مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۴۷۲-۴۵۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2020.31804.1784

بررسی مدلی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی با نمای متغیر به‌وسیله روش تغییراتی

سعید شکوه[1]

گروه ریاضی، دانشگاه گنبدکاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۹/۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۲۸

چکیده: خاصیت مویینگی از پدیده‌های مهم فیزیکی ناشی از نیروهای چسبندگی سطحی است. این پدیده را می‌توان به‌طور اجمالی با در نظر گرفتن اثرات دو نیروی مخالف شرح داد. در واقع یکی نیروی چسبندگی، یعنی نیروی جاذب بین مولکول‌های یک مایع و مخازن آن‌ها است و دیگری نیروی پیوستگی، یعنی نیروی جاذب میان مولکول‌های یک مایع است. در این مقاله کلاسی از مسائل مقدار مرزی را که حاصل مدل‌سازی یک پدیده مویینگی است، بررسی می‌کنیم. با استفاده از قضیه سه‌نقطه بحرانی نشان خواهیم داد مدلی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی با نمای متغیر دارای سه جواب ضعیف است. در این روش که مبتنی بر روش تغییراتی است، معادله‌ی دیفرانسیل را با یک عملگر غیرخطی به‌گونه‌ای نظیر می‌کنیم که نقاط بحرانی این عملگر جواب‌های ضعیف از معادله‌ی دیفرانسیل موردنظر باشند. همان‌طور که در بخش بعدی مشاهده می‌شود در معادله دیفرانسیل موردبحث، دو پارامتر کنترلی λ و $\mu \geq 0$ وجود دارد. بازه‌هایی مانند A و B می‌یابیم به‌طوری‌که به ازای $\lambda \in A$ و $\mu \in B$، مسئله ما دارای سه جواب ضعیف کران‌دار در یک فضای سوبولف با نمای متغیر باشد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های غیرخطی، نقاط بحرانی، روش تغییراتی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۵J۳۵، ۳۵J۶۰.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: shokooh@gonbad.ac.ir

۱- مقدمه

مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌ها در فیزیک، مهندسی، زیست‌شناسی، پزشکی و ... به‌طور طبیعی به بررسی معادلات دیفرانسیل منجر می‌شود. به همین دلیل است که نویسنده‌های زیادی در زمینه انواع مختلف معادلات دیفرانسیل پژوهش می‌نمایند. اگر پدیده تنها به یک متغیر وابسته باشد، مدل ریاضی آن یک معادله دیفرانسیل معمولی و اگر به بیش از یک متغیر وابسته باشد، مدل ریاضی آن یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهد بود. مطالعه یک پدیده در دنیای واقعی شامل دو مرحله است. مرحله اول مدل‌سازی مسئله و در واقع تبدیل زبان طبیعت به زبان ریاضی است که علوم مختلف مانند شیمی، فیزیک، مهندسی، ریاضی و ... با توجه به نوع پدیده در این مرحله نقش دارند. مرحله دوم حل معادله تحت شرایط حاکم بر آن است که مباحث گوناگون ریاضی (مانند آنالیز تابعی، آنالیز عددی، آنالیز حقیقی، جبرخطی و هندسه) باعث کشف روش‌های متنوعی در این زمینه شده‌اند. یکی از این روش‌ها، به دست آوردن جواب دقیق معادله است که به روش تحلیلی معروف است. رده‌ی بسیار خاصی از معادلات (مانند معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل و ...) به‌طور تحلیلی و دقیق قابل‌حل هستند و روش‌های تحلیلی در بسیاری از موارد قادر به ارائه جواب‌هایی با فرم بسته و دقیق برای مدل‌های ریاضی نیستند. روش‌های عددی و سری‌های توانی جهت یافتن جواب تقریبی از معادلات دیفرانسیل به‌کار می‌روند. با رشد سریع علم و صنعت در دهه‌های اخیر، روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل موردتوجه قرار گرفتند (به‌عنوان مثال مراجع [۱] و [۲] را مشاهده نمایید). از جمله روش‌های عددی می‌توان به تفاضلات متناهی، طیفی، اجزای متناهی، چندگامی، حجم‌های متناهی و خطوط اشاره کرد. با توجه به اینکه مدل ریاضی اکثر پدیده‌ها، معادلات دیفرانسیل غیرخطی است، به دست آوردن جواب صریح آن‌ها معمولاً امکان‌پذیر نیست. از طرفی اثبات وجود جواب، تجزیه‌وتحلیل کیفی جواب‌ها و بررسی رفتار هندسی و مجانبی جواب‌ها در فضای توابع مناسب، برای این‌گونه معادلات از اهمیت خاصی برخوردار است. امروزه آنالیز غیرخطی و حساب تغییرات یکی از شاخه‌های جذاب و کاربردی جهت بررسی معادلات دیفرانسیل غیرخطی از جنبه‌های فوق است. برخی از معروف‌ترین روش‌های غیرخطی عبارتند از روش‌های توپولوژیکی (مانند نظریه نقطه ثابت، نظریه انشعاب، نظریه درجه و ...)، روش‌های یکنوایی (روش جواب بالایی-پایینی و ...) و روش تغییراتی (لم مسیر کوهی، قضیه نقطه زینی، اصل تغییراتی اکلند و ...). روش ما در این مقاله مبتنی بر یکی از روش‌های تغییراتی به نام قضیه نقطه بحرانی ریچری[۱] است. حل هر معادله‌ی دیفرانسیل با روش‌های فوق زیبایی‌های خود را دارد و تفاوت آن‌ها در فرض‌ها و شرایطی است که در قضیه

