مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۴۱۷-۴۰۰
شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 0.22055/jamm.2020.30573.1746

وجود سه جواب برای معادلات تفاضلی با استفاده از روش‌های تغییراتی

شاپور حیدر خانی[1]، امجد سالاری

گروه ریاضی، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۵/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۳

چکیده: ما در این مقاله چندگانگی جواب‌های یک کلاس از معادلات تفاضلی را مطالعه می‌نماییم. در واقع از روش‌های تغییراتی برای تابعک‌های هموار که روی فضاهای باناخ بازتابی تعریف شده‌اند برای به دست آوردن وجود حداقل سه جواب برای این معادلات استفاده می‌کنیم. بعلاوه، با فرض نامنفی بودن قسمت‌های غیرخطی ثابت می‌کنیم که جواب‌های به‌دست‌آمده نامنفی هستند. درنهایت با ارائه یک مثال نتایج به‌دست‌آمده را شفاف‌سازی می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تفاضلی غیرخطی، مسائل مقدار اولیه گسسته، شرط لیپ شیتز، روش تغییراتی، نظریه نقطه بحرانی

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۴B۱۵، ۳۹A۰۵.

۱- مقدمه

در این مقاله ما به مطالعه مسئله مقدار مرزی تفاضلی با شرایط مرزی دیریکله

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(k-1)))+q_k\phi_p(u(k))=\lambda f(k,u(k))+\mu g(k,u(k))+h(u(k)), & k\in[1,\ T],\\ u(0)=u(T+1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

می‌پردازیم که در آن $1<p<\infty$، $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$، $q_k:=q(k)>0$ برای هر $k\in[1,\ T]$، $T\ge 2$ یک ثابت صحیح است، $[1,\ T]$ بازه گسسته $\{1,\dots,T\}\subset\mathbb{N}$ است، $f,g:[1,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند، $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته لیپشیتز از مرتبه $p-1$ با ثابت لیپ شیتز $L\ge 0$ است که $h(0)=0$ و $\Delta u(k)=u(k+1)-u(k)$ عملگر تفاضلی پیشرو است.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: sh.heidarkhani@razi.ac.ir

در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی مانند علوم کامپیوتر، مهندسی مکانیک، سیستم‌های کنترلی، مطالعات زیستی، شبکه‌های عصبی، اقتصاد و ... همواره با مدل‌های ریاضی سر و کار داریم که در بسیاری از این مدل‌سازی‌ها به مسائل مقدار اولیه گسسته یا همان معادلات تفاضلی با شرایط اولیه منتهی می‌شود. با توجه به این موضوع توجه ویژه‌ای به این مسائل وجود دارد، به‌عنوان‌مثال می‌توانید [۱] و مراجع آن را ملاحظه نمایید.

در سالیان اخیر تعدادی از محققان با استفاده از نظریه نقطه ثابت، روش جواب‌های بالایی و پایینی، نظریه نقطه بحرانی، روش تغییراتی و نظریه مورس به مطالعه وجود و چندگانگی جواب‌های معادلات تفاضلی متناهی پرداختند. برای مشاهده و مطالعه نتایج به‌دست‌آمده از این تحقیقات می‌توان به منابع [۱ الی ۱۳] مراجعه کرد. عنوان مثال نویسندگان در [۲] وجود جواب‌های مثبت متناوب را برای معادلات تفاضلی غیرخطی با ضرایب متناوب را با استفاده از یک قضیه نقطه ثابت در مخروط‌ها بررسی کردند. نویسندگان در [۱] با استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی مسئله

$$\Delta^{۲}(x_{k-۱}) + q_k x_k + f(k, x_k) = ۰ \quad k \in [۱, N]$$

را با شرایط مرزی

$$x_{۰} = x_N,\ \Delta x_{۰} = \Delta x_N$$

بر اساس]۱۴[در نظر گرفتند و نتایج وجودی و یکتایی را به دست آوردند. نویسندگان در به $q_k \equiv h \equiv ۰$ اصل تغییراتی ریچری[1] وجود حداقل سه جواب را برای مسئله (۱-۱) در حالت با استفاده از یک قضیه نقطه ثابت، وجود سه جواب مثبت]۱۲[دست آوردند. پژوهشگران در - لاپلاسین گسسته pرا برای مسئله

$$\begin{cases} \Delta(\phi_p(\Delta u(t-۱))) + a(t)\, f(u(t)) = ۰, & t \in [۱, T+۱], \\ \Delta u(۰) = u(T+۲) = ۰, & \text{or} \\ u(۰) = \Delta u(T+۱) = ۰ \end{cases}$$

را که در آن $f:[۰,\infty) \to [۰,\infty)$ تابعی پیوسته است و $a:[۱,\ T+۱] \to [۰,\infty)$، به دست آوردند. نویسندگان در [۵] بر اساس قضایای سه‌نقطه بحرانی، شرایط مختلف را برای وجود و چندگانگی جواب‌های مسئله مقدار اولیه غیرخطی تفاضلی با شرایط مرزی نویمن را بررسی کردند. در [۳] با استفاده از نظریه نقطه بحرانی وجود بینهایت جواب را برای مسئله p-لاپلاسین

1- Ricceri

غیرخطی گسسته با شرایط مرزی دیریکله را تحت شرایط مجانبی روی قسمت غیرخطی بررسی شد.

