مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۳۵۵-۳۴۱
شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: . 10.22055/JAMM.2020.30236.1741

رستهٔ هموتوپی از بافه‌های شبه منسجم تخت و هم‌تاب روی اسکیم‌های شبه فشرده و منفک

اسماعیل حسینی[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۴/۱۷ تاریخ پذیرش:۱۳۹۹/۳/۳

چکیده: فرض کنید X اسکیمی شبه-فشرده و منفک و $\mathrm{Qco}X$ رستهٔ همهٔ بافه‌های شبه-منسجم روی X باشد. نشان خواهیم داد که رستهٔ هموتوپی بافه‌های شبه-منسجم تخت و هم تاب از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها، جایگزین طبیعی رستهٔ هموتوپی $\mathcal{O}_X$- مدول‌های شبه-منسجم تصویری است. برای این منظور ثابت می‌کنیم که هر همبافت تخت از بافه‌های شبه-منسجم و هم‌تاب از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها، انقباض‌پذیر است.

واژه‌های کلیدی: اسکیم، بافهٔ شبه-منسجم، بافهٔ تخت، بافهٔ هم‌تاب، همبافت تخت، رستهٔ هموتوپی، رستهٔ مثلثی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۱۴F۰۵، ۱۸E۳۰

۱- مقدمه

فرض کنید $\mathrm{Qco}X$ رستهٔ همهٔ بافه‌های شبه-منسجم[۲] روی اسکیم[۳] X باشد. در حالت کلی می‌دانیم که این رسته به اندازهٔ کافی شئ تصویری ندارد؛ زیرا به‌عنوان مثال، وقتی X خط تصویری[۴] روی میدانی با مشخصهٔ صفر باشد، $\mathrm{Qco}X$ دارای شی تصویری غیر صفر نیست (به مثال ۱.۲ از مرجع [۵] مراجعه کنید). این یکی از مشکلات اساسی جبر همولوژی در $\mathrm{Qco}X$

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مقاله: e.hosseini@scu.ac.ir

2- Quasi-coherent sheaves
3- Scheme
4- Projective line

است که باعث می‌شود نتوانیم تابعگون‌های مشتق شدهٔ[۱] مبتنی بر تحلیل‌های تصویری[۲] را در آن تعریف کنیم؛ بنابراین، یافتن جایگزین برای اشیای تصویری در $\mathrm{Qco}X$ مسئله‌ای قدیمی و مهم در هندسهٔ جبری است که تا سال ۲۰۰۸ پاسخی به آن داده نشده بود. در [۱۴]، نیمن[۳] موفق شد در حالت آفین و با استفاده از رسته‌های هموتوپی[۴] جایگزینی برای اشیای تصویری بیابد که قابل‌تعمیم به حالت‌های غیر آفین باشد. مبنای کار نیمن بر تعمیم قضیهٔ دوگانی گروتندیک[۵] و تعبیر آن به زبان رسته‌های هموتوپی استوار است. تعمیمی که نقطهٔ شروع آن به سال ۲۰۰۵ و مقاله‌های [۹ و ۱۱] برمی‌گردد. از ترکیب نتایج به‌دست‌آمده در [۹ و ۱۱]، آینگار[۶] و کروزه[۷] موفق شدند قضیهٔ دوگانی گروتندیک را به زبان رسته‌های هموتوپی تعبیر کرده و تعمیم دهند. آن‌ها در [۱۰] نشان دادند که اگر R حلقه‌ای جابجایی و نوتری باهمبافت دوگان[۸] $\mathbf{D}$ باشد، هم‌ارزی

$$\mathbf{D}\otimes_R - :\ \mathrm{K}(\mathrm{Proj}R)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{K}(\mathrm{Inj}R) \qquad (۱)$$

از رسته‌های مثلثی[۹] وجود دارد که در آن $\mathrm{K}(\mathrm{Inj}R)$ رستهٔ هموتوپی R- مدول‌های تزریقی و رستهٔ $\mathrm{K}(\mathrm{Proj}R)$ رستهٔ هموتوپی R- مدول‌های تصویری است. در واقع این هم‌ارزی تکمیل نامتناهی[۱۰] قضیهٔ دوگانی گروتندیک است که می‌توان آن را نقطهٔ آغازی بر رفع خلأ اشیای تصویری در $\mathrm{Qco}X$ دانست؛ زیرا با استفاده از آن، نیمن موفق شد در دو مقالهٔ بسیار مهم [۱۴] و [۱۵] هم‌ارزی

$$\mathrm{K}(\mathrm{Proj}R)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{K}(\mathrm{Flat}R)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}R) \qquad (۲)$$

را از رسته‌های مثلثی کشف کند به‌طوری‌که $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}R)$ رستهٔ هموتوپی مدول‌های تخت[۱۱] روی حلقهٔ دلخواه R و $\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}R)$ زیررستهٔ $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}R)$ متشکل از همبافت‌های تخت[۱۲] است. هم‌ارزی (۲) نشان می‌دهد که خارج‌قسمت $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}R)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}R)$ را می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان جایگزین $\mathrm{K}(\mathrm{Proj}R)$ در نظر گرفت. این جایگزینی نیمن را قادر ساخت که هم‌ارزی (۲) را در حالت‌های غیر آفین بیان کند. مسئله‌ای که در سال ۲۰۰۷، شاگرد او مورفت[۱۳]