1- Ricceri

وجود جواب اعمال می‌شود تا یک مسئله مقدار مرزی یا مقدار اولیه دارای جواب باشد. به‌عنوان مثال در روش جواب بالایی-پایینی باید یک جواب بالایی مانند $v_{\circ}$ و یک جواب پایینی مانند $u_{\circ}$ با شرط $u_{\circ} \leq v_{\circ}$ از معادله دیفرانسیل بیابیم که کاملاً متفاوت از روش مورد استفاده در این مقاله است. یا در لم مسیر کوهی شرطی به نام پالاز-اسمال[1]، به‌صورت زیر است:

شرط پالاز-اسمال: تابعی مانند Φ در این شرط صدق می‌کند هرگاه برای هر دنباله $\{u_n\}$ که دارای شرایط زیر است:

- $\{\Phi(u_n)\}$ کران‌دار باشد،
- $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi'(u_n)\| = \circ$ ،

نتیجه بگیریم زیر دنباله‌ی همگرا دارد. در قضیه نقطه بحرانی ریچری این شرط وجود ندارد.

در قسمت چکیده به اجمال خاصیت مویینگی توضیح داده شد. در واقع به توانایی نفوذ مایعات در فضـای باریک بدون کمک جانبی از پدیده دیگر و برخلاف نیروی گرانش که در محیط خارج وجود دارد، مویینگی می‌گویند. اگر یک لوله باریک شیشه‌ای را در آب قرار دهیم، آب در لوله بالا رفته و سطح آن مقعر خواهد بود که نشان می‌دهد بین مولکول‌های آب و شیشه نیروی چسبندگی قوی‌تر از نیروی پیوستگی مولکول‌های آب است. اگر همین لوله را در جیوه قرار دهیم، جیوه از سطح قبلی خود پایین‌تر رفته و سطح محدب خواهد داشت یعنی نیروی پیوستگی مولکول‌های جیوه قوی‌تر از نیروی چسبندگی سطحی مولکول‌های شیشه و جیوه است. یکی از دلایل بالا رفتن آب و به همراه آن مواد معدنی در گیاه‌ها و درخت‌ها همین اثر مویینگی اســت. هم‌چنین این خاصیت را می‌توان در پد سلولزی، چاپگرهای جوهرافشان، رنگرزی پارچه، پاشش سموم کشاورزی، استحصال روغن از دانه‌های روغنی مشاهده کرد. به همین دلیل پدیده مویینگی از مباحث موردعلاقه در صنعت به‌شمار می‌آید (مراجع [۳-۵] ملاحظه شود). دسته‌ای از معادلات که حاصل از مدل‌سازی یک پدیده مویینگی است، به شکل

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2}}}\right) = f\left(x,u\right), & x\in\Omega, \\ u=\circ, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{۱}$$

اشاره کرد.

1- Palais-Smale

۲- ابزار و مفاهیم پایه

ابزار اصلی ما برای اثبات نتایج، قضیه زیر از پروفسور ریچری [۱۸] است.

قضیه ۱: فرض کنیم X یک فضای باناخ[1] انعکاسی حقیقی و $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد. تابعک $\Phi : X \to \mathbb{R}$ را طوری در نظر می‌گیریم که در شرط‌های زیر صدق نماید:

- نیم‌پیوسته پایینی دنباله‌ای ضعیف و C^{1} باشد،
- روی هر زیر مجموعه کران‌دار از X کران‌دار باشد،
- مشتق آن روی X^* دارای وارون پیوسته باشد.

به‌علاوه فرض کنیم تابعک $J : X \to \mathbb{R}$، C^{1} با مشتق فشرده باشد. اگر

است. مسائلی به این فرم نقش مهمی در هندسه دیفرانسیل و نظریه نسبیت ایفا کرده و در دهه‌ی اخیر وجود و چندگانگی جواب برای آن‌ها، توسط محققین مختلف موردبررسی قرارگرفته است (مراجع [۶-۱۰] را مشاهده نمایید).