با توجه به نتایج فوق، ما در این مقاله در پی اثبات وجود سه جواب برای مسئله (۱-۱) بر اساس مقادیر مختلف پارامترهای λ و μی متعلق به بازه‌های حقیقی هستیم. روش مورداستفاده در این مقاله، روش تغییراتی و به‌طور دقیق‌تر یک قضیه سه‌نقطه بحرانی است که توسط ریچری در [۱۵] به‌دست‌آمده است که ما در این مقاله با استفاده از این قضیه، وجود حداقل سه جواب را برای مسئله (۱-۱) به دست می‌آوریم و با استفاده از شرط نامنفی بودن قسمت‌های غیرخطی، نشان می‌دهیم جواب‌های به‌دست‌آمده نامنفی هستند. درنهایت برای شفاف‌سازی نتایج اصلی یک مثال ارائه می‌دهیم.

در اینجا یک حالت خاص از نتیجه اصلی این مقاله را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱-۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی نامنفی و پیوسته باشد و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته لیپ شیتز با ثابت لیپ شیتز L باشد که این ثابت در شرط $LT(T+۱)<۴$ صدق می‌کند و $h(\circ)=\circ$. فرض کنید

$$\max\left\{\limsup_{u\to\circ}\frac{\int_\circ^u f(t)\mathrm{d}t}{|u|^۲},\limsup_{|u|\to\infty}\frac{\int_\circ^u f(t)\mathrm{d}t}{|u|^۲}\right\}\le\circ$$

و

$$\sup_{u\in E}\frac{p\sum_{k=۱}^{T}\int_\circ^{u(k)} f(t)\mathrm{d}t}{\sum_{k=۱}^{T+۱}(|\Delta u(k-۱)|^۲+|u(k)|^۲)-p\sum_{k=۱}^{T}\int_\circ^{u(k)} h(t)\mathrm{d}t}>\circ$$

که در آن

$$E:=\{u:[\circ,T+۱]\to\mathbb{R}:u(\circ)=u(T+۱)=\circ\}.$$

آنگاه برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda^\star,\infty)$ که در آن

$$\lambda^\star=\inf\Big\{\frac{\sum_{k=۱}^{T+۱}(|\Delta u(k-۱)|^۲+|u(k)|^۲)-p\sum_{k=۱}^{T}\int_\circ^{u(k)} h(t)\mathrm{d}t}{p\sum_{k=۱}^{T}\int_\circ^{u(k)} f(t)\mathrm{d}t}$$

$$:u\in E,\sum_{k=۱}^{T}\int_\circ^{u(k)} f(t)\mathrm{d}t>\circ\Big\},$$

$R>0$ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته و نامنفی $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>0$ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[0,\gamma]$، مسئله

$$\begin{cases}-\Delta^2(u(k-1))+u(k)=f(u(k))+g(u(k))+h(u(k)), & k\in[1,T],\\ u(0)=u(T+1)=0,\end{cases}$$

دارای حداقل سه جواب نامنفی $u_i\in E$، $i=1,2,3$ است به‌طوری‌که

$$\Big(\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u_i(k-1)|^p+q_k\,|u_i(k)|^p\Big)^{1/p}<R,\quad i=1,2,3\,.$$

۲- تعاریف اولیه و مقدمات

در این بخش تعدادی از نکات، تعاریف و مفاهیم اولیه را که در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌کنیم را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این مقاله، فضای باناخ T بعدی

$$E:=\{u:[0,\ T+1]\to\mathbb{R}:u(0)=u(T+1)=0\}$$

را با نرم زیر در نظر می‌گیریم

$$\|u\|:=\Big(\sum_{k=1}^{T+1}|\Delta u(k-1)|^p+q_k\,|u(k)|^p\Big)^{1/p}.$$

در ادامه این مقاله از نامساوی زیر که در لم ۲.۲ از [۱۴] اثبات شده است استفاده می‌کنیم

$$\max_{k\in[1,T]}|u(k)|\le\frac{(T+1)^{(p-1)/p}}{2}\|u\|. \tag{2}$$

حال فرض کنید $T\ge 2$ یک عدد صحیح و ثابت باشد، $f:[1,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته لیپشیتز از مرتبه $p-1$ با ثابت لیپشیتز $L\ge 0$ باشد، یعنی برای هر $t_1,t_2\in\mathbb{R}$،

$$|h(t_1)-h(t_2)|\le L\,|t_1-t_2|^{p-1}$$

و $h(0)=0$. فرض کنید ثابت لیپشیتز $L\ge 0$ در شرط $LT(T+1)^{p-1}<2^p$ صدق کند. برای هر $k\in[1,\ T]$ و هر $t\in\mathbb{R}$ قرار دهید

$$F(k,t) := \int_{\circ}^{t} f(k,\xi)\mathrm{d}\xi$$

و

$$H(t) := \int_{\circ}^{t} h(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

ملاحظه ۲-۱. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $f:[۱,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه به‌عنوان یک نگاشت از فضای توپولوژیک $[۱,\ T]\times\mathbb{R}$ به توی فضای توپولوژیک $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. در این مقاله توپولوژی روی $[۱,\ T]$ توپولوژی گسسته است.

