مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۴۳۸-۴۱۸
شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2020.31100.1760

مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های مستقل و ناهمگن لگ‌لجستیک

فریبا قنبری*، قباد برمال‌زن**، سیدرضا هاشمی*[1]

*گروه آمار، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

**گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۶/۲۵   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۳

چکیده: این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن و مستقل با توزیع لگ‌لجستیک می‌پردازد. با استفاده از مفاهیم بیشاندن، بیشاندن ضعیف از بالا و p -بزرگ‌تر، ترتیب تصادفی معمولی، به بررسی ترتیب نرخ خطر و ترتیب نرخ خطر معکوس بین این‌گونه سیستم‌ها پرداخته شده است. همچنین به مقایسه تصادفی بردار آماره‌های مرتب متشکل از دو نمونه ناهمگن و مستقل از توزیع لگ‌لجستیک پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های سری، سیستم‌های موازی، ترتیب تصادفی، شُور-محدب، شُور-مقعر.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۲۵، ۶۰E۱۵

۱- مقدمه

متغیر تصادفی X توزیع لگ‌لجستیک با پارامترهای α و β است. $\left(X\sim LL(\alpha,\beta)\right)$، هرگاه به ترتیب دارای تابع توزیع و تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$F\left(x;\alpha,\beta\right)=\frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta}+x^{\beta}},\qquad x>\circ,\alpha>\circ,\beta>\circ,$$

۱- آدرس الکترونیک مسئول مقاله: سیدرضا هاشمی، r.hashemi@razi.ac.ir

$$f\left(x;\alpha,\beta\right)=\frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)^{2}},\quad x>0,\alpha>0,\beta>0,$$

در این توزیع، α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل است. توزیع لگ‌لجستیک نقش مهمی را در مبحث تحلیل داده‌های بقا و قابلیت اعتماد ایفا می‌کند. این توزیع در تحلیل داده‌های بقا برای بیماران سرطانی که در ابتدا دارای نرخ خطر صعودی و سپس دارای نرخ خطر نزولی هستند کاربردهای زیادی دارد (بینیت را ببینید [۱]). این توزیع در کارهای اقتصادی به توزیع فایسک [۲] معروف است (به‌عنوان یک مدل برای توزیع درآمد و ثروت در جامعه). همچنین این توزیع در هیدرولوژی برای مدل‌بندی جریان و بارش و در شبکه‌ها به‌عنوان مدل زمان انتقال داده‌ها با توجه به شبکه و نرم‌افزار کاربرد دارد. برای اطلاعات بیشتر در مورد توزیع لگ‌لجستیک و کاربردهای آن، به احمد و همکاران [۳]، رابسون و رید [۴]، جیسکوز [۵]، مراجعه نمایید.

همچنین می‌توان برای مطالعه مقایسه تصادفی لورنس میان آماره‌های مرتب متناظر با متغیرهای تصادفی لگ‌لجستیک و خواص قابلیت اعتماد سیستم‌های متشکل از دو مؤلفه تعویض‌پذیر لگ‌لجستیک به کلیبر [۶] و اریلماز [۷] مراجعه نمود.

یکی از مهم‌ترین اهداف قابلیت اعتماد، تعیین ساختار سیستم‌های پیچیده و افزایش طول عمر سیستم‌ها است. برای این منظور، سیستم‌های متفاوتی در قابلیت اعتماد تعریف شده است که یکی از پرکاربردترین آن‌ها سیستم $(n-k+1)$ از n است. برای فعال بودن این سیستم، فعالیت حداقل $(n-k+1)$ مؤلفه از آن روری است. با این تعریف، سیستم موازی یک سیستم ۱ از n و سیستم سری یک سیستم n از n است. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم و $X_{1:n}\leq\ldots\leq X_{n:n}$ بیانگر آماره‌های مرتب، متناظر با این متغیرهای طول عمر باشند. به‌سادگی می‌توان مشاهده نمود که $X_{k:n}$ بیانگر طول عمر یک سیستم $(n-k+1)$ از nاست. این ارتباط مفید باعث شده است نظریه آماره‌های مرتب در تعیین خواص سیستم‌های $(n-k+1)$ از n به‌طور وسیع، مورداستفاده قرار گیرد. آماره‌های مرتب، در سایر شاخه‌های آمار مانند استنباط آماری، تحلیل بقا، کنترل کیفیت و آزمون‌های طول عمر، نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

محققان زیادی روی مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های مستقل و ناهمگن (غیر هم توزیع) کار کرده‌اند. این مقایسه‌ها برای زمانی که مؤلفه‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کنند به‌طور گسترده موردتوجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است. بسیاری از نتایج به‌دست‌آمده از مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های نمایی، به سایر

توزیع‌ها تعمیم داده شده است. مثلاً خالدی و کوچار [۸]، کوچار و زو [۹ و ۱۰] و فانگ و ژانگ [۱۱] نتایج را به توزیع وایبول، ژائو و بالاکریشنان [۱۲] و بالاکریشنان و ژائو [۱۳] نتایج را برای حالت گاما، بالاکریشنان و همکاران [۱۴] نتایج را برای نمایی تعمیم‌یافته، برمال‌زن و همکاران [۱۵] نتایج را به وایبول-هندسی نمایی شده و برمال‌زن و همکاران [۱۶] نتایج مربوط به مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی را هنگامی‌که طول عمر مؤلفه‌ها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند، تعمیم دادند.

برای مطالعه بیشتر در مورد مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی (کوچک‌ترین یا بزرگ‌ترین آماره مرتب) می‌توان به بشکار و همکاران [۱۷]، حضرا و همکاران [۱۸]، وانگ [۱۹]، بالاکریشنان و همکاران [۲۰]، نادب و ترابی [۲۱]، داس و کایال [۲۲] و [۲۳] مراجعه نمود که کارهای جدیدی در این حوزه هستند.