در مقاله [۱۰]، نویسنده‌ها وجود جواب‌های مثبت را برای مسئله

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2}}}\right) = \lambda f\left(x,u\right), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲}$$

با مقایسه $F\left(t,\xi\right) := \int_{0}^{\xi} f\left(t,x\right)dx$ و ξ^{2} نزدیک صفر و ξ در بی‌نهایت، بررسی کرده‌اند. در واقع آن‌ها با توجه به حد توابع $\dfrac{F\left(t,\xi\right)}{\xi^{2}}$ در صفر و $\dfrac{F\left(t,\xi\right)}{\xi}$ در بی‌نهایت، وجود و چندگانگی جواب را برای مسئله (۲) اثبات کرده‌اند. در حالت خاص ایشان با استفاده از روش جواب بالایی و پایینی و روش کمینه‌سازی نشان داده‌اند: اگر $\limsup_{\xi \to 0^{+}} \dfrac{F\left(\xi\right)}{\xi^{2}} = +\infty$ و $\liminf_{\xi \to 0^{+}} \dfrac{F\left(\xi\right)}{\xi^{2}} = 0$ باشد، آنگاه به ازای $\lambda > 0$ مسئله (۲) در حالتی که تابع f تفکیک شده است، یک دنباله از جواب‌های ضعیف مثبت دارد.

1- Banach

در این مقاله رده‌ای از معادلات به شکل زیر بررسی می‌شود:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(\left(۱+\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{۱+|\nabla u|^{۲p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-۲}\nabla u\right)+a(x)|u|^{p(x)-۲}u\right. \\ =\lambda f(x,u)+\mu g(x,u), \qquad x\in\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=۰, \qquad x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{۳}$$

که $\Omega\subset\mathbb{R}^N$، $(N\geq ۲)$، دامنه کران‌دار با مرز از کلاس $C^۱$، ν بردار یکه عمود بر $\partial\Omega$، $\lambda,\mu\geq ۰$ است و توابع $a,p\in L^\infty(\Omega)$ به‌گونه‌ای هستند که در شرایط $a^-:=\text{ess inf}_\Omega\, a(x)>۰$ و

$$۲\leq N<p^-:=\text{ess inf}_\Omega\, p(x)\leq p^+:=\text{ess sup}_\Omega\, p(x)<+\infty$$

صادق می‌باشند. هم‌چنین توابع $f,g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت کاراتئودری[۱] هستند. معادلات (۱) و (۲) در فضای سوبولف[۲] $W^{۱,۲}(\Omega)$، موردبررسی قرار گرفته‌اند ولی در این مقاله مسئله (۳) را در فضای سوبولف با نمای متغیر مطالعه خواهیم کرد. در بخش بعدی این فضا را تعریف و خواصی از آن را بیان می‌کنیم. بررسی معادلات دیفرانسیل در فضای سوبولف با نمای متغیر اخیراً موردتوجه ریاضیدان‌های مختلف بوده است که به‌عنوان مثال می‌توان به مقاله‌های [۱۱-۱۷] به ازای هر $\lambda\in I$،

$$\lim_{x\to+\infty}(\Phi(x)+\lambda J(x))=+\infty$$

و $\rho\in\mathbb{R}$ موجود باشد که

$$\sup_{\lambda\in I}\inf_{x\in X}\left(\Phi(x)+\lambda\left(J(x)+\rho\right)\right)<\inf_{x\in X}\sup_{\lambda\in I}\left(\Phi(x)+\lambda\left(J(x)+\rho\right)\right) \tag{۴}$$

در این‌صورت یک مجموعه باز ناتهی $A\subseteq I$ و یک عدد مثبت q با خاصیت زیر وجود دارد:

به ازای $\lambda\in A$ و به‌ازای تابعک $\Psi:X\to\mathbb{R}$ با مشتق فشرده، $\tau>۰$ موجود است که برای هر $\mu\in[۰,\tau]$، معادله $\Phi'(u)+\lambda J'(u)+\mu\Psi'(u)=۰$ دارای سه جواب ضعیف است.■

1- Caratheodory
2- Sobolev

در اثبات نتیجه اصلی از گزاره ذیل نیز استفاده خواهیم نمود که در مقاله [۱۹] توسط پروفسور بونانو[1] اثبات شده است.

گزاره ۱: فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و Φ, J دو تابع روی X باشد. هم‌چنین فرض نماییم به ازای $x \in X$، $\Phi(x) \geq 0$ و $u_0 \in X$ چنان باشد که $\Phi(u_0) = J(u_0) = 0$. به‌علاوه فرض کنیم $u_1 \in X$ و $r > 0$ موجود باشد که

الف) $\Phi(u_1) > r$،

ب) $\sup_{\Phi(x)<r}(-J(x)) < r\dfrac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)}$.