ابزار اصلی ما در این مقاله، قضیه ۲-۱ است که توسط ریچری در قضیه ۲ از [۱۵] به‌دست‌آمده است. این قضیه به‌صورت زیر است:

اگر X یک فضای باناخ حقیقی باشد، $\mathcal{W}_X$ را کلاس تمام تابعک‌های $\Phi: X\to\mathbb{R}$ در نظر بگیرید که در خاصیت زیر صدق می‌کنند:

اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که به‌طور ضعیف به $u\in X$ میل می‌کند و $\liminf_{n\to\infty}\Phi(u_n)\le\Phi(u)$، آنگاه $\{u_n\}$ دارای یک زیر دنباله است که به‌طور قوی به u میل می‌کند.

به‌عنوان‌مثال اگر X یک فضای محدب یکنواخت باشد و $g:[\circ,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نزولی اکید باشد، آنگاه تابعک $u\to g(\|u\|)$ متعلق به کلاس $\mathcal{W}_X$ است.

قضیه ۲-۱. فرض کنید X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر باشد. فرض کنید $X: X\to\mathbb{R}$ یک تابعک از کلاس $C^{۱}$ و متعلق به $\mathcal{W}_X$ باشد که دارای خواص بازدارندگی[۱] و نیم‌پیوسته ضعیف دنباله‌ای[۲] است که روی هر زیرمجموعه کران‌دار X کران‌دار است و مشتق آن یک معکوس پیوسته روی X^* می‌پذیرد. همچنین فرض کنید $J: X\to\mathbb{R}$ یک - تابعک از کلاس $C^{۱}$ باشد که مشتق آن فشرده است. فرض کنید Φ دارای یک مینیمم موضعی $u_{\circ}$ با خاصیت $\Phi(u_{\circ})=J(u_{\circ})=\circ$ باشد. درنهایت، قرار دهید

$$\rho=\max\left\{\circ,\limsup_{\|u\|\to\infty}\frac{J(u)}{\Phi(u)},\limsup_{u\to u_{\circ}}\frac{J(u)}{\Phi(u)}\right\},$$

$$\sigma=\sup_{u\in\Phi^{-1}(\circ,\infty)}\frac{J(u)}{\Phi(u)},$$

1- Coercive
2- Sequentially weakly lower semicontinuous

و فرض کنید $\rho < \sigma$. آنگاه برای هر بازه فشرده $[c,d] \subset (\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\rho})$ (با قرارداد $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$)، $R > 0$ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda \in [c,d]$ و هر تابعک از کلاس C^1، $\Psi : X \to \mathbb{R}$ با مشتق فشرده، $\gamma > 0$ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu \in [0, \gamma]$،

$$\Phi'(u) = \lambda J'(u) + \mu \Psi'(u)$$

حداقل سه جواب در X دارد که نرم آن‌ها کمتر از R است.

در منابع [۱۶ الی ۱۹] از قضیه فوق برای به دست آوردن وجود حداقل سه جواب برای مسائل مقدار اولیه مختلف استفاده شده است.

حال برای هر $u \in E$ تابعک‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$\Phi(u) = \frac{\| u \|^p}{p} - \sum_{k=1}^{T} H(u(k)) \tag{۳}$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^{T} F(k, u(k)) \tag{۴}$$

و

$$\Psi(u) = \sum_{k=1}^{T} G(k, u(k)). \tag{۵}$$

یک محاسبات ساده نشان می‌دهد که تابعک $I : \Phi - \mu\Psi - \lambda J$ مشتق‌پذیر گتو[1] است و مشتق گاوی آن در نقطه $u \in E$ برای هر $v \in E$ عبارت است از

$$\begin{aligned} I'(u)(v) = & -\sum_{k=1}^{T+1} \left[\Delta(\phi_p(\Delta u(k-1))) - q_k \, |u(k)|^{p-2} \, u(k) + h(u(k)) \right] v(k) \\ & -\lambda \sum_{k=1}^{T+1} f(k, u(k)) v(k) - \mu \sum_{k=1}^{T+1} g(k, u(k)) v(k). \end{aligned}$$

بنابراین، هر نقطه بحرانی تابعک I یک جواب مسئله (۱) است.

ما از لم زیر که در قضیه ۲-۲ از [۳] اثبات شده است، برای اثبات مثبت بودن جواب‌های مسئله (۱) استفاده می‌کنیم.

1- Gateaux differentiable

لم ۲-۱. اگر

$$\begin{cases}-\Delta(\phi_p(\Delta u(k-1)))+q_k\phi_p(u(k))\geq 0, & k\in[1,T],\\ u(0)\geq 0,\ u(k+1)\geq 0,\end{cases}$$

آنگاه یا u مثبت است یا $u\equiv 0$.

۳- نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی این مقاله را بیان و اثبات می‌کنیم. فرض کنید

$$\lambda_1=\inf\left\{\frac{\|u\|^p-p\sum_{k=1}^{T}H(u(k))}{p\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))}:u\in E,\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))>0\right\}$$

و $\lambda_2=\dfrac{1}{\max\{0,\lambda_0,\lambda_\infty\}}$ که در آن

$$\lambda_0=\limsup_{|u|\to 0}\frac{p\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))}{\|u\|^p-p\sum_{k=1}^{T}H(u(k))}$$

و

$$\lambda_\infty=\limsup_{\|u\|\to\infty}\frac{p\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))}{\|u\|^p-p\sum_{k=1}^{T}H(u(k))}.$$