یکی از توزیع‌های طول عمر معروف در مباحث قابلیت اعتماد، توزیع وایبول است که مقایسه‌های تصادفی زیادی در مورد سیستم‌های $(n-k+1)$ از n متشکل از مؤلفه‌های وایبول انجام شده است (به‌عنوان مثال، بالاکریشنان و همکاران را ببینید [۲۰])؛ اما نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که تابع نرخ خطر توزیع وایبول، تابعی یکنوا است. با توجه به اینکه تابع نرخ خطر متناظر با توزیع لگ لجستیک، تابعی غیر یکنوا است در نتیجه رفتار انعطاف‌پذیرتری دارد و بنابراین با استفاده از مؤلفه‌های لگ لجستیک می‌توان سیستم‌های بیشتری را با یکدیگر مقایسه نمود. همچنین این توزیع می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع وایبول در مباحث مربوط به قابلیت اعتماد، تحلیل بقا و آزمون‌های طول عمر تسریع یافته باشد.

یک خانواده معروف دیگر از توزیع‌های معروف در تحلیل بقا و آمار زیستی، مدل نسبت بخت‌های متناسب[1] است که کاربردهای بسیاری در مسائل پزشکی و مدل‌سازی داده‌های سرطانی دارد. تابع بخت برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(t)$ به‌صورت

$$A(t)=\left(1-F(t)\right)/F(t),$$

تعریف می‌شود. اگر دو متغیر تصادفی X و Y با توابع توزیع به ترتیب $F(t)$ و $G(t)$ باشند و از مدل نسبت بخت‌های متناسب تبعیت کنند آنگاه تابع بخت Y برابر $\alpha A(t)$ است. به‌عبارت‌دیگر، $G(t)=1/\left(\alpha A(t)+1\right)$ با انتخاب $A(t)=t^{-\beta}$ توزیع لگ‌لجستیک حاصل می‌شود؛ بنابراین توزیع لگ‌لجستیک عضو مدل نسبت بخت‌های متناسب است و در نتیجه از اهمیت بسزایی در تحلیل بقا و تحلیل داده‌های پزشکی برخوردار است.

1- Proportional odds ratio model

می‌توان نشان داد که توزیع لگ لجستیک، آمیخته‌ای از توزیع گومپرتز و توزیع گاما با میانگین و واریانس برابر است؛ بنابراین بررسی مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n متشکل از مؤلفه‌های لگ‌لجستیک معادل بررسی مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های متناظر متشکل از آمیخته‌ای از توزیع گومپرتز و توزیع گاما است (الشمرانی و همکاران [۲۴] را ببینید).

با استفاده از نظریه ترتیب تصادفی می‌توان کران‌های بالا و پایین برای مشخصه‌های مهم سیستم‌ها مانند تابع بقا، تابع نرخ خطر و تابع نرخ خطر معکوس و غیره پیدا کرد؛ بنابراین صرف‌نظر از بررسی مقایسه سیستم‌ها، با این روش می‌توان کران‌هایی برای توابع مفید در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا پیدا کرد.

در بخش ۲ مقاله، تعاریف و مفاهیم موردنیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، بیشاندن[۱] و مطالب مرتبط با آن، ارائه شده است. در بخش ۳ نتایج اصلی در قالب دو زیر بخش، بیان شده است: در زیر بخش اول، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع لگ‌لجستیک، انجام شده است و سپس در زیر بخش دوم، به مقایسه تصادفی بردار آماره‌های مرتب متشکل از دو نمونه مستقل ناهمگن از توزیع لگ‌لجستیک پرداخته شده است. سرانجام در انتهای مقاله، بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲- تعاریف و مفاهیم موردنیاز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم موردنیاز بخش های بعد در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار [۲۵]). فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(x)$، توابع توزیع $F(x)=P(X\le x)$ و $G(x)=P(Y\le x)$، توابع بقای $\bar{F}(x)=1-F(x)$ و $\bar{G}(x)=1-G(x)$، توابع نرخ خطر $r_F(x)=f(x)/\bar{F}(x)$، و $r_G(x)=g(x)/\bar{G}(x)$، توابع نرخ خطر معکوس $\tilde{r}_F(x)=f(x)/F(x)$ و $\tilde{r}_G(x)=g(x)/G(x)$ باشند.

الف) X در ترتیب تصادفی معمولی[۲]، بزرگ‌تر از Y است. $(X\ge_{st} Y)$ هرگاه به ازای هر $x\ge 0$، رابطه $\bar{F}(x)\ge\bar{G}(x)$ برقرار باشد.

1- Majorization

2- Usual stochastic order

ب) X در ترتیب نرخ خطر[1]، بزرگ‌تر از Y است. $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه به ازای هر $x \geq 0$ رابطه $r_F(x) \leq r_G(x)$ برقرار باشد.

ج) X در ترتیب نرخ خطر معکوس[2]، بزرگ‌تر از Y است $(X \geq_{rh} Y)$ هرگاه به ازای هر $x \geq 0$ رابطه $\tilde{r}_F(x) \geq \tilde{r}_G(x)$ برقرار باشد.

رابطه زیر بین ترتیب‌های تصادفی فوق، برقرار است:

$$X \geq_{hr} Y \big(X \geq_{rh} Y \big) / \ X \geq_{st} Y.$$

تعریف ۲. فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ و $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ دو بردار تصادفی باشند. X در ترتیب تصادفی چند متغیره معمولی[3]، بزرگ‌تر از Y است، $(X \geq_{st} Y)$ اگر برای هر تابع صعودی $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و با شرط وجود امیدهای ریاضی،

$$E\big(\phi(\boldsymbol{X})\big) \geq E\big(\phi(\boldsymbol{Y})\big)$$

از ترتیب تصادفی چند متغیره معمولی، ترتیب تصادفی معمولی میان مؤلفه‌های متناظر دو بردار نتیجه می‌شود. برای آگاهی بیشتر از جزئیات ترتیب‌های تصادفی یک متغیره و چند متغیره، می‌توان به مولر و استویان [۲۶] و شیکد و شانتیکومار [۲۵] مراجعه نمود.

تعریف ۳. (مارشال و همکاران [۲۷]). فرض کنید $\{x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\}$ و $\{y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}\}$ به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, و $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, باشند.