1- Derived functor
2- Projective resolutions
3- Amnon Neeman
4- Homotopy categories
5- Grothendieck duality theorem
6- Srikanth Iyengar
7- Henning Krause
8- Dualizing complex
9- Triangulated categories
10- Infinite completion
11- Flat modules
12- Flat complex
13- Daniel Murfet

در رساله‌ی دکتری خود [۱۲] موفق به انجام آن شد؛ اما خارج‌قسمت $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}R)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}R)$ از رسته‌های مثلثی دارای ساختاری صلب[1] است و همین امر موجب شد تا شناسایی معادل‌هایی برای آن مورد توجه قرار گیرد. مسئله‌ای که حسینی و سالاریان در [۸] به آن پرداخته‌اند. آن‌ها موفق شدند نشان دهند هم‌ارزی

$$\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X) \qquad (۳)$$

از رسته‌های مثلثی وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X)$، رستهٔ هموتوپی همبافت‌های dg-هم‌تاب[2] (برای تعریف آن به تبصره ۱ مراجعه کنید) از بافه‌های شبه- منسجم روی اسکیم X است. همچنین آن‌ها نشان دادند که $\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X)$ و رستهٔ هموتوپی $\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$ از بافه‌های شبه- منسجم تخت و هم‌تاب باهم برابرند اگر و تنها اگر هر همبافت تخت از بافه‌های شبه- منسجم هم‌تاب، انقباض‌پذیر[3] باشد ($\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$ و $\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X)$ را با تصویر اساسی[4] آن‌ها در $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)$ یکی در نظر می‌گیریم)؛ بنابراین برای آنکه جایگزین رستهٔ هموتوپی برای اشیای تصویری، به‌طور صریح مشخص شود کافی است اسکیم‌هایی مثل X را به‌دست آورد که روی آن‌ها هر همبافت تخت از $\mathcal{O}_X$ -مدول‌های هم‌تاب، انقباض‌پذیر باشد. مسئله‌ای که در حالت‌های زیر به آن پاسخ داده شده است:

(آ) X یک اسکیم نوتری با بعد کرول متناهی است (به مرجع [۷] مراجعه کنید).

(ب) X یک اسکیم شبه- فشرده[5] و منفک[6] با عدد اصلی[7] حداکثر $\aleph_n$ است (به مرجع [۶] مراجعه کنید).

(پ) X یک اسکیم موضعاً نوتری و دارای همبافت دوگان $\mathbf{D}$ است (به مرجع [۷] مراجعه کنید).

در این مقاله، با حذف محدودیت عدد اصلی در حالت (ب) ثابت می‌کنیم روی هر اسکیم شبه- فشرده و منفک، هر همبافت تخت از بافه‌های شبه- منسجم و هم‌تاب انقباض‌پذیر است. در واقع ثابت می‌کنیم که روی اسکیم شبه-فشرده و منفک X تساوی

$$\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X) = \mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$$

1- Rigid
2- Dg-cotorsion
3- Contractible
4- Essential images
5- Quasi-compact
6- Semi-separated
7- Cardinal number

برقرار است. در سراسر این مقاله، X یک اسکیم **شبه- فشرده و منفک**، $\mathcal{O}_X$- **مدول‌ها** بافه‌های شبه- منسجم‌از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها و $\mathrm{Qco}X$ رستهٔ همهٔ $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها است مگر آنکه خلاف آن را ذکر کنیم. یادآوری می‌کنیم X یک اسکیم شبه- فشرده و منفک است هرگاه دارای پوشش[1] $\Omega = \{U_i\}_{i=1}^{n}$ از زیرمجموعه‌های باز[2] و آفین[3] باشد $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ( ) به‌طوری‌که اشتراک هر دو زیر مجموعهٔ باز و آفین از آن یک زیر مجموعهٔ باز و آفین باشد (برای جزئیات بیشتر دربارهٔ اسکیم‌ها و بافه‌ها به مرجع [۴] مراجعه کنید). $\mathcal{O}_X$- مدول $\mathcal{F}$ را تخت گویند هرگاه تابعگون $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} - : \mathrm{Qco}X \to \mathrm{Qco}X$ دقیق باشد. یادآوری می‌کنیم تابعگون همورد[4] $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ دقیق است هرگاه برای هر دنبالهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

در $\mathrm{Qco}X$، دنباله $0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق در $\mathrm{Qco}X$ باشد. فرض کنید $\mathrm{Flat}X$ ردهٔ همهٔ $\mathcal{O}_X$- مدول‌های تخت باشد. $\mathcal{O}_X$- مدول $\mathcal{C}$ را هم‌تاب[5] گویند، هرگاه

$$\mathcal{C} \in \mathrm{Flat}X^{\perp} = \{\mathcal{B} \in \mathrm{Qco}X \mid \ \mathrm{Ext}^{1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{B}) = 0,\ \forall\ \mathcal{F} \in \mathrm{Flat}X\}.$$