قضیه ۳-۱. فرض کنید

$(\mathcal{A}_1)$ یک ثابت $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\max\left\{\limsup_{u\to 0}\frac{\max_{k\in[1,T]}F(k,u(k))}{|u|^p},\limsup_{|u|\to\infty}\frac{\max_{k\in[1,T]}F(k,u(k))}{|u|^p}\right\}<\varepsilon;$$

$(\mathcal{A}_2)$ یک تابع $w\in E$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|w\|^p-p\sum_{k=1}^{T}H(w(k))\neq 0$$

و

$$p(T+1)^{p-1}\varepsilon < \frac{\left(2^p - LT(T+1)^{p-1}\right)\sum_{k=1}^{T} F(k,w(k))}{\|w\|^p - p\sum_{k=1}^{T} H(w(k))}.$$

آنگاه، برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda_1,\lambda_2)$، $R>0$ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته $g:[1,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>0$ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[0,\ \gamma]$ مسئله (۱) دارای حداقل سه جواب در فضای E با نرم کمتر از R است.

اثبات. قرار دهید $X=E$. به‌وضوح X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و محدب یکنواخت است. فرض کنید تابعک‌های Φ، J و Ψ به ترتیب همان‌هایی باشند که در (۳)، (۴) و (۵) تعریف شدند. تابعک Φ از کلاس C^1 است و مشتق آن یک معکوس پیوسته روی X^* می‌پذیرد. بعلاوه، Φ نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای است. در واقع، با قرار دادن $S(u)=\sum_{k=1}^{T} H(u(k))$، برای هر $u_n\in X$ که $u_n\to u$ به‌صورت ضعیف در X، ازآنجاکه S روی X پیوسته است، داریم

$$\liminf_{n\to\infty}\Phi(u_n)=\liminf_{n\to\infty}\frac{\|u\|^p}{p}-\lim_{n\to\infty}S(u_n)\geq\frac{1}{p}\|u\|^p-S(u)=\Phi(u).$$

حال با توجه به (۲) و اینکه h یک تابع پیوسته لیپشیتز از مرتبه $(p-1)$ با ثابت لیپشیتز $L\geq 0$ است و $h(0)=0$ داریم

$$\begin{aligned}
\frac{2^p-LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\|u\|^p &= \frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\|u\|^p\\
&\leq\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{L}{p}\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^p=\frac{1}{p}\|u\|^p-L\sum_{k=1}^{T}\int_0^{u(k)}|t|^{p-1}\,\mathrm{d}t\\
&\leq\frac{1}{p}\|u\|^p-\sum_{k=1}^{T}\int_0^{u(k)}|h(t)|\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{p}\|u\|^p-\sum_{k=1}^{T}|H(u(k))|\\
&\leq\Phi(u)\leq\frac{1}{p}\|u\|^p+\sum_{k=1}^{T}|H(u(k))|\leq\frac{1}{p}\|u\|^p+\sum_{k=1}^{T}\int_0^{u(k)}|h(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\leq\frac{1}{p}\|u\|^p+L\sum_{k=1}^{T}\int_0^{u(k)}|t|^{p-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\|u\|^p+\frac{L}{p}\sum_{k=1}^{T}|u(k)|^p\\
&\leq\frac{1}{p}\|u\|^p+\frac{LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\|u\|^p=\frac{2^p+LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\|u\|^p,
\end{aligned}\tag{۶}$$

که با توجه به‌شرط $LT(T+1)^{p-1} < 2^p$، این نشان می‌دهد که Φ یک تابعک بازدارنده است. بعلاوه، فرض کنید A یک زیرمجموعه کران‌دار از X باشد؛ یعنی یک ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $u \in A$، $\|u\| \leq c$. آنگاه با توجه به (۶) داریم

$$\Phi(u) | \leq \frac{2^p + LT(T+1)^{p-1}}{p2^p} c^p.$$

بنابراین Φ روی هر زیرمجموعه کران‌دار X کران‌دار است. همچنین، ازآنجاکه فضای X با بعد متناهی است، $\Phi \in \mathcal{W}_X$. تابعک‌های J و Ψ از کلاس C^1 و دارای مشتق فشرده هستند. بعلاوه، Φ دارای یک مینیمم سراسری صفر با خاصیت $\Phi(0) = J(0) = 0$ است.

با توجه به $(\mathcal{A}_1)$، τ_1 و τ_2 با خاصیت $0 < \tau_1 < \tau_2$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $k \in [1, T]$ و برای هر u که $|u| \in [0, \tau_1) \cup (\tau_2, \infty)$

$$F(k,u) \leq \varepsilon |u|^p. \tag{7}$$

ازآنجاکه $F(k,u)$ روی $[0, T] \times \mathbb{R}$ پیوسته است، پس‌روی $k \in [1, T]$ کران‌دار است و $|u| \in [\tau_1, \tau_2]$؛ بنابراین ما می‌توانیم $\eta > 0$ و $\upsilon > p$ را طوری انتخاب کنیم که برای هر $(k,u) \in [1, T] \times \mathbb{R}$،

$$F(k,u) \leq \varepsilon |u|^p + \eta |u|^\upsilon$$

بنابراین با توجه به (۲)، برای هر $u \in X$ داریم

$$J(u) \leq \frac{(T+1)^{p-1}\varepsilon}{2^p} \|u\|^p + \frac{(T+1)^{(p-1)\upsilon/p}\eta}{2^\upsilon} \|u\|^\upsilon. \tag{8}$$