الف) بردار x به معنای بیشاندن[4] بزرگ‌تر از بردار y است ($x \overset{m}{\succ} y$) هرگاه

$$\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} y_{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} y_{(j)}.$$

ب) بردار x به معنای بیشاندن ضعیف از بالا[5]، بزرگ‌تر از بردار y است. $(x \overset{w}{\succ} y)$، هرگاه

$$\sum_{j=1}^{n} x_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} y_{(j)}.$$

1- Hazard rate order
2- Reversed hazard rate order
3- Usual multivariate stochastic order
4- Majorization
5- Weak supermajorization

ج) بردار x در $\mathbb{R}^+$، p-بزرگ‌تر[1] از بردار y در $\mathbb{R}^+$ است. $\left(x \overset{p}{\succ} y \right)$، هرگاه

$$\prod_{j=1}^{i} x_{(j)} \geq \prod_{j=1}^{i} y_{(j)},\ i = 1,\ldots,n.$$

باید توجه داشت که ترتیب بیشاندن، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا را نتیجه می‌دهد. همچنین برای بردارهای مثبت، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، ترتیب p-بزرگ‌تر را نتیجه می‌دهد. (خالدی و کوچار [۲۸] را ببینید).

تعریف ۴. (مارشال و همکاران، [۲۷]). فرض کنید $\boldsymbol{x} = \left(x_1,\ldots,x_n \right)$ و $\boldsymbol{y} = \left(y_1,\ldots,y_n \right)$ دو بردار باشند. تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شُور-محدب[2]، نامیده می‌شود هرگاه:

$$x \overset{m}{\succ} y \Rightarrow \phi\left(x \right) \geq \phi\left(y \right).$$

همچنین، تابع ϕ شُور-مقعر[3] نامیده می‌شود هرگاه جهت نامساوی فوق، عوض شود.

لم بعدی، شرایط لازم و کافی را برای اینکه تابعی شُور-محدب یا شُور-مقعر باشد فراهم می‌کند.

لم ۱. (مارشال و همکاران [۲۷]) فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز و $\phi :^{n} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ شُور-محدب (شُور-مقعر) نامیده می‌شود اگر و فقط اگر

الف) تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ متقارن باشد.

ب) برای هر $i \neq j$ و هر $z \in \mathbb{I}^n$

$$\left(\mathrm{z_i} - \mathrm{z_j} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{z_i}} \mathbf{z} - \frac{\partial \phi}{\partial_{\mathrm{j}}} \mathbf{z} \geq 0,\ \left(\leq 0 \right),$$

که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{z_i}}$ بیانگر مشتق جزئی تابع ϕ نسبت به مؤلفهi-ام است.

لم ۲. (مارشال و همکاران، [۲۷]). تابع حقیقی مقدار ϕ را روی $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ در نظر بگیرید. آنگاه $x \overset{w}{\succ} y$ نتیجه می‌دهد $\phi\left(\mathrm{x} \right) \geq \phi\left(\mathrm{y} \right)$ اگر و فقط اگر ϕ تابعی نزولی و شُور-محدب روی $\mathbb{A}$ باشد.

1- P-larger
2- Schur-convex
3- Schur-concave

لم ۳. (خالدی و کوچار، [۲۸]). تابع $\psi:\mathbb{R}^{+n} \to \mathbb{R}$ در شرط

$$x \overset{p}{\succ} y \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(y),$$

صدق می‌کند *اگر و فقط اگر*

الف) تابع $\psi\left(e^{a_1},\ldots,e^{a_n}\right)$ شُور-محدب در $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ باشد.

ب) تابع $\psi\left(e^{a_1},\ldots,e^{a_n}\right)$ تابعی نزولی در a_i که در آن $i=1,\ldots,n$ باشد.

۳- نتایج اصلی

۳-۱- مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی

در این زیر بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع لگ‌لجستیک پرداخته می‌شود. نتیجه کلی زیر از پلدگر و پروشان [۲۹]، شرایطی را برای مقایسه تصادفی آماره‌های مرتب متناظر با دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل و ناهمگن، از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی بیان می‌کند.

قضیه ۱. (پلدگر و پروشان، [۲۹]). فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل ناهمگن باشند. به‌طوری‌که

$$X_i \sim \bar{F}(\cdot;\lambda_i), \qquad \lambda_i > 0 \quad , \quad i=1,\ldots,n.$$

همچنین فرض کنید $\left(F(\cdot;\lambda_i)\right)\bar{F}(\cdot;\lambda_i)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $\left(\log F(\cdot;\lambda_i)\right)\log \bar{F}(\cdot;\lambda_i),$ تابعی یکنوا و محدب برحسب λ_i ها باشند آنگاه تابع بقای $X_{k:n}$ تابعی شُور-محدب (شُور-مقعر) در $\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ است.

نتیجه زیر نشان می‌دهد که توزیع لگ‌لجستیک، در شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان سیستم‌های $(n-k+1)$ از n را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی با یکدیگر مقایسه نمود.

فرع ۱. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که

$$X_i \sim LL\left(\alpha_i,\beta\right), \quad Y_i \sim LL\left(\nu_i,\beta\right), \quad i=1,\ldots,n.$$

آنگاه برای $0<\beta \leq 1$ و $k=1,\ldots,n$

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\overset{m}{>}(\nu_1,\ldots,\nu_n)\Rightarrow X_{k:n}\leq_{st}Y_{k:n}.$$

برهان. تابع توزیع متغیر تصادفی لگ‌لجستیک عبارت است از:

$$F(x;\alpha_i,\beta)=\frac{x^{\beta}}{\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}},\ x>0,\alpha>0,\beta>0.$$

همچنین

$$\log F(x;\alpha_i,\beta)=\beta\log x-\log\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right).$$

مشتق جزئی اول $\log F(x;\alpha_i,\beta)$ نسبت به α_i به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\log F(x;\alpha_i,\beta)}{\partial\alpha_i}=-\frac{\beta\alpha_i^{\beta-1}}{\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}},$$

که تابعی نزولی از α_i است. همچنین مشتق جزئی دوم $\log F(x;\alpha_i,\beta)$ نسبت به α_i عبارت است از:

$$\frac{\partial^2\log F(x;\alpha_i,\beta)}{\partial\alpha_i^2}=\frac{-\beta\left\{-\alpha_i^{2\beta-2}+(\beta-1)\alpha_i^{\beta-2}x^{\beta}\right\}}{\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right)^2},$$

که به ازای $0<\beta\leq 1$ مثبت و لذا $\log F(x;\alpha_i,\beta)$ تابعی محدب در α_i است؛ بنابراین نتیجه مطلوب، با استفاده از قضیه ۱ حاصل می‌شود.□

قضیه زیر نشان می‌دهد که فرع ۱ برای کوچک‌ترین آماره مرتب را می‌توان بدون هیچ‌گونه محدودیتی روی β از ترتیب بیشاندن به ترتیب p-بزرگ‌تر تقویت بخشید.