$\mathcal{O}_X$- مدول $\mathcal{F}$ را تخت و هم‌تاب گویند، هرگاه توأماً تخت و هم‌تاب باشد. فرض کنید $\mathrm{Cot}X$ (به ترتیب. $\mathrm{Cof}X$) ردهٔ همهٔ $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب (به ترتیب، تخت و هم‌تاب) باشد. طبق مرجع [۳] نتیجهٔ ۲ از بخش ۴، برای هر $\mathcal{O}_X$- مدول دلخواه $\mathcal{G}$ دنبالهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{F} \in \mathrm{Flat}X$ و $\mathcal{C} \in \mathrm{Cot}X$. لازم به ذکر است که وجود این دنباله دارای مزیت‌های فراوانی در جبر همولوژی نسبی در $\mathrm{Qco}X$ است که خواننده می‌تواند در مراجع [۱۲ و ۱۳] بخش مهمی از این مزیت‌ها را مشاهده کند.

۲- همبافت‌های تخت از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب

در این بخش نشان خواهیم داد که هر همبافت تخت از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب، انقباض‌پذیر است. منظور ما از یک همبافت دنبالهٔ

1- Cover
2- Open
3- Affine
4- Covariant functor
5- Cotorsion

$$\mathbf{G}: \cdots \longrightarrow \mathcal{G}^{n-1} \xrightarrow{\partial_{\mathbf{G}}^{n-1}} \mathcal{G}^{n} \xrightarrow{\partial_{\mathbf{G}}^{n}} \mathcal{G}^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها و $\mathcal{O}_X$- ریخت‌ها[1] است به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح n داشته باشیم $\partial_{\mathbf{G}}^{n}\partial_{\mathbf{G}}^{n-1}=0$. ردهٔ همهٔ همبافت‌های از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها را با نماد $\mathrm{C}(X)$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم $\mathrm{C}(X)$ یک ردهٔ گروتندیک[2] است. همبافت $\mathbf{G}=(\mathcal{G}^n,\partial_{\mathbf{G}}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها را بی‌دور[3] گویند هرگاه برای هر $n\in\mathbb{Z}$

$$\mathrm{Ker}\partial_{\mathbf{G}}^{n}=\mathrm{Im}\partial_{\mathbf{G}}^{n-1}.$$

همبافت دقیق $\mathbf{G}=(\mathcal{G}^n,\partial_{\mathbf{G}}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها به‌طور محض بی‌دور[4] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\mathcal{O}_X$- مدول $\mathcal{G}$، $\mathbf{G}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}$ همبافتی بی‌دور از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها باشد. همبافت $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial_{\mathbf{F}}^n)$ از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها را تخت گویند، هرگاه $\mathbf{F}$ همبافتی به‌طور محض بی‌دور از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های تخت باشد. ردهٔ همهٔ همبافت‌های تخت از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها را با $\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۱: در گزاره ۶.۲ از مرجع [۸]، نشان داده شده که برای هر همبافت $\mathbf{G}$، دنبالهٔ دقیق $0\longrightarrow\mathbf{G}\longrightarrow\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{F}\longrightarrow 0$ از همبافت‌ها وجود دارد به‌طوری‌که $\mathbf{F}\in\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$ و

$$\mathbf{C}\in\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}=\{\mathbf{K}\in\mathrm{C}(X)|\mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{C}(X)}(\mathbf{F},\mathbf{K})=0\ ,\ \forall\mathbf{F}\in\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)\}.$$

یادآوری می‌کنیم، همبافت $\mathbf{C}=(\mathcal{C}^n,\partial_{\mathbf{C}}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ -dg هم‌تاب است، هرگاه $\mathbf{C}\in\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}$.

تبصره ۲: با روشی مشابه اثبات گزاره ۴.۳ از مرجع [۲] می‌توان نشان داد که همبافت $\mathbf{C}=(\mathcal{C}^n,\partial_{\mathbf{C}}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها dg - هم‌تاب است اگر و تنها اگر

۱) برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\mathcal{C}^n$ یک $\mathcal{O}_X$- مدول هم‌تاب باشد.

۲) برای هر همبافت تخت $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial_{\mathbf{F}}^n)$، همبافت $(\mathbf{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{F},\mathbf{C}),\delta)$ بی‌دور باشد که در آن

$$(\mathbf{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{F},\mathbf{C})^n := \prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^i,\mathcal{C}^{i+n}),\delta)$$
$$\delta^n(f^i)_{i\in\mathbb{Z}}=\delta_{\mathbf{C}}^{i+n}f^i-(-1)^n f^{i+1}(\delta_{\mathbf{F}}^i)$$

1- Morphism of $\mathcal{O}_X$-modules
2- Grothendieck category
3- Acyclic
4- Pure acyclic

توجه داشته باشید که $(\mathbf{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{F},\mathbf{C}),\delta)$ همبافتی از گروه‌های آبلی است.

