاوس کاس [۲۶] در سال ۱۹۸۱ و با الهام گرفتن از کارهای شپارد [۲۷] در سال ۱۹۶۸ و مکلاين [۲۸ و ۲۹] در سال های ۱۹۷۴ و ۱۹۷۶ در حین مطالعات خود بر روی برازش سطحی و به منظور تقریب رویه های چند بعدی مطرح شد.

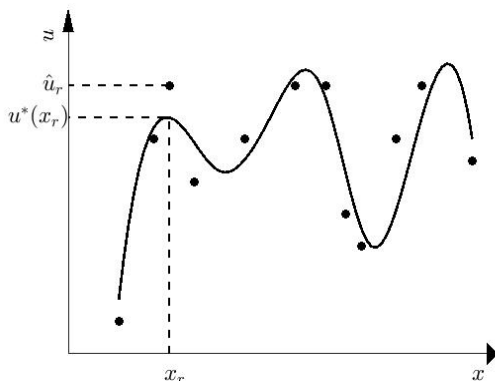
تقریب عددی در MLS بر پایه ی نقاط تصادفی پراکنده شده در ناحیه ی تقریب است و از این روی در دهه ۹۰ میلادی و بعد از آن این تکنیک به عنوان پایه ای برای روش های بدون شبکه در حل معادلات دیفرانسیل مورد توجه قرار گرفت. به عبارت دیگر تقریب MLS روشی برای ساختن تقریبی از یک تابع مجهول پیوسته با داشتن مقدار آن تابع در تعدادی نقطه مجزا بر پایه ی تقریب کمترین مربعات وزنی است. در بسیاری از روش های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از روش MLS برای ساختن توابع شکل استفاده می شود. در سال ۱۹۹۲ ناپرولز و همکاران برای اولین بار به منظور ساخت توابع شکل از روش MLS استفاده کردند [۳۰]. دو خصوصیت اصلی این روش که سبب استفاده از آن شده است عبارتند از [۳۱]:

(۱) تابع میدانی تقریب زده شده در کل دامنه مسئله پیوسته است.

(۲) این روش توانایی ساخت تقریب از تابع مجهول با هر مرتبه دلخواه از همواری را دارد.

نکته ی دیگر درباره روش MLS این است که تابع تقریب ساخته شده به وسیله این روش، برخلاف روش های درون یابی که تابع تقریب ساخته شده در خود مراکز مقداری برابر با مقدار اندازه گیری شده دارد، می تواند مقداری متفاوت با مقدار اندازه گیری شده داشته باشد. به بیان دیگر منحنی عبور داده شده از میان نقاط داده شده، ممکن است از خود نقاط عبور نکند (شکل ۱ را ببینید).

برای تعمیم تقریب MLS فرض کنید $u \in C^m(\Omega), m \geq 0$ و همچنین $\{\mu_j(u)\}_{j=1}^N$ یک مجموعه از تابع های خطی و پیوسته از دوگان $C^m(\Omega)$ یعنی $C^m(\Omega)^*$ باشند. برای یک تابع ثابت داده شده $\lambda \in C^m(\Omega)^*$ هدف یافتن تقریب مقدار $\lambda(u)$ به کمک مقادیر $\{\mu_j(u)\}_{j=1}^N$ است. تابع های λ و $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ به عنوان مثال می توانند ارزیاب های نقطه ای تابع u یا مشتقات آن تا مرتبه m یا حتی انتگرال هایی موضعی شامل تابع u و مشتقات آن باشند. تقریب $\widehat{\lambda}(u)$



شکل (۱): تقریب کمترین مربعات متحرک

از λ بایستی نسبت به داده‌های $\mu_j(u)$ خطی باشد، یعنی باید بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$\widehat{\lambda}(u) = \sum_{j=1}^N a_j(\lambda) \mu_j(u) \quad (1)$$

همچنین ضرایب a_j باید نسبت به λ خطی باشند. همانند روش MLS کلاسیک، فرض می‌شود معادله‌ی تقریبی (۱) برای یک زیر فضای با بعد متناهی

$$\mathcal{P} = \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \subset C^m(\Omega)$$

دقیق است، یعنی

$$\sum_{j=1}^N a_j(\lambda) \mu_j(p) = \lambda(p), \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2)$$

تقریب GMLS تابع $\widehat{\lambda}(u)$ از $\lambda(u)$ به صورت $\widehat{\lambda}(u) = \lambda(p^*)$ به دست می‌آید که $p^* \in \mathcal{P}$ با کمینه کردن خطای کمترین مربعات وزن دار

$$\sum_{j=1}^N (\mu_j(u) - \mu_j(p))^2 w_j, \quad (3)$$

روی $p \in \mathcal{P}$ حاصل می‌شود. در این مسئله‌ی بهینه‌سازی از وزن‌های مثبت w_1, \dots, w_N استفاده می‌شود. این توابع وزن طوری انتخاب می‌شوند که در نهایت یک تقریب موضعی از جواب به دست آید. البته باید متذکر شد که در این حالت (۱) برقرار است [۳۲].

فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega$ و $x \in \Omega$. تقریب MLS کلاسیک حالت خاصی از GMLS است که λ و $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ به ترتیب تابعهای ارزیاب در نقطه‌ی x و نقاط $\{x_j\}_{j=1}^N$ هستند و \mathcal{P} یک فضای با بعد متناهی از چند جمله‌ای‌ها است. همچنین توابع وزن به صورت

$$w_j = w(x, x_j) = \Phi_\delta(x - x_j) = \Phi\left(\|x - x_j\|_\tau / \delta\right), \quad 1 \leq j \leq N \quad (۴)$$

است که تابع نامنفی w برای حالتی که فاصله‌ی آرگومان‌های آن از δ بیشتر است، صفر است یعنی محمل تابع Φ در گوی $B(\delta, \delta)$ قرار دارد. یک فرمول‌بندی معادل تقریب کلاسیک MLS عبارت است از کمینه‌سازی شکل درجه دوم

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^*(\lambda) / w_j \quad (۵)$$

به‌عنوان تابعی از ضرایب $a_j(\lambda)$ مشروط بر قیدهای (۲). جواب‌های p^* و $a^*(\lambda) = (a_1^*(\lambda), \dots, a_N^*(\lambda))^T$ در مسئله‌های بهینه‌سازی (۳) و (۵) با روابط زیر در ارتباط هستند

$$\widehat{\lambda}(u) = \lambda(p^*) = \sum_{j=1}^N a_j^*(\lambda) \mu_j(u), \quad (۶)$$

توجه کنید که جواب p^* برای مسئله‌ی بهینه‌سازی (۳) به تابع λ وابسته نیست. با محاسبه‌ی $\lambda(p^*)$ از داده‌های $\mu_j(u)$ می‌توان تقریبی از $\lambda(u)$ برای همه‌ی u ها با محاسبه‌ی $\lambda(p^*)$ به‌دست آورد. این روش برای مثال در تخمین مشتقات تقریب MLS بسیار مهم است اما بایستی به نقش استقلال توابع وزن از تابع λ توجه داشت [۳۳].

همان‌گونه که اشاره شد، بایستی به نحوه‌ی انتخاب توابع وزن دقت کرد. در حقیقت از توابع وزنی به‌صورت (۴) می‌توان در تقریب MLS کلاسیک و همچنین در تقریب تابعها در حالت کلی‌تر استفاده کرد. برای موضعی کردن تقریب در اطراف نقطه‌ی ثابت x ، اندیس‌های $j \in \{1, \dots, N\}$ به مجموعه زیر کاهش می‌یابد

$$J(x) := \{j : 1 \leq j \leq N, w(x, x_j) > \epsilon\}$$

با انتخاب پایه $\{p_1, \dots, p_Q\}$ از \mathcal{P} و تعریف‌های زیر

$$\begin{aligned}
 b &= (b_1, \dots, b_Q)^T \in \mathbb{R}^Q, \\
 u &= ((u(x_j) : j \in J(x))^T \in \mathbb{R}^{|J(x)|}, \\
 P &= (p_\ell(x_j))_{j \in J(x), 1 \leq \ell \leq Q} \\
 W &= \text{diag}(w_j : j \in J(x)) \in \mathbb{R}^{|J(x)| \times |J(x)|} \\
 p &= \sum_{k=1}^Q b_k p_k \in \rho
 \end{aligned}$$

مسئله‌ی (۳) بر روی تمام $b \in \mathbb{R}^Q$ ، به صورت مسئله مینیمم‌سازی زیر تبدیل می‌شود

$$\text{Min} \left\| \sqrt{W}(u - Pb) \right\|_r$$

با استفاده از نظریه‌ی بهینه‌سازی کمترین مربعات کلاسیک، جواب بهینه‌ی b^* در معادله‌ی نرمال

$$Ab^* = Bu \quad (۷)$$

صدق می‌کند که در آن $A = P^T W P$ و $B = P^T W$. ماتریس A از مرتبه‌ی $Q \times Q$ است و نقش مهمی در تقریب MLS بازی می‌کند. اگر رتبه‌ی سطری (ستونی) A برابر Q باشد آنگاه جواب بهینه یکتا خواهد بود. از این رو بهترین جواب تقریبی از $a^*(\lambda) \in \mathbb{R}$ در (۶) به صورت زیر است

$$a^*(\lambda) = WP^T (PWP^T)^{-1} \lambda(p) \quad (۸)$$

که در آن W یک ماتریس قطری با درایه‌های وزنی w_j و $P_{N \times Q}$ یک ماتریس با مقادیر $\lambda_j(p_k)$ است که $1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq Q$. همچنین $\lambda(p) = [\lambda(p_1), \dots, \lambda(p_Q)]^T \in \mathbb{R}^Q$. برای به دست آوردن درایه‌های ماتریس وزنی W می‌توان از توابع وزن متفاوتی استفاده کرد.

برای انتخاب تابع وزن می‌توان از توابع وزن مختلفی نظیر اسپلاین‌های مربعی و مکعبی، تابع وزن نمایی و همچنین تابع وزن گاوسی استفاده نمود. توابع وزن از نظر مرتبه همواری دارای اهمیت بسیاری هستند. این توابع می‌توانند با هر مرتبه همواری دلخواه ساخته شوند.

یک نمونه از این توابع، تابع اسپلاین

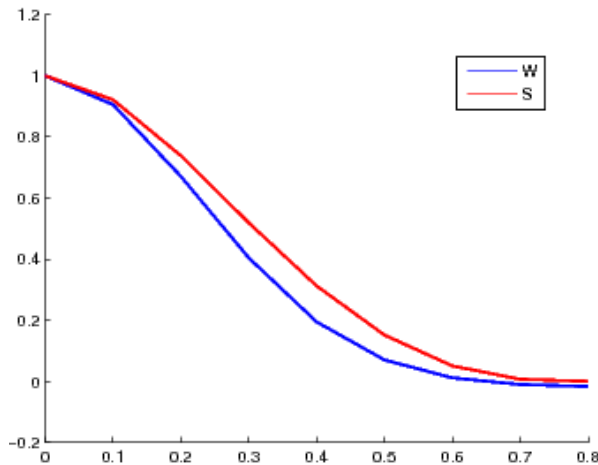
$$S(x - x_j) = \begin{cases} 1 - \epsilon(r/\delta)^2 + \lambda(r/\delta)^2 - \nu(r/\delta)^4, & 0 \leq r \leq \delta, \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