در این‌صورت برای هر $\upsilon > 1$ و برای هر $\rho \in \mathbb{R}$ صادق در

$$\sup_{\Phi(x)<r}(-J(x)) + \frac{r\dfrac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} - \sup_{\Phi(x)<r}(-J(x))}{\upsilon} < \rho < r\frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)},$$

داریم:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \inf_{x \in X} \left(\Phi(x) + \lambda\left(J(x) + \rho\right)\right) < \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in [0,\sigma]} \left(\Phi(x) + \lambda\left(J(x) + \rho\right)\right)$$

که

$$\sigma = \frac{\upsilon r}{r\dfrac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} - \sup_{\Phi(x)<r}(-J(x))}.$$

برای راحتی خواننده‌های محترم، در اینجا مقدماتی از فضاهای سوبولف با نمای متغیر را بیان می‌کنیم. برای جزییات بیشتر مراجع [۲۰-۲۲] را مشاهده فرمایید.

قرار می‌دهیم:

$$C_+(\Omega) := \left\{ h \in C(\overline{\Omega}) : h(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

برای هر $p \in C_+(\Omega)$، تعریف می‌کنیم:

1- Bonanno

$$L^{p(x)}(\Omega):=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{measurable},\ \int_{\Omega}|u(x)|^{p(x)}\,dx<+\infty\right\}.$$

حال نرم زیر را روی فضای $L^{p(x)}(\Omega)$، در نظر می‌گیریم:

$$|u|_{p(x)}=\inf\left\{\beta>0:\int_{\Omega}\left|\frac{u(x)}{\beta}\right|^{p(x)}dx\leq 1\right\}.$$

از مقاله [۲۰]، فضای $\left(L^{p(x)}(\Omega),|u|_{p(x)}\right)$، یک فضای باناخ است که فضای لبگ[1] با نمای متغیر نامیده می‌شود. چون به ازای $x\in\bar{\Omega}$، $1<p(x)<\infty$ است، طبق قضیه ۱.۱۰ از [۲۰]، فضای $L^{p(x)}(\Omega)$ به‌طور یکنواخت محدب و در نتیجه انعکاسی است. فضای سوبولف با نمای متغیر را با نماد $W^{1,p(x)}(\Omega)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^{1,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega):|\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\right\}.$$

این فضا با نرم $\|u\|_{1,p(x)}=|u|_{p(x)}+|u|_{p(x)}$، یک فضای باناخ جدایی‌پذیر انعکاسی است (قضیه ۲.۱ از مرجع [۲۰] را مشاهده نمایید). فرض کنیم $a\in L^{\infty}(\Omega)$ تابعی با شرط $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} a(x)>0$ باشد. در این‌صورت نرم زیر روی فضای $W^{1,p(x)}(\Omega)$ با نرم فوق معادل است (مرجع [۲۲] را ملاحظه نمایید):

$$\|u\|_a=\inf\left\{\beta>0:\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\nabla u(x)}{\beta}\right|^{p(x)}+a(x)\left|\frac{u(x)}{\beta}\right|^{p(x)}\right)dx\leq 1\right\}.$$

فضای $W^{1,p(x)}(\Omega)$ همراه با نرم $\|u\|_{a}$ را در ادامه با X نشان می‌دهیم.

از مراجع [۲۰] و [۲۲]، چون فضای X به‌طور پیوسته در فضای $W^{1,p^-}(\Omega)$ نشانده و از آنجا که $W^{1,p^-}(\Omega)$ به‌طور فشرده در فضای $C^{\circ}(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود، نتیجه می‌گیریم X به‌طور فشرده در $C^{\circ}(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود؛ بنابراین $c>0$ موجود است به‌طوری‌که به ازای $u\in X$،

1- Lebesgue

$\|u\|_{C^{0}(\overline{\Omega})} \le c\|u\|_a$. با توجه به مقاله [۲۳]، وقتی Ω کران‌دار است، می‌توان کران بالای زیر را برای c ارائه داد:

$$c \le 2^{\frac{p^{-}-1}{p^{-}}} \max\left\{ \left(\frac{1}{\|a\|_{L^{1}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{p^{-}}}, \frac{\kappa}{N^{\frac{1}{p^{-}}}} \left(\frac{p^{-}-1}{p^{-}-N} |\Omega| \right)^{\frac{p^{-}-1}{p^{-}}} \frac{\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}}{\|a\|_{L^{1}(\Omega)}} \right\} \left(1+|\Omega|\right)$$

که κ قطر دامنه Ω و $|\Omega|$ اندازه لبگ Ω می‌باشد.

تعریف ۱: تابع $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را کاراتئودری می‌گوییم هرگاه:

الف) تابع $x \to f(x,t)$ به ازای $t\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد،

ب) تابع $t \to f(x,t)$ به ازای $x\in\Omega$ تقریباً همه‌جا پیوسته باشد.