تبصره ۳: به‌راحتی می‌توان دید که یکریختی

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{F},\mathbf{C})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(X)}(\mathbf{F},\mathbf{C}[n])$$

از گروه‌های آبلی همواره برقرار است. برای تعاریف، نمادها و جزییات رسته‌های هموتوپی و رسته‌های مثلثی به فصل ۱۰ از مرجع [۱۸] و فصل‌های اول و دوم از مرجع [۶] مراجعه کنید. نتایج این بخش را با گزارهٔ زیر که به ساختار $\mathcal{O}_X$- مدول‌های تخت اختصاص دارد آغاز می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک $\mathcal{O}_X$- مدول باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند.

(آ) $\mathcal{F}$ تخت است.

(ب) برای هر زیر مجموعهٔ باز و آفین U از X، $\mathcal{F}|_U$ یک $\mathcal{O}_U$- مدول $(\mathcal{O}_U=\mathcal{O}_X|_U)$ تخت است.

(ث) برای هر زیر مجموعهٔ باز و آفین U از X، $\mathcal{F}(U)$ یک $\mathcal{O}_X(U)$- مدول تخت است.

اثبات. (آ) $\leftarrow$ (ب) فرض کنید $\mathcal{F}$ یک $\mathcal{O}_X$- مدول تخت و U یک زیر مجموعهٔ باز و آفین از X باشد. دنبالهٔ

$$0\longrightarrow\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{K}\longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_U$- مدول‌ها را در نظر بگیرید. اگر $f:U\longrightarrow X$ نگاشت شمول و f_* تابعگون تصویر مستقیم[1] متناظرش باشد آنگاه دنبالهٔ دقیق چپ

$$0\longrightarrow f_*\mathcal{G}\longrightarrow f_*\mathcal{C}\longrightarrow f_*\mathcal{K}\longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_X$- مدول‌ها وجود دارد. برای آن‌که دنبالهٔ فوق دقیق راست باشد کافی است نشان دهیم برای هر زیر مجموعهٔ باز و آفین V از X، دنبالهٔ

$$0\longrightarrow f_*\mathcal{G}(V)\longrightarrow f_*\mathcal{C}(V)\longrightarrow f_*\mathcal{K}(V)\longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_X(V)$- مدول‌ها یک دنبالهٔ دقیق است؛ اما طبق فرض X یک اسکیم منفک است و درنتیجه $U\cap V$ زیر مجموعهٔ باز و آفینی از X است؛ بنابراین دنبالهٔ

$$0\longrightarrow \mathcal{G}(U\cap V)\longrightarrow\mathcal{C}(U\cap V)\longrightarrow\mathcal{K}(U\cap V)\longrightarrow 0$$

1- Direct image functor

دنباله‌ای دقیق از $\mathcal{O}_X(V)$ - مدول‌هاست و در نتیجه طبق گزاره‌های ۶.۵ و ۲.۵ از فصل دوم از مرجع [۴]، دنبالهٔ

$$\circ \longrightarrow f_*\mathcal{G} \longrightarrow f_*\mathcal{C} \longrightarrow f_*\mathcal{K} \longrightarrow \circ$$

از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها دقیق است. پس طبق فرض دنبالهٔ

$$\circ \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{K} \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ای دقیق از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها است که تحدید آن به U دنبالهٔ دقیق

$$\circ \longrightarrow \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K} \longrightarrow \circ$$

را نتیجه می‌دهد. پس $\mathcal{F}|_U$ یک $\mathcal{O}_U$ - مدول تخت است.

(ب) $\leftarrow$ (آ) واضح است.

(ب) $\leftarrow$ (ث) دنبالهٔ دقیق

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow \circ$$

از $\mathcal{O}_X(U)$ - مدول‌ها را در نظر بگیرد. در این‌صورت طبق گزارهٔ ۲.۵ از فصل دوم از مرجع [۴]، *دنبالهٔ دقیق*

$$\circ \longrightarrow f_*\tilde{M} \longrightarrow f_*\tilde{N} \longrightarrow f_*\tilde{K} \longrightarrow \circ$$

از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها وجود دارد که در آن $f: U \longrightarrow X$ نگاشت شمول است؛ بنابراین طبق فرض دنبالهٔ

$$\circ \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{M} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{N} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{K} \longrightarrow \circ$$

از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها دقیق است. در نتیجه، دنباله دقیق

$$\circ \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{M}(U) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{N}(U) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\tilde{K}(U) \longrightarrow \circ$$

اثبات را کامل می‌کند. قسمت عکس هم به طریق مشابه و با استفاده از گزارهٔ ۲.۵ از فصل دوم از مرجع [۴] نتیجه می‌شود. ■

فرض کنید $\mathrm{C}(\mathrm{Cof}X)$ ردهٔ همهٔ همبافت‌های از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های تخت و هم‌تاب باشد. در ادامهٔ این بخش نشان می‌دهیم $\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp} = \mathrm{C}(\mathrm{Cof}X) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{Flat}X)$ که در آن $\mathrm{C}(\mathrm{Flat}X)$ ردهٔ همهٔ همبافت‌های از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های تخت است. حال به گزارهٔ زیر که به ساختار همبافت‌های تخت از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها اختصاص دارد می‌پردازیم.