است که در رده‌ی همواری C^∞ قرار دارد. همچنین می‌توان از تابع وزن گاوسی استفاده کرد که به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۲ را ببینید)

$$W(x-x_j) = \begin{cases} \frac{\exp[-(r/c)^2] - \exp[-(\delta/c)^2]}{1 - \exp[-(\delta/c)^2]}, & 0 \leq r \leq \delta, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (9)$$

در این تابع، پارامتر c ، پارامتر شکل تابع وزن نام دارد که دارای مقداری ثابت است. این پارامتر، شکل تابع وزن را کنترل می‌کند و در پایداری روش بسیار مؤثر است. مقادیر کوچک‌تر c منجر به تابعی با قله‌ی شیب‌دارتر می‌شوند. مقدار بهینه‌ای برای این عدد در دست نیست و همواره سعی بر این است که بسته به نوع مسئله مقدار آزمایشی مناسبی برای آن در نظر گرفته شود. تابع وزن گاوسی در رده‌ی همواری C^∞ است.

در این پژوهش نیز بعد از ارزیابی و مقایسه تابع وزن اسپلاین و تابع وزن گاوسی، در نهایت از تابع وزن گاوسی با پارامتر شکل ثابت $c = 0/1$ استفاده شد.



شکل (۱): تابع وزن گاوسی و تابع وزن اسپلاین

۳- فرم ضعیف معادله تلگراف و پیاده‌سازی روش DMLPG

اساس کار روش DMLPG استفاده کردن از فرم ضعیف یک معادله دیفرانسیل و تقریب GMLS است [۹]. در ادامه شکل ضعیف معادله تلگراف دو بعدی ساخته می‌شود.

معادله تلگراف دو بعدی به صورت زیر است [۳۴]:

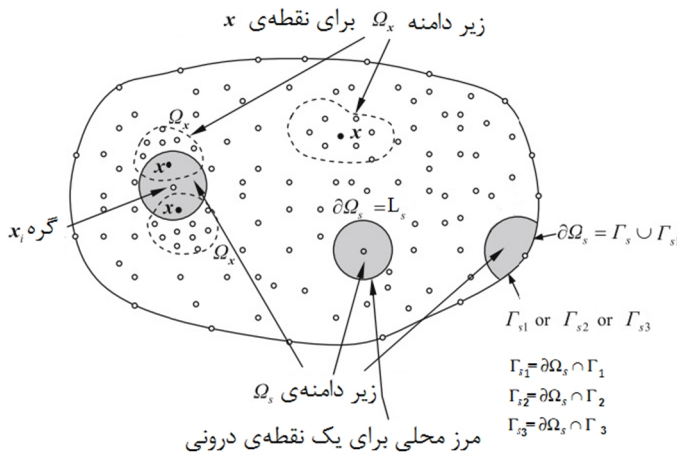
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u - \nabla^2 u = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (10)$$

که در آن $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ و $\partial\Omega$ به عنوان مرز ناحیه در نظر گرفته می‌شود. ضرایب $\alpha > 0$ و β ثابت و اختیاری بوده و زمانی که $\beta = 0$ باشد آنگاه معادله تلگراف به معادله موج تبدیل می‌شود. شرایط اولیه و شرایط مرزی معادله (۱۰) به صورت زیر است

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (11)$$

$$u(0, y, t) = \Phi_1(y, t), \quad u(1, y, t) = \Phi_2(y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \quad (12)$$

$$u(x, 0, t) = \Psi_1(x, t), \quad u(x, 1, t) = \Psi_2(x, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0. \quad (13)$$



شکل (۲): دامنه کلی و زیر دامنه‌های مختلف آن

در روش‌های بدون شبکه مجموعه‌ای از نقاط مانند $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ در دامنه Ω و مرز Γ در نظر گرفته می‌شوند. در روش‌های استاندارد مانند MLPG و DMLPG در همسایگی هر نقطه x_k یک زیر دامنه کوچک $\Omega_s^k \subset \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ به عنوان مثال زیر دامنه Ω_s^k می‌تواند گوی $B(x_k, r_s)$ به مرکز x_k و شعاع r_s و یا مربع $S(x_k, r_s)$ به مرکز x_k و طول ضلع r_s در نظر گرفته شود. (شکل ۳ را ببینید). اکنون با ضرب طرفین معادله تلگراف (۱۰) در تابع تست v و با انتگرال‌گیری روی زیر دامنه Ω_s شکل ضعیف محلی معادله تلگراف به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial^\tau u}{\partial t^\tau} + \tau\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^\tau u - \nabla^\tau u - f \right) v d\Omega = 0 \quad (14)$$

با جداسازی و انتگرال گیری از هر قسمت و همچنین با استفاده از قضیه دیورژانس، معادله (۱۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\tau}{\partial t^\tau} \int_{\Omega_s} u v d\Omega + \tau\alpha \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_s} u v d\Omega + \beta^\tau \int_{\Omega_s} u v d\Omega - \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma + \int_{\Omega_s} \nabla u \nabla v d\Omega \\ = \int_{\Omega_s} f v d\Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

همان طور که اشاره شد، روش DMLPG بر اساس شکل ضعیف (۱۵) پیاده سازی می شود. تمامی انتگرال ها در (۱۵) با استفاده از تقریب GMLS و استفاده از روابط زیر تقریب زده می شوند.

$$\lambda_{1,k}(u) := \int_{\Omega_s} u v d\Omega \approx \widehat{\lambda_{1,k}(u)} = \sum_{j=1}^N a_{1,j}(x_k) u(x_j), \quad (16)$$

$$\lambda_{\tau,k}(u) := \int_{\Omega_s} k \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \approx \widehat{\lambda_{\tau,k}(u)} = \sum_{j=1}^N a_{\tau,j}(x_k) u(x_j) \quad (17)$$

$$\lambda_{\tau,k}(u) := - \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \approx \widehat{\lambda_{\tau,k}(u)} = \sum_{j=1}^N a_{\tau,j}(x_k) u(x_j). \quad (18)$$