بنابراین با توجه به (۸) داریم

$$\limsup_{|u| \to 0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leq \frac{p(T+1)^{p-1}\varepsilon}{2^p - LT(T+1)^{p-1}}. \tag{9}$$

بعلاوه، با توجه به (۷) برای هر $u \in X \setminus \{0\}$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{J(u)}{\Phi(u)} &= \frac{\sum_{|u|\le\tau_۲} F(k,u(k))}{\Phi(u)} + \frac{\sum_{|u|>\tau_۲} F(t,u(k))}{\Phi(u)}\\ &\le \frac{\sup_{t\in[۰,T],|u|\in[۰,\tau_۲]} F(t,u)}{\Phi(u)} + \frac{p(T+۱)^{p-۱}\varepsilon \| u \|^p}{۲^p\Phi(u)}\\ &\le \frac{۲\sup_{t\in[۰,T],|u|\in[۰,\tau_۲]} F(t,u)}{\| u \|^p} + \frac{p(T+۱)^{p-۱}\varepsilon}{۲^p - LT(T+۱)^{p-۱}}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\limsup_{\|u\|\to\infty}\frac{J(u)}{\Phi(u)} \le \frac{p(T+۱)^{p-۱}\varepsilon}{۲^p - LT(T+۱)^{p-۱}}. \qquad (۱۰)$$

حال با توجه به (۹) و (۱۰) داریم

$$\rho = \max\left\{۰, \limsup_{\|u\|\to\infty}\frac{J(u)}{\Phi(u)}, \limsup_{u\to۰}\frac{J(u)}{\Phi(u)}\right\} \le \frac{p(T+۱)^{p-۱}\varepsilon}{۲^p - LT(T+۱)^{p-۱}}. \qquad (۱۱)$$

شرط $(\mathcal{A}_۲)$ به همراه (۱۱) نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned}\sigma &= \sup_{u\in\Phi^{-۱}(۰,\infty)}\frac{J(u)}{\Phi(u)} = \sup_{X\setminus\{۰\}}\frac{J(u)}{\Phi(u)} \ge \frac{\sum_{k=۱}^{T} F(k,w(k))}{\Phi(w(t))}\\ &= \frac{p\sum_{k=۱}^{T} F(k,w(k))}{\| w\|^p - p\sum_{k=۱}^{T} H(w(k))} > \frac{p(T+۱)^{p-۱}\varepsilon}{۲^p - LT(T+۱)^{p-۱}} \ge \rho.\end{aligned}$$

بنابراین تمام شرایط قضیه ۲-۱ برقرار است. به‌وضوح $\lambda_۱ = \frac{۱}{\beta}$ و $\lambda_۲ = \frac{۱}{\alpha}$. پس با توجه به قضیه ۲-۱ برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda_۱,\lambda_۲)$، $R>۰$ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته $g:[۱, T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>۰$ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[۰, \gamma]$، مسئله (۱) دارای حداقل سه جواب است که نرمشان در X کمتر از R است.

ملاحظه ۳-۱. اگر برای هر $(k,t)\in[1,\ T]\times\mathbb{R}$، $\lambda f(k,t)+\mu g(k,t)\geq 0$ آنگاه با توجه به لم ۲-۱ و شرط $LT(T+1)^{p-1}<2^{p}$ جواب‌های به‌دست‌آمده از قضیه ۳-۱ نامنفی هستند. در حالت خاص اگر f و g دو تابع نامنفی باشند و $f(k,0)=g(k,0)=0$ ، آنگاه جواب‌های به‌دست‌آمده از قضیه ۳-۱ نامنفی هستند. بعلاوه، اگر برای هر $k\in[1,\ T]$، $f(k,0),g(k,0)\neq 0$ ، جواب‌های به‌دست‌آمده در قضیه ۳-۱ مثبت هستند (ملاحظه ۲-۱ از [۳] را ببینید).

کاربرد دیگر قضیه ۲-۱ به‌صورت زیر است.

قضیه ۳-۲. فرض کنید

$$\max\left\{\limsup_{u\to 0}\frac{\max_{k\in[1,T]}F(k,u(k))}{|u|^{p}},\limsup_{|u|\to\infty}\frac{\max_{k\in[1,T]}F(k,u(k))}{|u|^{p}}\right\}\leq 0,\quad (12)$$

و

$$\sup_{u\in E}\frac{p\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))}{\|u\|^{p}-p\sum_{k=1}^{T}H(u(k))}>0.\qquad (13)$$

آنگاه برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda_1,\infty)$، $R>0$ی با خاصیت زیر وجود دارد:: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته $g:[1,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $\gamma>0$ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[0,\gamma]$ مسئله (۱) دارای حداقل سه جواب در فضای E با نرم کمتر از R است.