گزاره.۲.۲. همبافت $\mathbf{F} = (\mathcal{F}^n, \partial_{\mathbf{F}}^n)$ از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها را در نظر بگیرید. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(آ) $\mathbf{F}$ تخت است.

(ب) $\mathbf{F}$ بی‌دور است و برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}$ یک $\mathcal{O}_X$ - مدول تخت است.

اثبات: (آ) $\leftarrow$ (ب) فرض کنید $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial_{\mathbf{F}}^{n})$ همبافتی تخت باشد. در این صورت به ازای $n\in\mathbb{Z}$ دلخواه، $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}$ یک زیر مدول محض[1] از $\mathcal{O}_X$ - مدول تخت $\mathcal{F}^n$ است و در نتیجه برای هر زیر مجموعهٔ باز و آفین U از X، $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}|_U$ یک زیر مدول محض از $\mathcal{O}_U$ - مدول تخت $\mathcal{F}^n|_U$ است (گزاره ۲.۱ (ب)). پس $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}|_U$ یک $\mathcal{O}_U$ - مدول تخت است؛ بنابراین طبق گزارهٔ ۲.۱، $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}$ یک $\mathcal{O}_X$ - مدول تخت است.

(ب) $\leftarrow$ (آ) فرض کنید $\mathbf{F}$ دقیق و برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}$ یک $\mathcal{O}_X$ - مدول تخت باشد. در این صورت برای هر $n\in\mathbb{Z}$، دنبالهٔ دقیق

$$0\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}\longrightarrow \mathcal{F}^n\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n+1}\longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های تخت وجود دارد. طبق گزارهٔ ۲.۱، برای هر زیر مجموعهٔ باز و آفین U از X، دنبالهٔ دقیق

$$0\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}(U)\longrightarrow \mathcal{F}^n(U)\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n+1}(U)\longrightarrow 0$$

از $\mathcal{O}_X(U)$ - مدول‌های تخت وجود دارد. از طرفی می‌دانیم هر دنبالهٔ دقیقی که به یک $\mathcal{O}_X(U)$ - مدول تخت ختم شود به‌طور محض دقیق است. چون U دلخواه بود پس دنبالهٔ

$$0\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n}\longrightarrow \mathcal{F}^n\longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{\mathbf{F}}^{n+1}\longrightarrow 0$$

به‌طور محض دقیق است و در نتیجه همبافت $\mathbf{F}$ تخت است.■

قضیه ۳.۲. فرض کنید R یک حلقهٔ شرکت‌پذیر و یک‌دار باشد. در این صورت هر همبافت تخت از R - مدول‌های هم‌تاب، انقباض‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial_{\mathbf{F}}^{n})$ یک همبافت تخت از R - مدول‌های هم‌تاب باشد. چون $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial_{\mathbf{F}}^{n})$ یک همبافت تخت است پس می‌توانیم آن را به‌صورت حد مستقیم $\mathbf{F}=\operatorname{colim}_{i\in I}\mathbf{X}_i$ از همبافت‌ها بنویسیم به‌طوری‌که برای هر $i\in I$، $\mathbf{X}_i$ همبافتی تصویری از R - مدول‌هاست. می‌دانیم $\operatorname{colim}_{i\in I}\mathbf{X}_i$ خارج‌قسمتی از $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i$ است بنابراین دنبالهٔ دقیق

$$0\longrightarrow \mathbf{K}\longrightarrow \bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i\longrightarrow \mathbf{F}=\operatorname{colim}_{i\in I}\mathbf{X}_i\longrightarrow 0 \qquad (۴)$$

1- Pure submodule

از همبافت‌ها وجود دارد. چون I مجموعه‌ای جهت‌دار است پس برای همبافت با نمایش متناهی[1] مثل $\mathbf{G}$ دنبالهٔ دقیق

$$0\longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{C}(X)}(\mathbf{G},\mathbf{K})\longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{C}(X)}(\mathbf{G},\bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i)\longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{C}(X)}(\mathbf{G},\operatorname{colim}_{i\in I}\mathbf{X}_i)\longrightarrow 0$$

از گروه‌های آبلی وجود دارد (برای دیدن تعاریف و جزئیات بیشتر به بخش‌های ۱ و ۲ از مرجع [۲] که روی هر اسکیم شبه فشرده و منفک برقرارند مراجعه کنید)؛ بنابراین دنباله (۴) به‌طور محض دقیق است. از طرفی می‌دانیم برای هر $i\in I$، همبافت تصویری $\mathbf{X}_i$ یک همبافت انقباض-پذیر از مدول‌های تصویری است؛ اما طبق قضیه ۱۱.۲ از مرجع [۵]، $\mathbf{K}=\bigcup_{j\in J}\mathbf{K}_j$ به‌طوری‌که برای هر، $\mathbf{K}_j$ یک همبافت انقباض‌پذیر از مدول‌های تخت است. چون برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\mathcal{F}^n$ هم‌تاب است پس دنبالهٔ دقیق زیر

$$0\longrightarrow \mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\mathbf{F},\mathbf{F})\longrightarrow \mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i,\mathbf{F})\longrightarrow \mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\mathbf{K},\mathbf{F})\longrightarrow 0$$