اکنون و با استفاده از تقریب های (۱۶) - (۱۸) و جایگذاری آن ها در معادله (۱۵) می توان به دستگاه وابسته به زمان زیر رسید

$$A^{(\ell)} \frac{\partial^\tau}{\partial t^\tau} \mathbf{u}(t) + \tau\alpha A^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(t) + \left((-1)^{(\ell)} A^{(\ell)} + \beta^\tau A^{(0)} \right) \mathbf{u}(t) = \mathbf{b}(t), \quad \ell = 2, 3 \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{u}(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_N, t))^T \in \mathbb{R}^N$ یک بردار وابسته به زمان از مقادیر نقاط گره ای است و درایه های ماتریس ضرایب از رابطه زیر به دست می آیند

$$a_k^{(\ell)} = WP^T (PWP^T)^{-1} \lambda_{\ell,k}(\mathbf{p}), \quad \ell = 1, 2, 3 \quad (20)$$

که $A_k^{(\ell)} = a_{\ell,j}(x_k)$, $\ell = 1, 2, 3$ -k امین سطر ماتریس $A^{(\ell)}$ است. همچنین داریم

$$\lambda_{1,k}(\mathcal{P}) = \left[\int_{\Omega_s} p_1 v d\Omega, \int_{\Omega_s} p_2 v d\Omega, \dots, \int_{\Omega_s} p_Q v d\Omega \right]^T, \quad (21)$$

$$\lambda_{\tau,k}(\mathcal{P}) = \left[\int_{\Omega_s} \nabla p_1 \cdot \nabla v d\Omega, \int_{\Omega_s} \nabla p_2 \cdot \nabla v d\Omega, \dots, \int_{\Omega_s} \nabla p_Q \cdot \nabla v d\Omega \right]^T, \quad (22)$$

$$\lambda_{\nu,k}(\mathcal{P}) = - \left[\int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial n} v d\Gamma, \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial p_{\tau}}{\partial n} v d\Gamma, \dots, \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial p_Q}{\partial n} v d\Gamma \right]^T. \quad (23)$$

درایه‌های بردار مقادیر سمت راست $\mathbf{b}(t)$ نیز از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$b_k(t) = \int_{\Omega_s} f(x, t) v d\Omega, \quad (24)$$

اگر تابع تست v بر روی $\partial\Omega_s^k \setminus \Gamma_N$ به صفر میل کند، رابطه‌ی (۲۳) دیگر وجود ندارد. این حالت در واقع روش ۱ DMLPG است. به عنوان مثال می‌توان تابع تست را به صورت زیر در نظر گرفت

$$v = v(x, x_k) = \Phi \left(\frac{\|x - x_k\|_{\nu}}{r_s} \right)$$

که Φ تابع وزن تقریب MLS با شعاع δ است و در دامنه‌ی محلی Ω_s^k ، تابع وزن مذکور با شعاع r_s در نظر گرفته می‌شود (در این مقاله از تابع گاوسی (۹) به عنوان تابع تست استفاده شده است).

در روش DMLPG۵ تابع هوساید به عنوان تابع تست در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین نیازی به محاسبه‌ی تابع $\lambda_{\nu,k}$ نیست و در نتیجه روش DMLPG۵ ساده‌تر از روش ۱ DMLPG است.

در نهایت برای حل معادله تلگراف دو بعدی از طریق روش بدون شبکه پتروف-گالرکین مستقیم (در این مقاله ۱ و DMLPG۵) و با استفاده از روابط قبل، یک دستگاه وابسته به زمان به صورت زیر به دست می‌آید که در آن برای تقریب گام‌های زمانی از روش کرانک-نیکلسون استفاده شده است

$$\begin{aligned} (A^{(l)} + \nu \alpha dt A^{(l)} + K^{(l)}(dt)^{\nu}) u^{(k+1)} &= (A^{(l)} + \nu \alpha dt A^{(l)}) u^{(k)} - A^{(l)} u^{(k-1)} \\ &+ \frac{dt^{\nu}}{\nu} (b^{(k+1)} + b^{(k)}), \end{aligned} \quad (25)$$

در اینجا

$$K^{(l)} = (-1)^{(l)} A^{(l)} + \beta^{\nu} A^{(l)}, \quad l = \nu, \nu.$$

در نهایت با حل دستگاه (۲۵) با استفاده از روش تجزیه LU می‌توان جواب تقریبی معادله تلگراف را به دست آورد. چون نقاط انتخاب شده از دامنه به صورت مجزا از یکدیگر بوده و از توابع پایه‌ای متناسب با فضای مسئله برای تقریب توابع مجهول استفاده شده است بنابراین ماتریس ضرایب معکوس پذیر است و جواب دستگاه یکتاست.