تعریف ۲: یک جواب ضعیف از مسئله (۳)، تابع $u\in X$ است به‌طوری‌که رابطه زیر به ازای $v\in X$ برقرار باشد:

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}} \right) \nabla v\, dx + \int_{\Omega} a(x)|u|^{p(x)-2} u v\, dx$$
$$-\lambda \int_{\Omega} f(x,u) v\, dx - \mu \int_{\Omega} g(x,u) v\, dx = 0.$$

در اینجا می‌خواهیم تابعک‌های $\Phi, J: X\to\mathbb{R}$ را معرفی کنیم که در اثبات قضیه اصلی از آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

ابتدا به ازای $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$F(x,t) := \int_{0}^{t} f(x,\xi)\, d\xi.$$

سپس توابع $\Phi, J: X\to\mathbb{R}$ را به ازای $u\in X$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + \sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}} + a(x)|u|^{p(x)} \right) dx,$$

$$J(u) := -\int_{\Omega} F(x,u(x))\, dx.$$

مشابه روش ارائه‌شده در مقاله [۱۶] می‌توان ثابت کرد توابع فوق دارای مشتق گاتو[1] روی X هستند و مشتق آن‌ها در نقطه $u \in X$، به ازای $v \in X$ برابر است با

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u + \frac{|\nabla u|^{2p(x)-2} \nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}} \right) \nabla v dx + \int_{\Omega} a(x) |u|^{p(x)-2} uv dx$$

و

$$J'(u)(v) = -\int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) dx.$$

لم زیر را از مراجع [۲۰] و [۲۲] جهت راحتی خواننده بیان می‌کنیم و در اثبات نتایج از آن بهره خواهیم برد:

لم ۱: به ازای $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ تعریف می‌کنیم
$\rho_a(u) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)} + a(x) |u|^{p(x)} \right) dx$، در این‌صورت خواهیم داشت:

الف) اگر $\|u\|_a < 1$ باشد، در این‌صورت $\|u\|_a^{p^+} \le \rho_a(u) \le \|u\|_a^{p^-}$،

ب) اگر $\|u\|_a > 1$ باشد، در این‌صورت $\|u\|_a^{p^-} \le \rho_a(u) \le \|u\|_a^{p^+}$.■

۳- نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی و اثبات آن‌ها بیان می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنیم عدد مثبت r و تابع $w \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\Phi(w) > r$،

ب) $\int_{\Omega} \sup_{t \in [-c\eta, c\eta]} F(x,t) dx < r \frac{\int_{\Omega} F(x, w(x)) dx}{\Phi(w(x))}$،

1- Gateaux

پ) $\frac{۱}{\theta} < \frac{۱}{p^+ c^{p^+}} \limsup_{|t|\to+\infty} \frac{F(x,t)}{t^{p^+}}$ به ازای $x \in \Omega$، $t \in \mathbb{R}$ و به ازای θهایی صادق در

$$\theta > \left[r \frac{\int_\Omega F\left(x, w(x)\right)}{\Phi\left(w(x)\right)} - \int_\Omega \sup_{t\in[-c\eta, c\eta]} F(x,t)\,dx \right]^{-۱}.$$

آنگاه بازه باز ناتهی مانند $A \subseteq (۰, r\theta]$ و عدد مثبت q با خاصیت زیر وجود دارند:

به ازای $\lambda \in A$ و تابع کاراتئودری $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $\tau > ۰$ موجود است به‌طوری‌که به ازای $\mu \in [۰, \tau]$، مسئله (۳) دارای سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.

برهان: می‌خواهیم از قضیه (۱) استفاده کرده و موضوع را ثابت نماییم. فضای X و توابع $\Phi, J : X \to \mathbb{R}$ را مانند قبل درنظر می‌گیریم. با توجه به لم (۱)، تابعک Φ روی هر مجموعه کران‌دار از X کران‌دار است زیرا به ازای $u \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_\Omega \frac{۱}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + \sqrt{۱ + |\nabla u|^{۲p(x)}} + a(x)|u|^{p(x)} \right) dx \\
&\le \frac{۱}{p^-} \left[\int_\Omega \left(۱ + ۲|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)} \right) dx \right] \\
&\le \frac{۲}{p^-} \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + a(x)|u|^{p(x)} \right) dx + \operatorname{meas}(\Omega) \right] \\
&\le \frac{۲}{p^-} \left[\max\left\{ \|u\|_a^{p^+}, \|u\|_a^{p^-} \right\} + \operatorname{meas}(\Omega) \right].
\end{aligned}$$