از همبافت‌ها در رسته گروه‌های آبلی وجود دارد. طبق تبصره ۱، $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{C}(X)}(\bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i,\ \mathbf{F})=\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{C}(X)}(\bigcup_{j\in J}\mathbf{K}_j,\ \mathbf{F})=0$ و در نتیجه همبافت‌های $\mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\mathbf{K},\mathbf{F})$ و $\mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\bigoplus_{i\in I}\mathbf{X}_i,\mathbf{F})$ دقیق هستند؛ بنابراین $\mathbf{Hom}^{\bullet}_R(\mathbf{F},\mathbf{F})$ نیز دقیق است. در نتیجه با استناد به تبصره ۳

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(X)}(\mathbf{F},\mathbf{F})=0\,.$$

بنابراین همبافت $\mathbf{F}$ انقباض پذیر است. ■

در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که مشابه قضیهٔ فوق در رستهٔ $\mathrm{Qco}X$ نیز برقرار است. ابتدا برخی نمادها را از بخش ۴ از فصل سوم از مرجع [۴] یادآوری می‌کنیم. فرض کنید $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ پوششی باز برای X و $\mathcal{F}$ یک $\mathcal{O}_X$- مدول باشد. در این صورت p -امین چک[2] $\mathcal{O}_X$- مدول $\mathcal{F}$ را با $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\bigoplus_{i_0<\ldots<i_p} f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0,\ldots,i_p}})$ تعریف می‌کنیم که در آن $U_{i_0,\ldots,i_p}=U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p}$ و $f:U_{i_0,\ldots,i_p}\longrightarrow X$ تابع شمول است. همچنین، طبق لم ۲.۴ از فصل سوم از مرجع [۴]، همبافت دقیق

$$\mathfrak{C}\ (\mathfrak{U},\mathcal{F}):0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathfrak{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})\longrightarrow\mathfrak{C}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})\longrightarrow\mathfrak{C}^2(\mathfrak{U},\mathcal{F})\longrightarrow\cdots$$

1- Finitely presented
2- Cech

از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌ها وجود دارد که به همبافت چک[1] مشهور است. لازم به توضیح است که طبق اثبات لم ۲.۴ از فصل سوم از مرجع [۴]، این همبافت به‌طور موضعی با صفر هموتوپ است؛ یعنی برای هر $x \in X$ همبافت $\mathfrak{C}\ (\mathfrak{U},\mathcal{F})_x$ از $\mathcal{O}_{X,X}$ - مدول‌ها با صفر هموتوپ است؛ بنابراین برای هر $\mathcal{O}_X$ - مدول $\mathcal{G}$ همبافت $\mathfrak{C}\ (\mathfrak{U},\mathcal{F})\otimes\mathcal{G}$ به‌طور موضعی با صفر هموتوپ و در نتیجه دقیق است. این نشان می‌دهد که $\mathfrak{C}\ (\mathfrak{U},\mathcal{F})$ به‌طور محض دقیق است.

لم ۴.۲. فرض کنید $U_{i_\circ,\dots,i_p}=U_{i_\circ}\cap\dots\cap U_{i_p}$ و $f:U_{i_\circ,\dots,i_p}\longrightarrow X$ تابع شمول باشد. در این صورت

(آ) تابعگون f_* دقیق است.

(ب) تابعگون f_* دنباله‌های به‌طور محض دقیق را حفظ می‌کند.

(پ) تابعگون f_* مدول‌های تخت را حفظ می‌کند.

(ث) تابعگون f_* حدهای مستقیم[2] را حفظ می‌کند.

(ت) تابعگون f_* همبافت‌های تخت را حفظ می‌کند.

اثبات: (آ)، (پ) و (ت) به‌طور مستقیم از تعاریف نتیجه می‌شوند. (ث) طبق لم **B.6** صفحه ۴۱۰ از مرجع [۱۷] و (ب) طبق لم ۵.۲ از مرجع [۵] برقرار هستند. ■

۳. هم‌بافت‌های تخت از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های هم‌تاب

در این بخش، به تشریح قضایای نیمن در حالت‌های غیر آفین خواهیم پرداخت و تعبیری روشن برای هم‌ارزی (۲) می‌یابیم. مزیت روش ما این است که عناصر رستهٔ هموتوپی جایگزین $\mathrm{K}(\mathrm{Proj}R)$ را به‌طور صریح مشخص خواهیم کرد.

قضیه ۱.۳. هر همبافت تخت از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های هم‌تاب، انقباض‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{F}=(\mathcal{F}^n,\partial^n_{\mathbf{F}})$ یک همبافت تخت از $\mathcal{O}_X$ - مدول‌های هم‌تاب باشد. کافی است نشان دهیم برای هر p ، $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\bigoplus_{i_\circ<\dots<i_p} f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_\circ,\dots,i_p}})$ انقباض‌پذیر است.