قضیه ۲. *فرض کنید* $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ *دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ لجستیک باشند به‌طوری‌که*

$$X_i\sim LL(\alpha_i,\beta),\quad Y_i\sim LL(\nu_i,\beta),\quad i=1,\ldots,n.$$

در این صورت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\overset{p}{\succ}(\nu_1,\ldots,\nu_n)\Rightarrow X_{1:n}\leq_{st}Y_{1:n}.$$

برهان. تابع بقای کوچک‌ترین آماره مرتب از X به‌صورت زیر است:

$$\bar{F}_{1:n}\left(x;\alpha,\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^{\beta}}{\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}},\ x>0.$$

فرض کنید $b_i=\log\alpha_i$ باشد $\left(i=1,\ldots,n\right)$. بنابراین، تابع بقای کوچک‌ترین آماره مرتب از X را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\beta b_i}}{e^{\beta b_i}+x^{\beta}},\ x>0.$$

برای به دست آوردن نتیجه لازم، کافی است مطابق ۳ نشان داده شود که $\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)$ تابعی صعودی و شُور-مقعر در b_i هستند. مشتق جزئی $\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)$ نسبت به b_i عبارت است از:

$$\frac{\partial\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)}{\partial b_i}=\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)\frac{\beta x^{\beta}}{e^{\beta b_i}+x^{\beta}},$$

که نشان می‌دهد $\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)$ تابعی صعودی از b_i است. اکنون برای $i\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}I&=\left(b_i-b_j\right)\frac{\partial\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)}{\partial b_i}-\frac{\partial\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)}{\partial b_j}\\&=\beta x^{\alpha}\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)\left(b_i-b_j\right)\left(\frac{1}{e^{\beta b_i}+x^{\beta}}-\frac{1}{e^{\beta b_j}+x^{\beta}}\right).\end{aligned}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد $1/\left(e^{\beta b}+x^{\beta}\right)$ تابعی نزولی از b است؛ بنابراین با فرض اینکه $b_i\le b_j$ باشد آنگاه $1/\left(e^{\beta b}+x^{\beta}\right)\ge 1/\left(e^{\beta b_j}+x^{\beta}\right)$ و در نتیجه $I\le 0$ است؛ بنابراین مطابق لم ۱ تابع $\bar{F}_{1:n}\left(x;b,\beta\right)$ تابعی شُور-مقعر در $\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ است.□

تذکر ۱. با استفاده از قضیه ۲ می‌توان یک کران بالا برای تابع بقای یک سیستم سری با مؤلفه‌های ناهمگن و مستقل لگ‌لجستیک، نسبت به تابع بقای متناظر با یک سیستم سری دیگر با مؤلفه‌های همگن و مستقل لگ‌لجستیک پیدا کرد. به‌صورت دقیق‌تر، چون

$$\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)\overset{p}{>}\left(\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_n\right),$$

است که در آن $\tilde{\alpha}$ بیانگر میانگین هندسی α_i است. $\left(\tilde{\alpha}=\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{1/n}\right)$؛ بنابراین یک کران بالا برای تابع بقای سیستم سری مذکور عبارت است از:

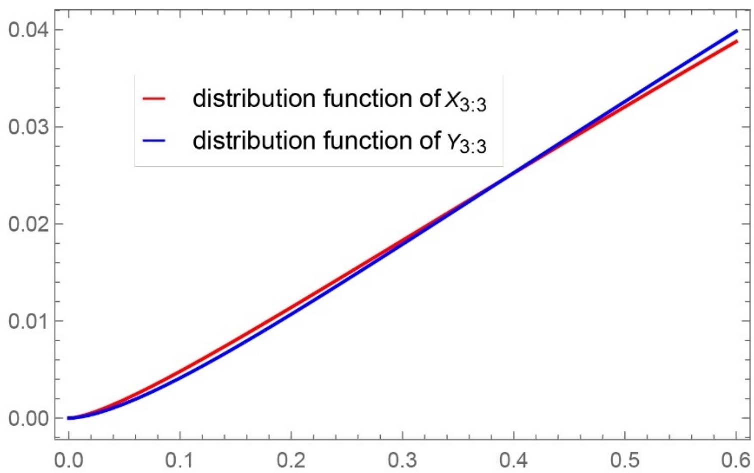
$$\bar{F}_{1:n}(x;\alpha,\beta) \leq \left(\frac{\tilde{\alpha}^{\beta}}{\tilde{\alpha}^{\beta}+x^{\beta}}\right)^{n}, \ x>0.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که نتایج از قضیه ۲ ممکن است برای سایر آماره‌های مرتب ازجمله بزرگ‌ترین آماره مرتب، برقرار نباشد.

مثال ۱. فرض کنید X_1, X_2, X_3 و Y_1, Y_2, Y_3 دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند که در آن

$$X_i \sim LL(\alpha_i, 0/6), \quad Y_i \sim LL(\nu_i, 0/6), \quad i = 1,2,3,$$

هستند. همچنین فرض کنید $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0/03, 4, 7)$ و $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (0/4, 0/6, 12)$، باشند. واضح است که $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \overset{p}{\succ} (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ است. نمودار توابع توزیع مربوط به $X_{3:3}$ و $Y_{3:3}$ در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل (۱): نمودار توابع توزیع مربوط به $X_{3:3}$ و $Y_{3:3}$

واضح است که توابع توزیع $X_{3:3}$ و $Y_{3:3}$ یکدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه نمی‌توان آماره‌های مرتب $X_{3:3}$ و $Y_{3:3}$ را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی با یکدیگر مقایسه نمود.