۴- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی دو روش DMLPG Δ و DMLPG Δ روی معادله تلگراف دو بعدی ارائه خواهد شد. برنامه‌ها با استفاده از نرم‌افزار Matlab نوشته شده و روی کامپیوتری با مشخصات Core i3 3.1GHz با ۴ GB حافظه RAM اجرا شده و خطاها بر اساس دو نرم بینهایت (بیشینه خطا) و نرم دو گزارش شده است. همچنین نتایج به‌دست آمده در این مقاله با روش B-اسپلاین اصلاح شده (DQM) از مرجع [۲۲] نیز در هر دو مثال مقایسه شده است که این نتایج حاکی از دقت بالای روش DMLPG است. مرتبه همگرایی عددی را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد.

$$\ln \left(\frac{\|e(h)_\infty\|}{\|e(h/2)_\infty\|} \right) \quad (26)$$

مثال ۱: معادله هذلولوی تلگراف دو بعدی (1°) را در ناحیه مستطیل شکل $\Omega = [0, 1]^2$ با شرایط اولیه

$$u_0(x, y) = \exp(x + y),$$

$$v_0(x, y) = -\exp(x + y),$$

و شرایط مرزی دیریکله‌ای زیر در نظر بگیرید [۲۲].

$$\Phi_1(y, t) = \exp(y - t),$$

$$\Phi_2(y, t) = \exp(1 + y - t),$$

$$\Psi_1(x, t) = \exp(x - t),$$

$$\Psi_2(x, t) = \exp(1 + x - t).$$

در این حالت $\alpha = \beta = 1$ و $f(x, y, t) = -2\exp(x + y - t)$. جواب دقیق این مسئله عبارت است از $u(x, y, t) = \exp(x + y - t)$.

جدول (۱): مقدار بیشینه خطا و نرم دو خطا برای مثال ۱ در زمان‌های مختلف برای ۴۴۱ نقطه

L_1		L_∞		
DMLPG Δ	DMLPG Δ	DMLPG Δ	DMLPG Δ	زمان
$1/57 \times 10^{-4}$	$8/85 \times 10^{-5}$	$1/58 \times 10^{-5}$	$1/00 \times 10^{-5}$	$T=1$
$3/76 \times 10^{-5}$	$2/04 \times 10^{-5}$	$3/73 \times 10^{-6}$	$4/46 \times 10^{-6}$	$T=2$
$5/34 \times 10^{-6}$	$8/17 \times 10^{-6}$	$1/34 \times 10^{-6}$	$1/78 \times 10^{-6}$	$T=3$

در جدول ۱ مقادیر خطا برای دو روش DMLPG Δ و DMLPG Δ در زمان‌های مختلف برای ۴۴۱ نقطه منظم در دامنه مسئله برای $dt = 0/01$ گزارش شده است. در جدول ۲ مقادیر خطا

برای ۳ روش متفاوت در زمان‌های مختلف برای ۲۲۱ نقطه ارائه شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص است روش‌های ارائه شده در این مقاله دارای دقت بالای عددی هستند. در جدول ۳ زمان اجرای برنامه برای این دو روش برحسب ثانیه آورده شده که نتایج نشان‌دهنده سرعت بالای روش‌های ارائه شده است. در جدول ۴ مرتبه همگرایی عددی دو روش گفته شده با استفاده از رابطه (۱۳) محاسبه شده و ارائه گردیده است. شکل ۴ نمودار بیشینه خطا برای دو روش DMLPG_۱ و DMLPG_۵ و شکل ۵ نمودار نرم دو خطا برای این دو روش را به‌ازای $dt = 0.01$ در زمان $T=1$ نشان می‌دهند. با توجه به این اشکال، خطا در هر دو روش با کاهش h کاهش می‌یابد و دقت روش DMLPG_۱ نسبت به روش DMLPG_۵ بیشتر است.

جدول (۲): مقدار بیشینه خطا و نرم دو خطا برای مثال ۱ در زمان‌های مختلف برای ۱۲۱ نقطه

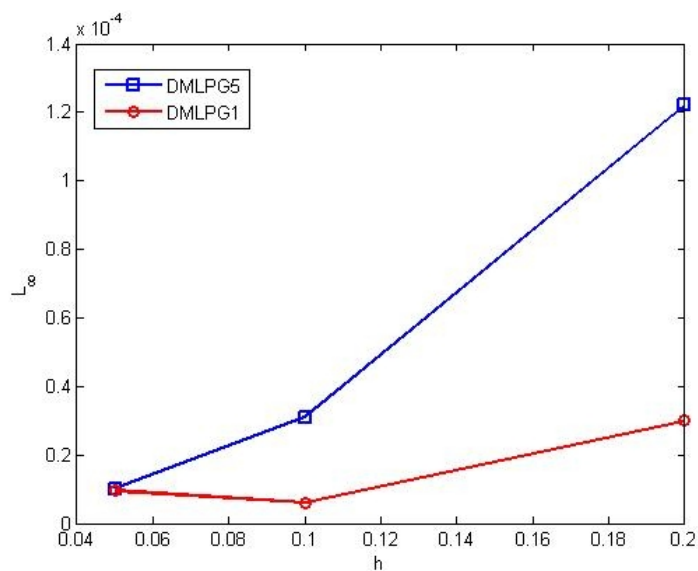
L_4			L_{∞}			
DQM	DMLPG _۵	DMLPG _۱	DQM	DMLPG _۵	DMLPG _۱	زمان
$1/44 \times 10^{-2}$	$2/18 \times 10^{-4}$	$6/42 \times 10^{-5}$	$2/99 \times 10^{-2}$	$3/72 \times 10^{-5}$	$1/15 \times 10^{-5}$	$T=1$
$1/38 \times 10^{-2}$	$8/35 \times 10^{-5}$	$1/11 \times 10^{-5}$	$3/97 \times 10^{-2}$	$1/61 \times 10^{-5}$	$2/30 \times 10^{-6}$	$T=2$
$1/30 \times 10^{-2}$	$6/43 \times 10^{-6}$	$1/02 \times 10^{-6}$	$1/30 \times 10^{-2}$	$1/32 \times 10^{-6}$	$2/43 \times 10^{-7}$	$T=3$