هم‌چنین این تابعک در هر نقطه مانند $u \in X$ مشتق‌پذیر است. در واقع با توجه به تعریف مشتق گاتو، در نقطه دلخواه $u \in X$ و به ازای $v \in X$ داریم:

$$\Phi'(u)(v):=\frac{\partial\Phi(u+hv)}{\partial h}\bigg|_{h=0}=\int_{\Omega}\left|\nabla u+h\nabla v\right|^{p(x)-1}\frac{\nabla u+h\nabla v}{\left|\nabla u+h\nabla v\right|}\nabla v\,dx\bigg|_{h=0}$$
$$+\int_{\Omega}\left(1+\left|\nabla u+h\nabla v\right|^{2p(x)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\nabla u+h\nabla v\right|^{2p(x)-1}\frac{\nabla u+h\nabla v}{\left|\nabla u+h\nabla v\right|}\nabla v\,dx\bigg|_{h=0}$$
$$+\int_{\Omega}a(x)\left|u+hv\right|^{p(x)-1}\frac{u+hv}{\left|u+hv\right|}v\,dx\bigg|_{h=0}$$
$$=\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u+\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)\nabla v dx+\int_{\Omega}a(x)|u|^{p(x)-2}uv dx.$$

با توجه به مراجع [۲۱] و [۲۴]، تابعک Φ نیم‌پیوسته پایینی دنباله‌ای ضعیف و Φ' پیوسته است. حال ثابت می‌کنیم عملگر Φ' دارای وارون پیوسته است و یکی دیگر از شرط‌های قضیه (۱) برقرار خواهد شد. برای این منظور، با توجه به نامساوی زیر از مرجع [۲۲]، نشان می‌دهیم عملگر Φ' اکیداً یکنواست:

$$\left\langle|\xi|^{s-2}\xi-|\eta|^{s-2}\eta,\xi-\eta\right\rangle\geq\frac{1}{2^{s}}|\xi-\eta|^{s},\qquad\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^{N},\ \forall s\geq 2,$$

که $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ضرب داخلی معمولی در $\mathbb{R}^N$ است. چون طبق فرض $p^-\geq N>2$، با توجه به رابطه فوق و لم (۱)، به ازای $u,v\in X$ (که $u\neq v$) نتیجه می‌گیریم:

$$\left\langle\Phi'(u)-\Phi'(v),u-v\right\rangle=\Phi'(u)(u)-\Phi'(v)(u)-\Phi'(u)(v)+\Phi'(v)(v)$$
$$\geq\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u-\left|\nabla v\right|^{p(x)-2}\nabla v\right)(\nabla u-\nabla v)\,dx$$
$$+\int_{\Omega}a(x)\left(\left|u\right|^{p(x)-2}u-\left|v\right|^{p(x)-2}v\right)(u-v)\,dx$$
$$\geq\frac{1}{2^{p^+}}\int_{\Omega}\left(\left|\nabla u-\nabla v\right|^{p(x)}+a(x)\left|u-v\right|^{p(x)}\right)dx$$
$$\geq\frac{1}{2^{p^+}}\min\left\{\|u-v\|_a^{p^+},\|u-v\|_a^{p^-}\right\}.$$

بنابراین عملگر Φ' اکیداً یکنواست. طبق قضیه 26.A(d) از کتاب [۲۲]، وارون عملگر Φ' وجود دارد. اکنون ثابت می‌کنیم $\left(\Phi'\right)^{-1}$ پیوسته است. فرض کنیم $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای به‌طور قوی همگرا به نقطه α در فضای دوگان X (یعنی X^*) باشد. قرار می‌دهیم $\left(\Phi'\right)^{-1}(\alpha_n)=v_n$ و $\left(\Phi'\right)^{-1}(\alpha)=\tilde{v}$ یعنی $\Phi'(v_n)=\alpha_n$ و $\Phi'(\tilde{v})=\alpha$. از رابطه زیر

$$\frac{\Phi'(u)u}{\|u\|_a}\geq\frac{\rho_a(u)}{\|u\|_a}\geq\|u\|_a^{p^--1},\qquad \forall u\in X;\ \|u\|_a>1$$

نتیجه می‌گیریم Φ' اجباری است. پس دنباله $\{v_n\}$ در فضای انعکاسی X کران‌دار است. لذا $\{v_n\}$ دارای یک زیردنباله همگرای ضعیف به نقطه‌ای مانند $\hat{v}$ در X است که آن‌را مجدداً $\{v_n\}$ می‌نامیم. چون $\{\alpha_n\}$ به α همگرا است:

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\Phi'(v_n)-\Phi'(\tilde{v}),v_n-\hat{v}\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle\alpha_n-\alpha,v_n-\hat{v}\right\rangle=0.$$