اثبات. با توجه به (۱۲)، $\varepsilon>0$ و τ_1,τ_2 با خاصیت $0<\tau_1<\tau_2$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $k\in[1,\ T]$ و برای هر u که $|u|\in[0,\tau_1)\cup(\tau_2,\infty)$،

$$F(k,u)\leq\varepsilon|u|^{p}.$$

ازآنجاکه $F(k,u)$ روی $[0,T]\times\mathbb{R}$ پیوسته است پس‌روی $[0,T]$ کران‌دار است و $|u|\in[\tau_1,\tau_2]$؛ بنابراین ما می‌توانیم $\eta>0$ و $\upsilon>p$ را چنان انتخاب کنیم که برای هر $(t,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}$،

$$F(t,u)\leq\varepsilon|u|^{p}+\eta|u|^{\upsilon}.$$

بنابراین با روند مشابه در اثبات قضیه ۳-۱ روابط (۹) و (۱۰) را داریم. ازآنجاکه ε دلخواه است، با توجه به (۹) و (۱۰) داریم

$$\max\left\{0,\limsup_{\|u\|\to\infty}\frac{J(u)}{\Phi(u)},\limsup_{u\to 0}\frac{J(u)}{\Phi(u)}\right\}\leq 0.$$

پس با نمادگذاری قضیه ۲-۱، $\rho=0$ و با توجه به (۱۳)، $\sigma>0$. در این حالت واضح است که $\lambda_1=\frac{1}{\sigma}$ و $\lambda_2=\infty$؛ بنابراین، با استفاده از قضیه ۲-۱ نتیجه این قضیه به دست می‌آید.

ملاحظه ۳-۱. قضیه ۱-۱ نتیجه فوری قضیه ۳-۲ است.

ملاحظه ۳-۲. در شرط $(\mathcal{A}_2)$ اگر w را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$w(k)=\begin{cases} d, & k\in[1,\ T],\\ 0, & k=0, k=T+1, \end{cases} \tag{۱۴}$$

می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$(\mathcal{A}_2')$ یک ثابت مثبت d وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Big(2+\sum_{k=1}^{T} q_k\Big)d^p - pTH(d)\neq 0$$

و

$$p(T+1)^{p-1}\varepsilon<\frac{\left(2^p-LT(T+1)^{p-1}\right)\sum_{k=1}^{T}F(k,d)}{\Big(2+\sum_{k=1}^{T} q_k\Big)d^p - pTH(d)}.$$

به‌وضوح $w\in X$ و

$$\|w\|^p=\Big(2+\sum_{k=1}^{T} q_k\Big)d^p$$

و با استفاده از (۳) و (۶) داریم

$$\frac{2^p-LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\Big(2+\sum_{k=1}^{T} q_k\Big)d^p\leq\Phi(w)\leq\frac{2^p+LT(T+1)^{p-1}}{p2^p}\Big(2+\sum_{k=1}^{T} q_k\Big)d^p.$$

حال به بیان تعدادی نتایج برای حالتی که متغیرهای تابع f از هم جدا شده‌اند می‌پردازیم. برای این منظور مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -\Delta(\phi_p(\Delta u(k-1)))+q_k\phi_p(u(k))=\lambda\theta_k f(u(k))\\ +\mu g(k,u(k))+h(u(k)), & k\in[1,\ T],\\ u(0)=u(T+1)=0 \end{cases} \tag{۱۵}$$

که در آن $\theta:[1,\ T]\to\mathbb{R}$ یک تابع نامنفی و ناصفر است، برای هر $k\in[1,\ T]$، $\theta_k:=\theta(k)$، $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است و $g:[1,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مانند همان تابع g است که در مسئله (۱) معرفی شد.

برای هر $(k,t)\in[0,\ T]\times\mathbb{R}$ قرار دهید $F(k,t)=\theta_k F(t)$ که در آن برای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$F(t)=\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi .$$

قضایای زیر به ترتیب نتیجه قضیه ۳-۱ و ۳-۲ به همراه ملاحظه ۳-۲ هستند.

قضیه ۳-۳. فرض کنید

$(\mathcal{A}_1')$ یک ثابت $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\max_{k\in[1,T]}\theta_k.\max\left\{\limsup_{u\to 0}\frac{F(u)}{|u|^p},\limsup_{|u|\to\infty}\frac{F(u)}{|u|^p}\right\}<\varepsilon;$$

$(\mathcal{A}_2'')$ یک ثابت مثبت d وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Big(2+\sum_{k=1}^{T}q_k\Big)d^p-pTH(d)\neq 0$$

و

$$p(T+1)^{p-1}\varepsilon<\frac{\Big(2^p-LT(T+1)^{p-1}\Big)F(d)\sum_{k=1}^{T}\theta_k}{\Big(2+\sum_{k=1}^{T}q_k\Big)d^p-pTH(d)}$$

که در آن w در (۱۴) داده شده است.

آنگاه، برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda_3,\lambda_4)$ که در آن λ_3 و λ_4 به ترتیب مانند λ_1 و λ_2 هستند، اما در آن‌ها $\sum_{k=1}^{T}F(k,u(k))$ با $\sum_{k=1}^{T}\theta_k F(u(k))$ جابجا شده است، $R>0$ ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته $g:[1,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>0$ ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[0,\ \gamma]$، مسئله (۱۵) دارای حداقل سه جواب است که نرمشان در E کمتر از R است.

قضیه ۳-۴. فرض کنید ثابت مثبت d وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\Big(2+\sum_{k=1}^{T}q_k\Big)d^p-pTH(d)>0, \tag{16}$$

و

$$\sum_{k=۱}^{T}\theta_k F(w(k)) > ۰ \qquad (۱۷)$$

که در آن w در (۱۴) داده شده است. بعلاوه فرض کنید

$$\limsup_{u\to ۰}\frac{f(u)}{|u|^{p-۱}} = \limsup_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{|u|^{p-۱}} = ۰. \qquad (۱۸)$$

آنگاه برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(\lambda_۳,\infty)$ که در آن $\lambda_۳$ و $\lambda_۴$ به ترتیب مانند $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ هستند، اما در آن‌ها $\sum_{k=۱}^{T}F(k,u(k))$ با $\sum_{k=۱}^{T}\theta_k F(u(k))$ جابجا شده است، $R>۰$ ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع پیوسته $g:[۱,\ T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>۰$ ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[۰,\gamma]$، مسئله (۱۵) دارای حداقل سه جواب است که نرمشان در E کمتر از R است.