طبق قضیهٔ ۳.۲، برای هر p و هر $U_{i_\circ,\dots,i_p}=U_{i_\circ}\cap\dots\cap U_{i_p}$، $\mathbf{F}|_{U_{i_\circ,\dots,i_p}}$ همبافتی تخت از $\mathcal{O}_{U_{i_\circ,\dots,i_p}}$ - مدول‌هاست؛ بنابراین طق لم ۴.۲، دنبالهٔ مولفه‌ای به‌طورمحض دقیق

1- Cech complex
2- Direct limit

$$0 \longrightarrow f_*(\bigcup_{j\in J}\mathbf{K}_j^p) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} f_*\mathbf{X}_i^p \longrightarrow f_*\mathbf{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}} \longrightarrow 0$$

از همبافت‌های تخت وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i\in I$، $\mathbf{X}_i^p$ یک همبافت انقباض‌پذیر از مدول‌های تخت و برای هر $j\in J$، $\mathbf{K}_j^p$ یک همبافت انقباض‌پذیر از مدول‌های تخت است.
چون برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\mathcal{F}^n$ هم‌تاب است پس دنبالهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow \mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathbf{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{i\in I} f_*\mathbf{X}_i^p,\mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathbf{K}^p,\mathbf{F}) \longrightarrow 0$$

از همبافت‌ها در ردهٔ گروه‌های آبلی وجود دارد. طبق تبصره ۲، همبافت $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathbf{K}^p,\mathbf{F})$ و همبافت $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{i\in I} f_*\mathbf{X}^p{}_i,\mathbf{F})$ دقیق هستند؛ بنابراین $\mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathbf{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}},\mathbf{F})$ نیز دقیق است و در نتیجه برای هر $0\le k\le n$، $\mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{C}^k(\mathfrak{U},\mathbf{F}),\mathbf{F})$ همبافتی دقیق است.
حال با استفاده از همبافت مؤلفه‌ای به‌طور محض دقیق

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbf{F}): 0 \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathfrak{C}^0(\mathfrak{U},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathfrak{C}^1(\mathfrak{U},\mathbf{F}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{C}^n(\mathfrak{U},\mathbf{F}) \longrightarrow 0$$

و با توجه به اینکه $\mathbf{F}$ همبافتی از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب است نتیجه می‌گیریم $\mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{C}(\mathfrak{U},\mathbf{F}),\mathbf{F})$ همبافتی دقیق از همبافت‌هاست. در نتیجه $\mathbf{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{F},\mathbf{F})$ همبافتی دقیق است؛ بنابراین $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)}(\mathbf{F},\mathbf{F})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(X)}(\mathbf{F},\mathbf{F})=0$ و در نتیجه $\mathbf{F}$ انقباض‌پذیر است. ■

قضیه ۲.۳. تساوی

$$\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^\perp = \mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$$

در ردهٔ $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)$ برقرار است.

اثبات: در ابتدا لازم است که درستی تساوی

$$\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^\perp = \mathrm{C}(\mathrm{Cof}X).$$

را در $\mathrm{C}(\mathrm{Flat}X)$ و به‌عنوان زیر رسته‌های $\mathrm{C}(X)$ ثابت کنیم. طبق تبصره ۲ قسمت (۱) هر عضو $\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^\perp$ همبافتی از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب است و در نتیجه داریم $\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^\perp\subseteq\mathrm{C}(\mathrm{Cof}X)$؛ بنابراین باید نشان دهیم

$$\mathrm{C}(\mathrm{Cof}X)\subseteq\mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^\perp.$$

فرض کنید $\mathbf{X}$ همبافتی از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های هم‌تاب باشد. دراین‌صورت طبق تبصرهٔ ۲، دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow \mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow 0 \qquad (۵)$$

از همبافت‌ها وجود دارد که در آن $\mathbf{C} \in \mathrm{C}(\mathrm{Cof}X)$ و داریم $\mathbf{F} \in \mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$؛ بنابراین $\mathbf{F}$ همبافتی به‌طور محض دقیق از $\mathcal{O}_X$- مدول‌های تخت و هم‌تاب است. در نتیجه $\mathbf{F}$ انقباض‌پذیر است. از طرفی دنبالهٔ فوق به‌طور مؤلفه‌ای انقباض‌پذیر است در نتیجه مثلث شاخص[1]

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \Sigma\,\mathbf{X}.$$

وجود دارد؛ بنابراین $\mathbf{X} \cong \mathbf{C}$ در $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)$ و در نتیجه طبق تبصره ۲، $\mathbf{C} \in \mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}$. پس $\mathrm{C}(\mathrm{Cof}X) = \mathrm{C}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}$. در نتیجه، $\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X) \subseteq \mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}$. حال نشان می‌دهیم $\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp} \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$. برای این منظور فرض کنید $\mathbf{X} \in \mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp}$. در این‌صورت، طبق گزاره ۱.۳ از مرجع [۸]، مثلث شاخص

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \Sigma\,\mathbf{X}$$

در $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathbf{F} \in \mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$ و داریم $\mathbf{C} \in \mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$. با اعمال تابعگون کوهمولوژی[2] $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)}(\mathbf{F},-)$ ، روی این مثلث شاخص نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)}(\mathbf{F},\mathbf{F}) = 0$. پس $\mathbf{F}$ انقباض‌پذیر است و در نتیجه $\mathbf{X} \cong \mathbf{C}$ در $\mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)$؛ که این اثبات را تمام می‌کند. ■

نتیجه ۳.۳. هم ارزی

$$\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$$

از رسته‌های مثلثی وجود دارد.