در نتیجه دنباله $\{v_n\}$ به $\hat{v}$ به‌طور قوی همگراست. با توجه به پیوستگی Φ'، دنباله $\{\Phi'(v_n)\}$ به‌طور قوی به $\Phi'(\hat{v})$ همگرا است. از طرفی $\{\Phi'(v_n)\}$ همگرای قوی به $\Phi'(\tilde{v})$ است، پس باید $\Phi'(\tilde{v})=\Phi'(\hat{v})$. چون تابع Φ' یک‌به‌یک است، نتیجه می‌گیریم $\tilde{v}=\hat{v}$؛ بنابراین دنباله $\left\{\left(\Phi'\right)^{-1}(\alpha_n)\right\}$ به‌طور قوی به $\left(\Phi'\right)^{-1}(\alpha)$ همگرا است؛ یعنی تابع $\left(\Phi'\right)^{-1}$ روی X^* پیوسته است.

حال ثابت می‌کنیم تابعک J در هر نقطه مانند $u\in X$ مشتق‌پذیر است. در واقع با توجه به تعریف مشتق گاتو، در نقطه دلخواه $u\in X$ و به ازای $v\in X$ داریم:

$$J'(u)(v):=\frac{\partial J(u+hv)}{\partial h}\bigg|_{h=0}=-\int_\Omega f(x,u+hv)v\,dx\bigg|_{h=0}=-\int_\Omega f(x,u)v\,dx.$$

اکنون نشان می‌دهیم عملگر $J':X\to X^*$ فشرده است. در واقع کافی است ثابت کنیم این عملگر به‌طور قوی روی X پیوسته است. برای $u\in X$ ثابت، فرض کنیم دنباله‌ی $\{u_n\}$ به u در X همگرای ضعیف باشد. طبق [۲۲]، این دنباله روی Ω به u همگرای یکنواخت است. چون تابع f در شرط کاراتئودری صادق است، پس به ازای $x\in\Omega$ دنباله $\{f(x,u_n)\}$ به $f(x,u)$ همگرا است و در نتیجه دنباله $\{J'(u_n)\}$ به $J'(u)$ روی X به‌طور قوی همگرا می‌شود پس عملگر J' فشرده است.

اکنون ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\Phi(u)+\lambda J(u)\right)=+\infty$. با توجه به فرض (پ) دو ثابت $\gamma,\tau\in\mathbb{R}$ با شرط $\circ<\gamma<\frac{\text{۱}}{\theta}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای $x\in\Omega$ و $t\in\mathbb{R}$،

$$\frac{\text{۱}}{p^+c^{p^+}}F(x,t)<\gamma t^{p^+}+\tau.$$

تابع $u\in X$ را دلخواه درنظر می‌گیریم. آنگاه برای هر $x\in\Omega$،

$$F\left(x,u(x)\right)<p^+c^{p^+}\left(\gamma\left|u(x)\right|^{p^+}+\tau\right)$$

و در نتیجه به ازای $u\in X$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Phi(u)+\lambda J(u)&\geq\frac{\text{۱}}{p^+}\|u\|_a^{p^+}-\left(\frac{\gamma\theta}{p^+}\|u\|_a^{p^+}+\frac{\tau\theta}{p^+}\right)\\&=\frac{\text{۱}}{p^+}\|u\|_a^{p^+}(\text{۱}-\gamma\theta)-\frac{\tau\theta}{p^+}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\Phi(u)+\lambda J(u)\right)=+\infty.$$

حال برقراری شرط (ب) از گزاره (۱) را بررسی می‌کنیم. با توجه به لم (۱) روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned}&\Phi^{-\text{۱}}\left((-\infty,r)\right)=\left\{u\in X:\Phi(u)<r\right\}\\&\subseteq\left\{u\in X:\frac{\text{۱}}{p^+}\min\left\{\|u\|_a^{p^+},\|u\|_a^{p^-}\right\}\leq\Phi(u)<r\right\}\\&\subseteq\left\{u\in X:\|u\|_{C^\circ}<c\eta\right\}.\end{aligned}$$

در نتیجه نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\sup_{u\in\Phi^{-\text{۱}}\left((-\infty,r)\right)}\left(-J(u)\right)\leq\int_\Omega\sup_{t\in[-c\eta,c\eta]}F(x,t)dx.$$

با توجه به فرض (ب) ابتدای قضیه، داریم:

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))} -J(u) < r\frac{\int_{\Omega}F(x,w(x))dx}{\Phi(w(x))}.$$

بنابراین

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))} -J(u) < r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))}.$$

یعنی شرط (ب) از گزاره (۱) برقرار است. هم‌چنین با توجه به فرض (الف) ابتدای قضیه $\Phi(w) > r$ است پس شرط (الف) از گزاره (۱) نیز صادق است. فرض (پ) از قضیه حاضر را به یاد داریم که

$$\theta > \frac{1}{r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))} - \sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))}.$$