اثبات. ملاحظه می‌کنیم که شرط $(\mathcal{A}_۱')$ برای هر $\varepsilon>۰$ به‌سادگی از (۱۷) و (۱۸) به دست می‌آید. بعلاوه، با استفاده از (۱۶) با انتخاب $\varepsilon>۰$ به‌اندازه کافی کوچک، می‌توانیم شرط $(\mathcal{A}_۲'')$ را به دست آوریم؛ بنابراین نتیجه از قضیه ۳-۳ به دست می‌آید.

ملاحظه ۳-۳. ملاحظه می‌کنیم که در نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله ما فقط شرایط جبری روی توابع f و g در نظر گرفته‌ایم. بعلاوه، در نتایج به‌دست‌آمده در فوق ممکن است جواب‌ها بدیهی باشند زیرا مقادیر $f(k,۰)$ و $g(k,۰)$ برای $k\in[۱,\ T]$ نامشخص هستند.

درنهایت ما مثال زیر را برای شفاف‌سازی قضیه ۳-۴ ارائه می‌دهیم.

مثال ۳-۱. فرض کنید $p=۲$ ، $T=۳$ ، $q_k=k$ ، $\theta_k=e^k$ برای $k=۱,۲,۳$ ،

$$f(t)=\begin{cases} t^۲\sin^۲ t, & \text{if } t<۰,\\ \sin^۲ t, & \text{if } t\ge ۰\end{cases}$$

و

$$h(t)=\ln\Big(\sqrt[۴]{\frac{۱}{\cosh t}}\Big) \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

بنابراین f نامنفی است، $L=\frac{۱}{۴}$ و

$$LT(T+۱)^{p-۱}=۳<۲^p=۴$$

با انتخاب $d=۱$،

$$w(k)=\begin{cases}۱, & k=۱,۲,۳,\\ ۰, & k=۰, k=۴.\end{cases}$$

بنابراین برای $k=۰,۱,۲,۳$، $w(k)\geq ۰$،

$$\left(۲+\sum_{k=۱}^{T}q_k\right)d^p-pTH(d)=۸+\frac{۳}{۲}\int_۰^۱\ln\left(\cosh t\right)\mathrm{d}t>۰,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{T}\theta_k F(w(k))\mathrm{d}t &=\int_۰^۱ f(t)\mathrm{d}t+۲\int_۰^۱ f(t)\mathrm{d}t+۳\int_۰^۱ f(t)\mathrm{d}t=۶\int_۰^۱ f(t)\mathrm{d}t\\ &=۶\int_۰^۱\sin^۲(t)\mathrm{d}t=۳(۱-\frac{\sin ۲}{۲})>۰\end{aligned}$$

و

$$\lim_{u\to ۰}\frac{f(u)}{|u|}=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{|u|}=۰.$$

بنابراین، با استفاده از قضیه ۳-۴، برای هر بازه فشرده $[c,d]\subset(۰,\infty)$، $R>۰$ ی با خاصیت زیر وجود دارد: برای هر $\lambda\in[c,d]$ و برای هر تابع نامنفی و پیوسته $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\gamma>۰$ ی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\mu\in[۰,\gamma]$، مسئله

$$\begin{cases}-\Delta^۲(u(k-۱))+ku(k)=\lambda e^k f(u(k))+\mu g(u(k))+\ln\left(\sqrt[۴]{\frac{۱}{\cosh u(k)}}\right), k=۱,۲,۳,\\ u(۰)=u(۴)=۰\end{cases}$$

دارای حداقل سه جواب نامنفی در فضای

$$E_۴=\{u:\{۰,۱,۲,۳,۴\}\to\mathbb{R}:u(۰)=u(۴)=۰\}$$

با نرم کمتر از R است.

۴- نتایج و پیشنهادها.

ما در این مقاله چندگانگی جواب‌های یک مسئله تفاضلی را بر اساس مقادیر مختلف پارامترهای λ و μ ی متعلق به بازه‌های حقیقی یافتیم. روش مورداستفاده در این مقاله، روش تغییراتی و به‌طور دقیق‌تر یک قضیه سه‌نقطه بحرانی است که ما در این مقاله با استفاده از این قضیه، وجود حداقل سه جواب را برای مسئله (۱-۱) به دست آوردیم و با استفاده از شرط نامنفی بودن قسمت‌های غیرخطی، نشان دادیم جواب‌های به‌دست‌آمده نامنفی هستند. درنهایت برای

شفاف‌سازی نتایج مثال ۳-۱ را ارائه دادیم. پیشنهادها زیر برای کارهای تحقیقاتی آتی در این زمینه ارائه می‌گردد:

۱- بررسی چندگانگی جواب‌های مسئله تفاضلی (۱-۱) با استفاده از روش‌هایی مانند روش نقطه ثابت، روش جواب‌های بالایی و پایینی، روش درجه توپولوژیکی و ... .

۲- بررسی چندگانگی جواب‌های مسئله تفاضلی (۱-۱) با مشتقات کسری ([۲۰] را ببینید).