جدول (۳): زمان اجرای برنامه برای دو روش DMLPG_۱ و DMLPG_۵

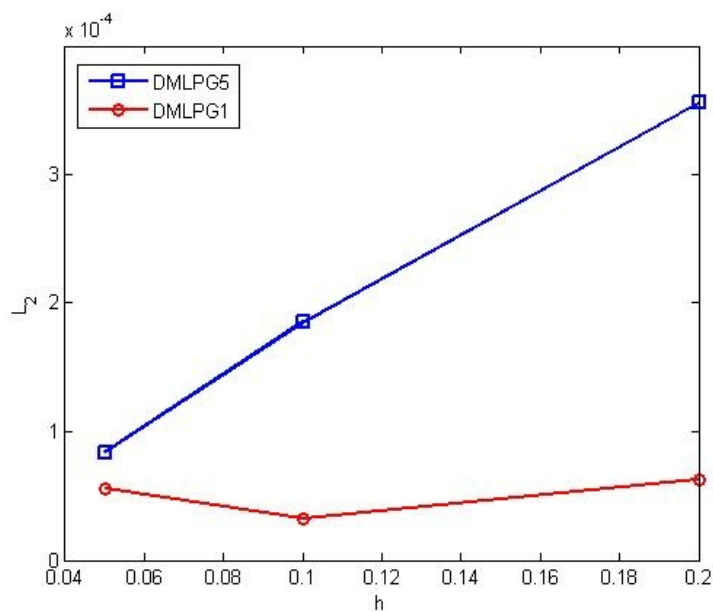
زمان اجرا (ثانیه)		
DMLPG _۵	DMLPG _۱	زمان
۴/۸۰	۴/۳۸	$T=1$
۶/۹۰	۸/۰۰	$T=2$
۱۰/۶	۱۱/۳	$T=3$

جدول (۴): مرتبه همگرایی عددی برای دو روش DMLPG_۱ و DMLPG_۵ برای تعداد نقاط مختلف

مرتبه همگرایی			
DMLPG _۵	DMLPG _۱	h	تعداد نقاط (N)
--	--	۰/۲	۳۶
۲/۸۴	۳/۳۵	۰/۱	۱۲۱
۲/۳۳	—۰/۹۶	۰/۰۵	۴۴۱



شکل (۳): نمودار بیشینه خطا برای دو روش DMLPG₅ و DMLPG₁



شکل (۴): نمودار نرم دو خطا برای دو روش DMLPG₅ و DMLPG₁

مثال ۲: معادله تلگراف هذلولوی دو بعدی (1°) را با پارامترهای $\alpha = \beta = 1$ در ناحیه مستطیلی $\Omega = [0, 1]^2$ با شرایط اولیه

$$u_0(x, y) = \sin(x)\sin(y),$$

$$v_0(x, y) = 0,$$

و شرایط مرزی دیریکله‌ای زیر در نظر بگیرید [۲۲]

$$\Phi_1(y, t) = 0,$$

$$\Phi_2(y, t) = \cos(t)\sin(1)\sin(y),$$

$$\Psi_1(x, t) = 0,$$

$$\Psi_2(x, t) = \cos(t)\sin(x)\sin(1).$$

در این مسئله تابع طرف راست $f(x, y, t) = 2(\cos(t) - \sin(t))\sin(x)\sin(y)$ و جواب دقیق برابر $u(x, y, t) = \cos(t)\sin(x)\sin(y)$ است.

در جدول ۵ مقادیر خطا برای دو روش ۱ DMLPG و ۵ DMLPG در زمان‌های متفاوت برای ۲۲۵ نقطه تصادفی پراکنده شده در دامنه مسئله با $dt = 0/001$ گزارش شده است. در جدول ۶ مقادیر خطا برای ۳ روش متفاوت در زمان‌های مختلف برای ۲۲۱ نقطه تصادفی پراکنده شده در دامنه مسئله با $dt = 0/01$ گزارش شده است. برای تولید نقاط تصادفی در دامنه مسئله از الگوریتم Hammersley استفاده شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص است روش‌های ارائه شده در این مقاله دارای دقت بالای عددی هستند. در جدول ۷ زمان اجرای برنامه برای روش‌های ۱ DMLPG و ۵ DMLPG برحسب ثانیه آورده شده است که این نتایج نشان‌دهنده سرعت بالای روش‌های ارائه شده است. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب نمودار جواب تحلیلی و عددی برای دو روش ۱ DMLPG و ۵ DMLPG به ازای $dt = 0/001$ در زمان $T = 1$ است.

جدول (۵): مقدار بیشینه خطا و نرم دو خطا برای مثال ۲ در زمان‌های مختلف برای ۲۲۵ نقطه تصادفی پراکنده در فضا برای دو روش با $dt = 0/001$

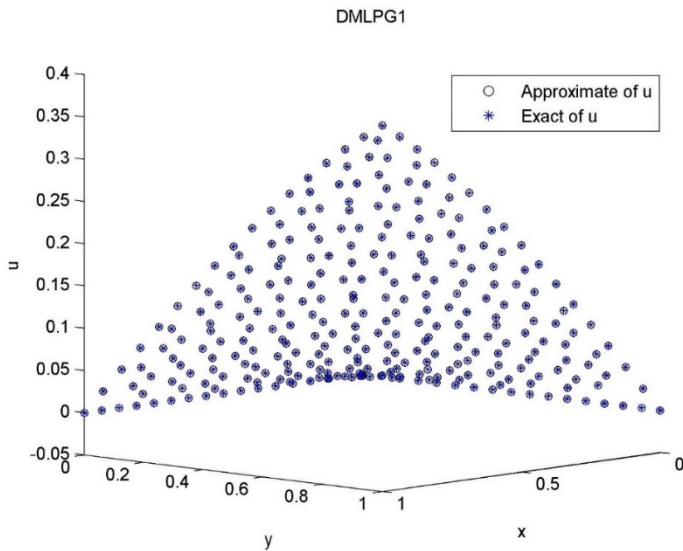
L_4		L_{∞}		
DMLPG۵	DMLPG۱	DMLPG۵	DMLPG۱	زمان
$2/10 \times 10^{-5}$	$2/01 \times 10^{-5}$	$3/29 \times 10^{-6}$	$2/60 \times 10^{-6}$	$T = 1$
$2/39 \times 10^{-4}$	$1/89 \times 10^{-4}$	$1/26 \times 10^{-4}$	$6/84 \times 10^{-5}$	$T = 2$
$2/14 \times 10^{-2}$	$3/43 \times 10^{-2}$	$1/44 \times 10^{-2}$	$2/77 \times 10^{-2}$	$T = 3$