اثبات: می‌دانیم طبق قضیه ۱۳.۱.۹ از مرجع [۱۶]، هم ارزی

$$\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)^{\perp} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$$

از رسته‌های مثلثی وجود دارد؛ بنابراین طبق قضیه ۶.۲، هم ارزی

$$\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}(\mathrm{Flat}X)/\mathrm{K}_{\mathrm{pac}}(\mathrm{Flat}X)$$

از رسته‌های مثلثی وجود دارد. ■

1- Distinguished triangle
2- Cohomological functor

پس در این مقاله نشان دادیم که روی اسکیم شبه‌فشرده و منفک X، تساوی $\mathrm{K}(\text{dg-Cof}X) = \mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$ برقرار است و در نتیجه طبق نتیجه ۷.۲، رسته $\mathrm{K}(\mathrm{Cof}X)$ جایگزین طبیعی برای اشیای تصویری در $\mathrm{Qco}X$ است.

سپاسگزاری: در پایان بر خودم لازم می‌دانم از داوران محترم که زحمت داوری مقاله را قبول کرده و نظرات ارزشمندی در راستای بهبود مقاله پیشنهاد دادند قدردانی کنم.

منابع

[1] J. Asadollahi and S.h. Salarian (2012). *Cohomology theories based on flats*, J. Algebra, **353 (1)**, 93-120.

[2] E. Enochs and J.R. García Rozas (1998). *Flat covers of complexes,* J. Algebra, **0 (1)**, 86-102.

[3] E. Enochs and S. Estrada (2005). *Relative homological algebra in the category of quasi-coherent sheaves,* Adv. Math. **194 (2),** 284-295.

[4] R. Hartshorne (1997). *Algebraic Geometry,* Springer-Verlag.

[5] E. Hosseini (2019). *The pure derived categories of quasi-coherent sheaves,* Comm Algebra, **47(9)**, 3781-3788.

[6] E. Hosseini (2017). *Flat quasi-coherent sheaves of finite cotorsion dimension,* J. Algebra and its Applications, **16** (1), 1750015-1-17500157.

[7] E. Hosseini (2017). *Bounded complexes of cotorsion sheaves*, Comm. Algebra , **45 (7)**, 3068-3074.

[8] E. Hosseini, S.h. Salarian (2013). *The homotopy category of cotorsion flat quasi-coherent sheaves,* Proc. Amer. Math. Soc. **141**, 753-762.

[9] P. Jorgensen (2005). *The homotopy category of projective modules,* Adv. Math. **193 (1)**, 223-232.

[10] S. Iyengar, H. Krause (2006). *Acyclicity versus total acyclicity for complexes over noetherian rings,* Documenta Mathematica, **11**, 207-240.

[11] H. Krause (2005). *The stable derived category of noetherian schemes,* Compositio Mathematica, **141 (5)**, 1128-1162.

[12] D. Murfet (2007). *The mock homotopy category of projectives and Grothendieck duality theorem,* PhD thesis, Canbera.

[13] D. Murfet and S.h. Salarian (2011). *Totally acyclic complexes over noetherian schemes,* Adv. Math. **226 (2)**, 1096-1133.

[14] A. Neeman (2008). *The homotopy category of flat modules and Grothendieck duality theorem,* Inventiones mathematicae, **174**, 255–308.

[15] A. Neeman (2010). *Some adjoints of homotopy categories,* Annals of Math. **171**, 2143–2155.

[16] A. Neeman (2001). *Triangulated categories,* Annals of Mathematics Studies, **148**, Princeton: Princeton University Press.

[17] R.W. Thomason and T. Trobaugh (1990). *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories,* The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math. **88**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 247-435.

[18] C. Weibel (2003). *An introduction to homological algebra,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**.

JAMM,
DOI: 10.22055/JAMM.2020.30236.1741

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

The Homotopy Category of Cotorsion Flat Quasi-Coherent Sheaves Over Quasi-Compact and Semi-Separated Schemes

Esmaeil Hosseini

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 5 2July 8 2019 Accepted for publication: May 23 2020
Corresponding author: e.hosseini@scu.ac.ir

Abstract

Let X be a quasi-compact and semi-separated scheme and $\mathrm{Qco}X$ be the category of all quasi-coherent sheaves of $\mathcal{O}_X$ -modules. We show that any flat complex of cotorsion quasi-coherent sheaves of $\mathcal{O}_X$ -modules is contractible. As an application, it is shown that the homotopy category of cotorsion flat quasi-coherent sheaves of $\mathcal{O}_X$ -modules is the natural replacement of the homotopy category of projectives.

Keywords: Scheme, quasi-coherent sheaf, flat sheaf, cotorsion sheaf, flat complex, homotopy category, triangulated category.

Mathematics Subject Classification (2010): 14F05, 18E30.