۳- بررسی چندگانگی جواب‌های مسائل تفاضلی مرتبه چهارم.

۴- بررسی چندگانگی جواب‌های مسائل تفاضلی با شرایط مرزی چندنقطه‌ای.

۵- بررسی کاربردهای معادلات تفاضلی در مدل‌سازی‌های پیشرفته ریاضی ([۲۱] را ببینید).

منابع:

[1] Atici, F. M. and Cabada, A. (2003). Existence and uniqueness results for discrete second-order periodic boundary value problems, *Comput. Math. Appl.* **45**, 1417-1427.

[2] Atici, F. M. and Guseinov, G. S. (1999). Positive periodic solutions for nonlinear difference equations with J. periodic coefficients, *Math. Anal. Appl.* **232**, 166-182.

[3] Bonanno, G. and Candito, P. (2009). Infinitely many solutions for a class of discrete non-linear boundary value problems, *Appl. Anal.* **884**, 605-616.

[4] Bonanno, G. and Candito, P. (2009). Nonlinear difference equations investigated via critical point methods, *Nonlinear Anal. TMA* **70**, 3180-3186.

[5] Cabada, A., Iannizzotto, A. and Tersian, S. (2009). Multiple solutions for discrete boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* **356**, 418-428.

[6] Kristaly, A., Mihailescu, M. and Radulescu, V. (2011). Discrete boundary value problems involving oscillatory nonlinearities: small and large solutions, *J. Differ. Equ. Appl.* **17**, 1431-1440.

[7] Mihailescu, M., Radulescu, V. and Tersian, S. (2009). Eigenvalue problems for anisotropic discrete boundary value problems, *J. Differ. Equ. Appl.* **15**, 557-567.

[8] Molica Bisci, G. and Repovs, D. (2014). Existence of solutions for p-Laplacian discrete equations, *Appl. Math. Comput.* **242**, 454-461.

[9] Molica Bisci, G. and Repovs, D. (2013). Nonlinear algebraic systems with discontinuous terms, *J. Math. Anal. Appl.* **398**, 846-856.

[10] Molica Bisci, G. and Repovs, D. (2014). On sequences of solutions for discrete anisotropic equations, *Expo. Math.* **32**, 284-295.

[11] Molica Bisci, G. and Repovs, D. (2013). On some variational algebraic problems, *Adv. Nonlinear Anal.* **2,** 127-146.

[12] Wang, D. B. and Guan, W. (2008). Three positive solutions of boundary value problems for p-Laplacian difference equations, *Comput. Math. Appl.* **55**, 1943-1949.

[13] Wong, P. J. Y. and Xie, L. (2003). Three symmetric solutions of Lidstone boundary value problems for difference and partial difference equations, *Comput. Math. Appl.* **45**, 1445-1460.

[14] Jiang, L. and Zhou, Z. (2008). Three solutions to Dirichlet boundary value problems for p-Laplacian difference equations, *Adv. Diff. Equ.*, 1-10.

[15] Ricceri, B. (2009). A further three critical points theorem, *Nonlinear Anal. TMA* **71**, 4151-4157.

[16] Bohner, M., Heidarkhani, S., Salari, A. and Caristi G. (2017). Existence of three solutions for impulsive multi-point boundary value problems, *Opuscula Math.* **37**(3), 353-379.

[17] Heidarkhani, S., Caristi, G. and Salari, A. (2017). Perturbed Kirchhoff-type p-Laplacian discrete problems, *Collect. Math.* **68**, 401–418.

[18] Heidarkhani, S. and Salari, A. (2017). Existence of three solutions for impulsive perturbed elastic beam fourth-order equations of Kirchhoff-type, *Stud. Sci. Math. Hungarica* **54** (1), 119–140.

[19] Sun, J., Chen, H., Nieto, J.J. and Otero-Novoa M. (2010). The multiplicity of solutions for perturbed second-order Hamiltonian systems with impulsive effects, *Nonlinear Anal. TMA* **72,** 4575-4586.

[20] Haghigh, A., Aghababa, M.P., Asghary, N. and Roohi, M., (2020). A Nonlinear Control Scheme for Stabilization of Fractional Order Dynamical Chaotic Systems, *J. Adv. Math. Model.* **10**, 19-38.

[21] Garshasbi, M. and Reihani, P. (2016). An Iterative Finite Difference Approach with Time Variable Steps for the Numerical Investigation of the Model of Drug Diffusion Through Polymeric Spheres, *J. Adv. Math. Model.* **6**, 15-29.

JAMM
DOI: 0.22055/jamm.2020.30573.1746

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Solutions For Difference Equations Through Variational Methods

Shapour Heidarkhani, Amjad Salari
Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, Iran

Received: August 16 2019 Accepted for publication: June 23 2020
Corresponding author: sh.heidarkhani@razi.ac.ir

Abstract

This paper is devoted to the study of the multiplicity results of solutions for a class of difference equations. Indeed, we will use variational methods for smooth functionals, defined on the reflexive Banach spaces in order to achieve the existence of at least three solutions for the equations. Moreover, assuming that the nonlinear terms are non-negative, we will prove that the solutions are non-negative. Finally, by presenting one example, we will ensure the applicability of our results.

Keywords: Three solutions, Nonlinear difference equations, Discrete boundary value problem, Lipschitz condition, Variational methods, Critical point theory.

Mathematics Subject Classification (2010): 39A05; 34B15.