جدول (۶): مقدار بیشینه خطا و نرم دو خطا برای مثال ۲ در زمان‌های مختلف برای ۱۲۱ نقطه تصادفی پراکنده در فضا برای ۳ روش $dt = 0/01$

L_r			L_∞			زمان
DQM	DMLPG δ	DMLPG γ	DQM	DMLPG δ	DMLPG γ	
$9/87 \times 10^{-4}$	$1/36 \times 10^{-4}$	$1/39 \times 10^{-4}$	$2/27 \times 10^{-3}$	$2/33 \times 10^{-5}$	$2/47 \times 10^{-5}$	$T=1$
$1/09 \times 10^{-3}$	$1/32 \times 10^{-3}$	$1/32 \times 10^{-3}$	$2/87 \times 10^{-3}$	$2/17 \times 10^{-4}$	$2/16 \times 10^{-4}$	$T=2$
$2/28 \times 10^{-4}$	$1/41 \times 10^{-3}$	$1/39 \times 10^{-3}$	$6/08 \times 10^{-4}$	$2/27 \times 10^{-4}$	$2/24 \times 10^{-4}$	$T=3$

جدول (۷): زمان اجرای برنامه برای دو روش DMLPG δ و DMLPG γ

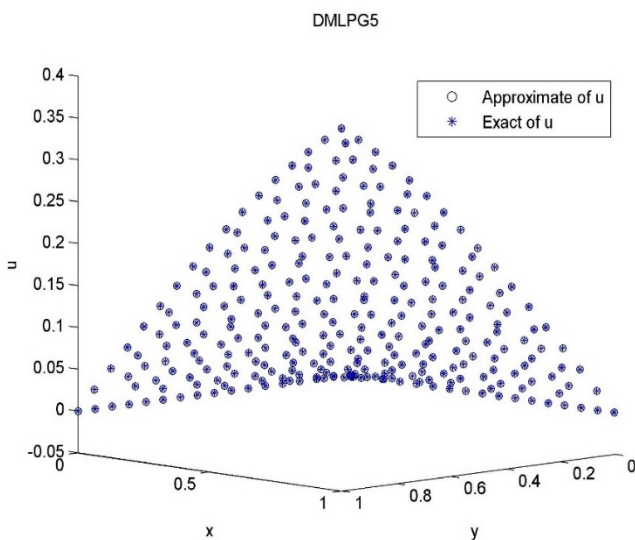
زمان اجرا (ثانیه)		
DMLPG δ	DMLPG γ	زمان
۱۸/۱	۲۱/۱	$T=1$
۳۷/۴	۴۱/۰۰	$T=2$
۵۷/۰۰	۶۱/۵	$T=3$



شکل (۵): نمودار جواب تحلیلی و عددی برای مثال ۲ با روش DMLPG γ در ۲۲۵ نقطه تصادفی پراکنده در ناحیه

۵-نتیجه گیری

در این مقاله، ما از روش بدون شبکه پترو-گالرکین مستقیم (DMLPG) برای حل عددی معادله دو بعدی تلگراف استفاده کردیم که براساس تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته (GMLS) و روش بدون شبکه پترو-گالرکین است. تقریب GMLS از مقادیر گره‌ای برای تقریب جواب بدون در نظر گرفتن توابع شکل استفاده کرده و انتگرال‌ها را فقط بر روی چندجمله‌ای‌ها اعمال می‌کند. نتایج عددی برای دو مثال ارائه شده است که یکی روی گره‌های منظم و دیگری روی گره‌های تصادفی است. با مشاهده نتایج فوق می‌توان به دقت و سرعت روش ارائه شده در این مقاله پی برد. همچنین با مقایسه نتایج گزارش شده می‌توان مشاهده کرد که روش DMLPG5 نسبت به روش DMLPG1 سریع تر است.



شکل (۶): نمودار جواب تحلیلی و عددی برای مثال ۲ با روش DMLPG5 در ۲۲۵ نقطه تصادفی پراکنده در ناحیه

منابع

- [1] Menegaz, G.L., Gomide, L.C. and Araújo, C.A. (2019), Biomechanical evaluation of acromioclavicular joint reconstructions using a 3-dimensional model based on the finite element method, *Clinical Biomechanics*, **70**, 170-176.