قضیه ۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که

$$X_i \sim LL(\alpha_i, \beta), \quad Y_i \sim LL(\nu_i, \beta), \quad i = 1, \ldots, n,$$

آنگاه برای $0 < \beta \leq 1$،

$$\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)\overset{w}{\succ}\left(v_1,\ldots,v_n\right)\Rightarrow X_{1:n}\leq_{hr} Y_{1:n}.$$

برهان. تابع نرخ خطر اولین آماره مرتب متناظر با این توزیع عبارت است از:

$$\boldsymbol{r}_{1:\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{x};\alpha,\beta\right)=\beta x^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}}.$$

برای رسیدن به نتیجه مطلوب، طبق لم ۲ کافی است نشان داده شود که $r_{1:n}\left(x;\alpha,\beta\right)$ تابعی نزولی و شُور-محدب برحسب α_i است. مشتق جزئی تابع $r_{1:n}\left(x;\alpha,\beta\right)$ نسبت به α_i به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial r_{1:n}\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha_i}=-\beta^2 x^{\beta-1}\frac{\alpha_i^{\beta-1}}{\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right)^2},$$

که تابعی نزولی از α_i است. اکنون به ازای هر $i\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}J&=\left(\alpha_i-\alpha_j\right)\left(\frac{\partial r_{1:n}\left(x;\boldsymbol{\alpha},\beta\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial r_{1:n}\left(x;\boldsymbol{\alpha},\beta\right)}{\partial\alpha_j}\right)\\&=\beta^2 x^{\beta-1}\left(\alpha_i-\alpha_j\right)\left(\frac{\alpha_j^{\beta-1}}{\left(\alpha_j^{\beta}+x^{\beta}\right)^2}-\frac{\alpha_i^{\beta-1}}{\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right)^2}\right).\end{aligned}\qquad(1)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که به ازای $0<\beta\leq 1$، تابع $\alpha^{\beta-1}/\left(\alpha^{\beta}+x^{\beta}\right)^2$ تابعی نزولی از α است؛ بنابراین طرف دوم رابطه (۱) نامنفی بوده و در نتیجه $r_{1:n}\left(x;\boldsymbol{\alpha},\beta\right)$ تابعی شُور-محدب در α_i است. □

قضیه ۴. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که:

$$X_i\sim LL\left(\alpha_i,\beta\right),\quad Y_i\sim LL\left(v_i,\beta\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

در این صورت برای $0<\beta\leq 1$،

$$\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)\overset{w}{\succ}\left(v_1,\ldots,v_n\right)\Rightarrow X_{n:n}\leq_{rh} Y_{n:n}.$$

برهان. تابع نرخ خطر معکوس بزرگ‌ترین آماره مرتب از X عبارت است از:

$$\tilde{r}_{n:n}=(x;\alpha,\beta)=\frac{n\beta}{x}-\beta x^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}}.$$

برای رسیدن به نتیجه مطلوب، مطابق لم ۲ کافی است نشان داده شود که $\tilde{r}_{n:n}(x;\alpha,\beta)$ تابعی نزولی و شُور-مقعر برحسب α_i است. مشتق جزئی تابع $\tilde{r}_{1:n}(x;\alpha,\beta)$ نسبت به α_i به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\tilde{r}_{n:n}(x;\alpha,\beta)}{\partial\alpha_i}=\beta^{2}x^{\beta-1}\frac{\alpha_i^{\beta-1}}{\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right)^{2}},$$

که تابعی نزولی از α_i است. اکنون به ازای هر $i\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}K&=(\alpha_i-\alpha_j)\left(\frac{\partial\tilde{r}_{n:n}(x)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial\tilde{r}_{n:n}(x;\alpha,\beta)}{\partial\alpha_j}\right)\\&=\beta^{2}x^{\beta-1}(\alpha_i-\alpha_j)\left(\frac{\alpha_i^{\beta-1}}{\left(\alpha_i^{\beta}+x^{\beta}\right)^{2}}-\frac{\alpha_j^{\beta-1}}{\left(\alpha_j^{\beta}+x^{\beta}\right)^{2}}\right).\end{aligned}\tag{2}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که به ازای $0<\beta\leq 1$، تابع $\alpha^{\beta-1}/\left(\alpha^{\beta}+x^{\beta}\right)^{2}$ تابعی نزولی از α است؛ بنابراین طرف دوم رابطه (۲) نامثبت بوده و در نتیجه $\tilde{r}_{n:n}(x;\alpha,\beta)$ تابعی شُور-محدب در α_i است. □

تاکنون ترتیب‌های تصادفی را با شرط روی مقادیر پارامتر مقیاس از توزیع لگ‌لجستیک بررسی کردیم. در ادامه، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی با اعمال محدودیت روی پارامتر شکل، پرداخته می‌شود.

قضیه ۵. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که

$$X_i\sim LL(\alpha,\beta_i),\quad Y_i\sim LL(\alpha,\mu_i),\quad i=1,\ldots,n.$$

در این صورت،

$$(\beta_1,\ldots,\beta_n)\overset{m}{\succ}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\Rightarrow X_{n:n}\geq_{st}Y_{n:n}.$$

برهان. در این حالت، تابع بقای $X_{n:n}$ به‌صورت زیر است:

$$\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)=۱-\prod_{i=۱}^{n}\frac{x^{\beta_i}}{\alpha^{\beta_i}+x^{\beta_i}},$$

برای رسیدن به نتیجه مطلوب، باید نشان داده شود که $\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)$ تابعی شُور-محدب در $\left(\beta_۱,\ldots,\beta_n\right)$ است. مشتق جزئی تابع $\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)$ عبارت است از:

$$\frac{\partial\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial\beta_i}=-F_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)\frac{\alpha^{\beta_i}}{\alpha^{\beta_i}+x^{\beta_i}}\log\left(x/\alpha\right).$$

بنابراین برای هر $i\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}I&=\left(\beta_i-\beta_j\right)\left(\frac{\partial\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial\beta_i}-\frac{\partial\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial\beta_i}\right)\\&=F_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)\left(\beta_i-\beta_j\right)\left(\frac{\alpha^{\beta_j}}{\alpha^{\beta_j}+x^{\beta_j}}\log\left(x/\alpha\right)-\frac{\alpha^{\beta_i}}{\alpha^{\beta_i}+x^{\beta_i}}\log\left(x/\alpha\right)\right)\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که تابع $\frac{\alpha^{\beta}}{\alpha^{\beta}+x^{\beta}}\log\left(x/\alpha\right)$ تابعی نزولی برحسب β است. با استفاده از این نکته، به‌سادگی نتیجه می‌شود $I\geq ۰$ است و لذا اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