- [2] Zhou, T., Chazot, J.D., Perrey-Debain, E. and Cheng, L. (2019), Performance of the Partition of Unity Finite Element Method for the modeling of Timoshenko beams, *Computers & Structures*, **222**, 148-154.
- [3] Dai, B., Zheng, B., Liang, Q. and Wang, L. (2013), Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov-Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 10044-10052.
- [4] Belytschko, T., Lu, Y. and Gu, L. (1994), Element-Free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229–256.
- [5] Hua, L. and Mulay, S.S. (2013), *Meshless methods and their numerical properties*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [6] Gingold, R.A, and Monaghan, J.J. (1977), Smoothed particle hydrodynamics theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**, 375–389.
- [7] Shirzadi, A., Ghayedi, S., Safarpour, M. and Bagheri Bardi, G. (2018), Numerical solutions of a mathematical model of plankton-oxygen dynamics using a meshless method, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **8**(2), 74-93.
- [8] Ghazanfari, B. and Shahkarami, A. (2015), Meshfree method for solving mathematical fractional order model of capillary formation in tumor angiogenesis, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **5**(1), 1-18.
- [9] Mirzaei, D. and Schaback, R. (2014), Solving Heat Conduction Problems by the Direct Meshless Local Petrov-Galerkin (DMLPG) method, *Numerical Algorithms*, **65**, 275-291.
- [10] Lakestani, M. and Saray, B.N. (2010), Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions, *Computers & Mathematics with Applications*, **60** (7), 1964-1972.
- [11] Dehghan, M. and Ghesmati, A. (2010), Solution of the second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (DRBIE) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **34** (1) 51-59.
- [12] Pozar, D.M. (1990), *Microwave Engineering*, Addison-Wesley.
- [13] Olufsen, S. M., Charles, S.P., Kim, W., Erik M. P., Nadim, A. and Larsen, J. (2000), Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions, *Annals of Biomedical Engineering*, **28**, 1281–1299.

-
- [14] Bulbul, B. and Sezer, M. (2011), Taylor polynomial solution of hyperbolic type partial differential equations with constant coefficients, *International Journal of Computer Mathematics*, **88** (3), 533–544.
- [15] Gao, F. and Chi, C. (2007), Unconditionally stable difference schemes for a one-space-dimensional linear hyperbolic equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187** (2), 1272–1276.
- [16] Dehghan, M. and Ghesmati, A. (2010), Combination of meshless local weak and strong (MLWS) forms to solve the two-dimensional hyperbolic telegraph equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **34** (4), 324–336.
- [17] Pandit, S., Kumar, M. and Tiwari, S. (2015), Numerical simulation of second-order hyperbolic telegraph type equations with variable coefficients, *Computer Physics Communications*, **187**, 83–90.
- [18] Yousefi, S. (2010), Legendre multi-wavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Numerical Methods Partial Differential Equations*, **26**, 535–543.
- [19] Bales, L.A. (1984), Semi discrete and single step fully discrete approximations for second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients, *Mathematics of Computation*, **43**, 383–414.
- [20] Bales, L.A. (1986), Higher-order single-step fully discrete approximations for nonlinear second-order hyperbolic equations, *Computers & Mathematics with Applications*, **12**, 581–604.
- [21] Dehghan, M. and Shokri, A. (2009), A meshless method for numerical solution of a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions, *Numerical methods for partial differential equations*, **25** (2), 494–506.
- [22] Mittal, R.C. and Bhatia, R. (2014), A numerical study of two-dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*, **244**, 976–997.
- [23] Shokri, A. and Bahmani, E. (2019), Direct meshless local Petrov–Galerkin (DMLPG) method for 2D complex Ginzburg–Landau equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **100**, 195–203.
- [24] Sartoretto, F., Mazzia, A. and Pini, G. (2014), The DMLPG meshless technique for poisson problems, *Applied Mathematical Sciences*, **8**(164), 8233–50.
- [25] Dehghan, M. and Abbaszadeh, M. (2017), Numerical investigation based on direct meshless local Petrov Galerkin (direct MLPG) method for solving generalized Zakharov system in one and two dimensions and

- generalized gross-Pitavetskii equation, *Engineering Computations*, **33**, 983–96.
- [26] Lancaster, P. and Salkauskas, K. (1981), Surfaces generated by moving least squares methods, *AMS Mathematics of Computation*, **37**, 141–158.
- [27] Shepard, D. (1968), A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data, *In Proceedings of the 23th National Conference ACM*, 517–523.
- [28] McLain, D.H. (1974), Drawing contours from arbitrary data points, *The Computer Journal*, **17**, 318–324.
- [29] McLain, D.H. (1976), Two-dimensional interpolation from random data, *The Computer Journal*, **19**, 178–181.
- [30] Nayroles, B.P., Touzot, G. and Villpn, P. (1992), Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, **10**, 307-318.
- [31] Liu, G. (2003), *Mesh Free Methods*, CRC PRESS, Boca Raton, London, New York.
- [32] Mirzaei, D., Schaback, R. and Dehghan, M. (2012), On generalized moving least squares and diffuse derivatives. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **32**, 983-1000.
- [33] Mirzaei, D. and Schaback, R. (2013), Direct Meshless Local Petrov-Galerkin (DMLPG) method: A generalized MLS approximation. *Applied Numerical Mathematics*, **68**, 73-82.
- [34] Singh, B.K. and Kumar, P. (2018), An algorithm based on a new DQM with modified extended cubic B-splines for numerical study of two-dimensional hyperbolic telegraph equation, *Alexandria Engineering Journal*, **57**, 175-191.

Numerical Solution of the 2D Telegraph Equation Using Direct Meshless Local Petrov-Galerkin (DMLPG) Method

Ali Shokri, Erfan Bahmani

Department of Mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Received: December 17 2018

Accepted for publication: March 21 2020

Corresponding author: a.shokri@znu.ac.ir

© 2020 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

The two most important numerical methods, finite difference, and finite element methods have some limitations in solving some problems arising in partial differential equations. A meshless method can be used to overcome these limitations. In these methods, no mesh required in the domain to solve the problem, and just scattered points are used for the approximation of the unknown function. In this paper, the two-dimensional telegraph equation is solved using a direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method based on generalized moving least squares. To measure the accuracy of this method, the comparison of the results with the theoretical solution and other methods has been used, which results indicate the high accuracy of the proposed method.

Keywords: Direct meshless Local Petrov-Galerkin method, Moving least squares, Generalized moving least squares, Two-dimensional telegraph equation, The local weak form.

Mathematics Subject Classification (2010): 35L10, 65M99.



© 2020 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).