تذکر ۲. با استفاده از قضیه ۵ می‌توان یک کران پایین برای تابع بقای یک سیستم موازی با مؤلفه‌های ناهمگن و مستقل لگ‌لجستیک، نسبت به تابع بقای متناظر با یک سیستم موازی دیگر با مؤلفه‌های همگن و مستقل لگ‌لجستیک پیدا کرد. به‌صورت دقیق‌تر، چون

$$\left(\beta_۱,\ldots,\beta_n\right)\overset{m}{\succ}\left(\overline{\beta_۱},\ldots,\overline{\beta_n}\right),$$

است که در آن $\bar{\beta}$ بیانگر میانگین حسابی β_i است، $\left(\bar{\beta}=n^{-۱}\sum_{i=۱}^{n}\beta_i\right)$؛ بنابراین یک کران بالا برای تابع بقای سیستم موازی مذکور عبارت است از:

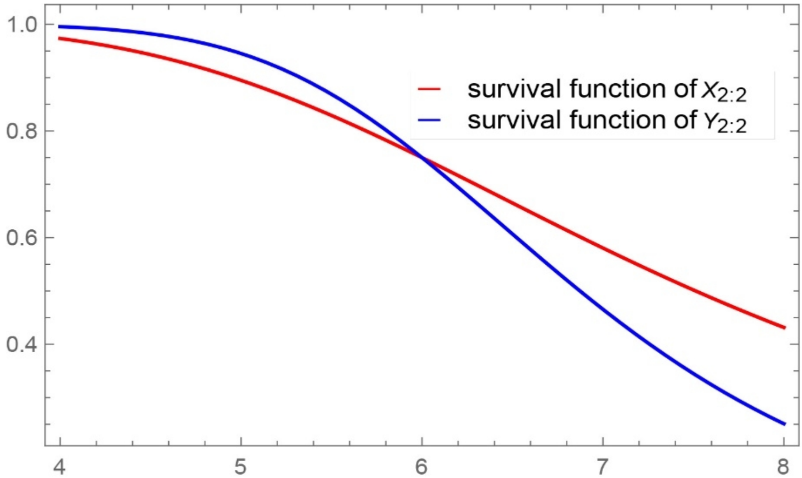
$$\bar{F}_{n:n}\left(x;\alpha,\beta\right)\geq ۱-\left(\frac{x^{\bar{\beta}}}{\alpha^{\bar{\beta}}+x^{\bar{\beta}}}\right)^{n},\qquad x>۰.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که قضیه ۵ را نمی‌توان از ترتیب بیشاندن به ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، تعمیم داد.

مثال ۲. فرض کنید $X_۱,X_۲$ و $Y_۱,Y_۲$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک با

$$X_i \sim LL(۶,\beta_i),\quad Y_i \sim LL(۶,\mu_i) \quad i=۱,۲,$$

باشند. همچنین فرض کنید $(\beta_1,\beta_۲)=(۳,۵)$ و $(\mu_1,\mu_۲)=(۶,۷)$ باشند. بدیهی است $(\beta_۱,\beta_۲)\overset{w}{\succ}(\mu_۱,\mu_۲)$ است. توابع بقای مربوط به $X_{۲:۲}$ و $Y_{۲:۲}$ در شکل نشان داده شده است.



شکل (۲): توابع بقای مربوط به $\boldsymbol{X}_{۲:۲}$ و $\boldsymbol{Y}_{۲:۲}$

واضح است که توابع بقای $X_{۲:۲}$ و $Y_{۲:۲}$ یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا نمی‌توان این متغیرهای تصادفی را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی با توجه به بیشاندن ضعیف از بالا، با یکدیگر مقایسه کرد.

قضیه ۶. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ و $Y_۱,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک با

$$X_i \sim LL(\alpha,\beta_i),\quad Y_i \sim LL(\alpha,\mu_i) \quad i=۱,\ldots,n,$$

باشند. آنگاه

$$(\beta_۱,\ldots,\beta_n)\overset{m}{\succ}(\mu_۱,\ldots,\mu_n)\Rightarrow X_{۱:n}\le_{st} Y_{۱:n}.$$

برهان. اثبات این قضیه، مشابه اثبات قضیه ۵ است و لذا از بیان اثبات خودداری می‌شود.□

تذکر ۳. با استفاده از قضیه ۶ می‌توان یک کران بالا برای تابع بقای یک سیستم موازی با مؤلفه‌های ناهمگن و مستقل لگ‌لجستیک، نسبت به تابع بقای متناظر با یک سیستم سری دیگر با مؤلفه‌های همگن و مستقل لگ‌لجستیک پیدا کرد. به‌صورت دقیق‌تر، چون

$$\left(\beta_{۱},\ldots,\beta_{n}\right)\overset{m}{\succ}\left(\overline{\beta_{۱}},\ldots,\overline{\beta_{n}}\right),$$

است که در آن $\bar{\beta}$ بیانگر میانگین حسابی β_i است $\left(\bar{\beta}=n^{-۱}\sum_{i=۱}^{n}\beta_i\right)$ بنابراین یک کران بالا برای تابع بقای سیستم سری مذکور عبارت است از:

$$\bar{F}_{۱:n}\left(x;\alpha,\beta\right)\leq\left(\frac{\alpha^{\bar{\beta}}}{\alpha^{\bar{\beta}}+x^{\bar{\beta}}}\right)^{n},\qquad x>۰.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که قضیه ۶ را نمی‌توان از ترتیب بیشاندن به ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، تعمیم داد.

مثال ۳. فرض کنید $X_{۱},X_{۲},X_{۳}$ و $Y_{۱},Y_{۲},Y_{۳}$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند که در آن

$$X_i\sim LL\left(۵,\beta_i\right),\quad Y_i\sim LL\left(۵,\mu_i\right),\quad i=۱,۲,۳,$$

هستند. همچنین فرض کنید $\left(\beta_{۱},\beta_{۲},\beta_{۳}\right)=\left(۰/۱,۱,۹\right)$ و $\left(\mu_{۱},\mu_{۲},\mu_{۳}\right)=\left(۰/۲,۴,۶\right)$ باشند. بدیهی است $\left(\beta_{۱},\beta_{۲},\beta_{۳}\right)\overset{w}{\succ}\left(\mu_{۱},\mu_{۲},\mu_{۳}\right)$ است. توابع بقای $X_{۱:۳}$ و $Y_{۱:۳}$ به ازای پارامترهای مذکور عبارتند از:

$$\bar{F}_{۱:۳}\left(۴;\beta\right)=۰/۲۴۷۶۳<۰/۲۸۷۳۰=\bar{F}_{۱:۳}\left(۴;\mu\right)$$

$$\bar{F}_{۱:۳}\left(۵/۰۱;\mu\right)=۰/۱۲۳۷۲<۰/۱۲۳۷۴=\bar{F}_{۱:۳}\left(۵/۰۱;\beta\right)$$

که نشان می‌دهند توابع بقای $X_{۱:۳}$ و $Y_{۱:۳}$ یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا نمی‌توان این متغیرهای تصادفی را از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، با توجه به ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، با یکدیگر مقایسه کرد.

۳-۲- مقایسه تصادفی بردار آماره‌های مرتب متشکل از متغیرهای تصادفی لگ‌لجستیک

در این زیر بخش، به مقایسه تصادفی بین آماره‌های مرتب متشکل از متغیرهای تصادفی لگ‌لجستیک، با استفاده از بیشاندن برداری میان بردار پارامترهای مقیاس پرداخته می‌شود. بدین

منظور، ابتدا لم زیر از هو [۳۰] بیان می‌شود که به مقایسه تصادفی بردار آماره‌های مرتب در خانواده توزیع‌های مقیاس می‌پردازد.

قضیه ۷. (هو، [۳۰]). فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل باشند به‌طوری‌که

$$X_i \sim F\left(\lambda_i x\right), \qquad Y_i \sim F\left(\gamma_i x\right), \qquad i=1,\ldots,n.$$

همچنین فرض کنید F یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته با تابع نرخ خطر r باشد. اگر $r\left(x\right)$ و $xr\left(x\right)$ به ترتیب نزولی و صعودی در $x\in\mathbb{R}^+$ باشند، آنگاه

$$\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\overset{m}{\succ}\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_n\right)\Rightarrow\left(X_{1:n},\ldots,X_{n:n}\right)\geq_{st}\left(Y_{1:n},\ldots,Y_{n:n}\right).$$

اکنون نشان داده می‌شود که توزیع لگ‌لجستیک، در شرایط قضیه ۷ صدق می‌کند که با استفاده از آن بردار آماره‌های مرتب متشکل از دو مجموعه از متغیرهای تصادفی لگ‌لجستیک، در ترتیب تصادفی معمولی با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

فرع ۲. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که

$$X_i \sim LL\left(\alpha_i,\beta\right), \quad Y_i \sim LL\left(\nu_i,\beta\right), \quad i=1,\ldots,n.$$

در این صورت برای $0<\beta\leq 1$،

$$\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right)\overset{m}{\succ}\left(\frac{1}{\nu_1},\ldots,\frac{1}{\nu_n}\right)\Rightarrow\left(X_{1:n},\ldots,X_{n:n}\right)\geq_{st}\left(Y_{1:n},\ldots,Y_{n:n}\right).$$

برهان. تابع نرخ خطر توزیع لگ‌لجستیک عبارت است از:

$$r\left(x\right)=\frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^\beta+x^\beta}.$$

با مشتق گرفتن از $r\left(x\right)$ نسبت به x داریم:

$$\left(r\left(x\right)\right)'\overset{sgn}{=}\left(\beta-1\right)x^{\beta-2}\alpha^\beta-x^{2\beta-2},$$

که برای $0<\beta\leq 1$، تابعی نزولی از x است. باید توجه داشت $a\overset{sgn}{=}b$ به معنای یکسان بودن علامت a و b است. همچنین با مشتق گرفتن از $x\,r\left(x\right)=\beta x^\beta/\left(\alpha^\beta+x^\beta\right)$ نسبت به x داریم:

$$\left(x\, r\left(x\right)\right)' \overset{sgn}{=} \beta\, x^{\beta-1} \alpha^{\beta},$$

که تابعی صعودی از x است؛ بنابراین شرایط قضیه ۷ برقرار است و لذا نتیجه لازم حاصل می‌شود.□

چون ترتیب تصادفی معمولی تحت عمل پیچش، بسته است بنابراین فرع زیر، یک نتیجه مستقیم از فرع ۲ است.

فرع ۳. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل لگ‌لجستیک باشند به‌طوری‌که

$$X_i \sim LL\left(\alpha_i,\beta\right),\quad Y_i \sim LL\left(\nu_i,\beta\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

در این صورت برای $0<\beta\leq 1$،

$$\left(\frac{1}{\alpha_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right) \overset{m}{\succ} \left(\frac{1}{\nu_1},\ldots,\frac{1}{\nu_n}\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i\,.$$

بحث و نتیجه‌گیری

مطالعه مشخصه‌های سیستم‌های $\left(n-k+1\right)$ از n این امکان را در اختیار مهندسین قرار می‌دهد که سیستم‌های پیچیده را با سیستم‌های ساده‌تر تقریب زده و با استفاده از آن‌ها مطالعات فنی و استنباط آماری خود را بر سیستم‌های پیچیده انجام دهند. یکی از روش‌های مفید در این زمینه، نظریه ترتیب‌های تصادفی است. این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های ناهمگن و مستقل با توزیع لگ‌لجستیگ می‌پردازد. با استفاده از مفاهیم بیشاندن، بیشاندن ضعیف از بالا و p -بزرگ‌تر، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نرخ خطر معکوس بین این‌گونه سیستم‌ها بررسی شده است. همچنین به مقایسه تصادفی بردار آماره‌های مرتب متشکل از دو نمونه ناهمگن و مستقل از توزیع لگ‌لجستیک پرداخته شده است.

در بسیاری از مطالعات مربوط به مقایسه‌های تصادفی، توجه محققان به فرض استقلال داده‌ها معطوف است؛ اما در عمل ممکن است که متغیرهای تصادفی، مستقل نباشند و تحت تأثیر عوامل محیطی قرار گیرند؛ بنابراین در نظر گرفتن ساختار وابستگی بین متغیرهای تصادفی معمول‌تر و منطقی‌تر است. لذا مطالعه و بررسی ترتیب‌های تصادفی میان سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های وابسته لگ‌لجستیک، می‌تواند به‌عنوان یک از مسائل تحقیقی با اهمیت در آینده باشد. برای مشاهده جزئیات بیشتر در زمینه مقایسه تصادفی میان سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های وابسته به برمال‌زن و همکاران [۳۱]، مراجعه نمایید.

مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی برای حالتی که ماتریس پارامترها به معنای بیشاندن چندمتغیره تغییر می‌کنند بررسی نشده است و این موضوع می‌تواند یکی دیگر از اهداف مطالعه آینده این پژوهش باشد (برای جزئیات بیشتر در این زمینه نادب و ترابی [۲۱] را ببینید).

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شده است کمال قدردانی و تشکر فراوان را دارند. این تحقیق با حمایت مالی دانشگاه زابل انجام شده است. شماره گرنت: $UOZ-GR-۹۶-۱۸-۱۴$.

منابع

[1] Bennett, S. (1983). Log-logistic regression models for survival data. *Applied Statistics*, **32**, 165-171.

[2] Fisk, P.R. (1961). The graduation of income distributions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **29**, 171-185.

[3] Ahmad, M., Sinclair, C. and Werritty, A. (1988). Log-logistic flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, **98**, 205-224.

[4] Robson, A. and Reed, D. (1999). *Procedures for flood frequency estimation*. **3**, Institute of Hydrology.

[5] Geskus, R.B. (2001). Methods for estimating the aids incubation time distribution when date of seroconversion is censored. *Statistics in Medicine*, **20**, 795-812.

[6] Kleiber, C. (2004). Lorenz ordering of order statistics from log-logistic and related distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **120**, 13-19.

[7] Eryilmaz, S. (2012). Reliability properties of systems with two exchangeable Log-Logistic components. *Communications in Statistics-Theory and methods*, **41**, 3416-342.

[8] Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2006). Weibull Distribution: Some Stochastic Comparisons Results. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3121-3129.

[9] Kochar, S.C. and Xu, M. (2007a). Some Recent Results on Stochastic Comparisons and Dependence among Order Statistics in the case of PHR Model. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **6**, 125-140.

[10] Kochar, S.C. and Xu, M. (2007b). Stochastic Comparisons of Parallel Systems when Components Have Proportional Hazard Rates. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 597-609.

[11] Fang, L. and Zhang, X. (2013). Stochastic Comparison of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

[12] Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011). New Results on Comparisons of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components. *Statistics and Probability Letters*, **81**, 36-44.

[13] Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013). Hazard Rate Comparison of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components. *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 153-160.

[14] Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2015). On Stochastic Comparisons of Systems with Weibull Components. *Journal of Applied Probability*, **55**, 216-232.

[15] Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2017). Orderings for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull-Geometric Components. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9869-9880.

[۱۶] برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴). مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، *مجله علوم آماری*، **۹**، ۲۰۶-۱۸۹.

[17] Bashkar, E., Torabi, H., Roozegar, R. (2017). Stochastic comparisons of extreme order statistics in the heterogeneous exponentiated scale model. *Journal of Statistical Theory and Applications*, **16**, 219-238.

[18] Hazra, N. K., Rani Kuiti, M. Finkelstein, M. and Nanda, A.K. (2017). On stochastic comparisons of maximum order statistics from the location-scale family of distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **160**, 31-41.

[19] Wang, J. (2018). Likelihood ratio ordering of parallel systems with heterogeneous scaled components. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **32**, 460-468.

[20] Balakrishnan, N., Barmalzan, G., Haidari, A. (2018). On stochastic comparisons of k-out-of-n systems with Weibull components. *Journal of Applied Probability*, **55**, 216-232.

[21] Nadeb, H., Torabi, H. (2018). Stochastic comparisons of series systems with independent heterogeneous Lomax exponential components. *Journal of Statistical Theory and Practice*, **12**, 794-812.

[22] Das, S., Kayal, S. (2019a). Ordering extremes of exponentiated location-scale models with dependent and heterogeneous random samples. *Metrika,* doi.org/10.1007/s00184-019-00753-2.

[23] Das, S., Kayal, S. (2019b). Some ordering results for the Marshall and Olkin's family of distributions. *Communications in Mathematics and Statistics,* doi.org/10.1007/s40304-019-00191-6.

[24] Al-Shomrani, A. A., Shawky, A. I., Arif, O.H., Aslam, M. (2016). Log-logistic distribution for survival data analysis using MCMC. *Springer Plus*, **5**, 1774.

[25] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*, Springer, New York.

[26] Müller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. John Wiley & Sons, New York.

[27] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Second edition. Springer Verlag, New York.

[28] Khaledi, B., Kochar, S.C. (2002). Dispersive ordering among linear combinations of uniform random variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **100**, 13-21.

[29] Pledger, P. and Proschan, F. (1971). Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions. In J. S. Rustagi (Ed.), *Optimizing methods in statistics* (pp. 89–113). New York: Academic Press.

[30] Hu, T. (1995). Monotone coupling and stochastic ordering of order statistics. *System Science and Mathematical Science (English Series)*, **8**, 209-214.

[۳۱] برمال‌زن، ق. آیت، س.م.، اکرمی، ع. (۱۳۹۹). مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از مؤلفه‌های لوماکس با مفصل ارشمیدسی، *مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی*، ۱، ۱۹۵-۱۷۲.

JAMM
DOI: 10.22055/JAMM.2020.31100.1760

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Independent and Heterogeneous Log-Logistic Components

Farhad Ghanbari*, Ghobad Barmalzan**, Reza Hashemi*

*Department of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran.

**Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Received: September 16 2019 Accepted for publication: June 23 2020
Corresponding author: r.hashemi@Razi.ac.ir
© 2020 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

This paper examines the problem of stochastic comparisons of series and parallel systems with independent and heterogeneous Log-logistic components. Using concepts of majorizatin, weak supermajorization and p-larger order, we establish usual stochastic order, hazard rate and reversed hazard rate order between these systems. We also discuss the stochastic comparisons of two vector of order statistics arising from two independent and heterogeneous Log-logistic samples.

Keywords: Series systems; Parallel systems; stochastic order; Schur-convex; Schur-concave.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.

© 2020 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).