قرار می‌دهیم:

$$v = \theta\left(r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))} - \sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))} -J(u)\right),$$

که $v > 1$ است. ازآنجاکه

$$\theta > \frac{1}{r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))} - \sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))},$$

خواهیم داشت:

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u)) + \frac{1}{\theta} < r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))}.$$

در نتیجه با توجه به انتخاب v داریم:

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u)) + \frac{r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))} - \sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))}{v}$$
$$< r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))}.$$

اکنون با توجه به گزاره (۱) (با انتخاب $u_0 = 0$ و $u_1 = w$) به ازای هر $\rho \in \mathbb{R}$ صادق در

$$\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))+\frac{r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))}-\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r))}(-J(u))}{v}$$
$$<\rho<r\frac{-J(w)}{\Phi(w(x))},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\inf_{u\in X}\left(\Phi(u)+\lambda J(u)+\rho\lambda\right)<\inf_{u\in X}\sup_{[\circ,r\theta]}\left(\Phi(u)+\lambda J(u)+\rho\lambda\right).$$

یعنی رابطه (۴) در قضیه (۱) برقرار است. از طرفی به ازای هر تابع کاراتئودری ثابت $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$\Psi(u)=-\int_{\Omega}\int_{\circ}^{u(x)}g(x,s)dsdx.$$

تابع Ψ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است که مشتق آن در نقطه $u\in X$ تابعک $\Psi'(u)\in X^*$ است و به ازای $v\in X$ برابر است با

$$\Psi'(u)(v)=-\int_{\Omega}g(x,u(x))vdx.$$

هم‌چنین تابعک $\Psi':X\to X^*$ عملگر فشرده است. پس همه شرط‌های قضیه (۱) برقرار است و با توجه به اینکه نقاط بحرانی تابعک $\Phi(u)+\lambda J+\mu\Psi$ دقیقاً جواب‌های ضعیف مسئله (۳) است، نتیجه می‌گیریم مسئله (۳) دارای حداقل سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.■

حالت خاص از قضیه (۲)، وقتی تابع f یک متغیره باشد، به‌صورت زیر خواهد بود:

قضیه ۳: فرض کنیم $p(x)=p>N$ و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و به ازای $t\in\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $F(t):=\int_{\circ}^{t}f(\xi)d\xi$. هم‌چنین فرض کنیم عدد مثبت r و تابع $w\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که

الف) $\Phi(w)>r$،

ب) $\sup_{t\in[-c\eta,c\eta]} F(t)|\Omega| < r\dfrac{\int_{\Omega} F(w(x))dx}{\Phi(w(x))}$،

پ) $\dfrac{1}{\theta} > \limsup_{|t|\to+\infty}\dfrac{F(t)}{t^{p}}\dfrac{1}{pc^{p}}$ به ازای $t\in\mathbb{R}$ و به ازای θهایی صادق در

$$\theta > \left[r\frac{\int_{\Omega} F(w(x))dx}{\Phi(w(x))} - \sup_{t\in[-c\eta,c\eta]} F(t)|\Omega|\right]^{-1}.$$

آنگاه بازه باز ناتهی مانند $A\subseteq(0,r\theta]$ و عدد مثبت q با خاصیت زیر وجود دارند:

به ازای $\lambda\in A$ و تابع پیوسته $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\tau>0$ موجود است به‌طوری‌که به ازای $\mu\in[0,\tau]$، مسئله

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(1+\dfrac{|\nabla u|^{p}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p}}}\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+a(x)|u|^{p-2}u \\ \qquad =\lambda f(u)+\mu g(u), \qquad x\in\Omega, \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial v}=0, \qquad x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

دارای سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.■

حالت خاص از قضیه (۲)، وقتی $\mu=0$ است، به‌صورت زیر خواهد بود:

قضیه ۴: فرض کنیم عدد مثبت r و تابع $w\in X$ موجود باشد به‌طوری‌که

الف) $\Phi(w)>r$،

ب) $\int_{\Omega}\sup_{t\in[-c\eta,c\eta]} F(x,t)dx < r\dfrac{\int_{\Omega} F(x,w(x))dx}{\Phi(w(x))}$،

پ) $\dfrac{1}{\theta} > \limsup_{|t|\to+\infty}\dfrac{F(x,t)}{t^{p^{+}}}\dfrac{1}{p^{+}c^{p^{+}}}$ به ازای $x\in\Omega$، $t\in\mathbb{R}$ و به ازای θهایی صادق در

$$\theta > \left[r \frac{\int_\Omega F\left(x,w\left(x\right)\right)}{\Phi\left(w\left(x\right)\right)} - \int_\Omega \sup_{t\in[-c\eta,c\eta]} F\left(x,t\right)dx \right]^{-۱}.$$

آنگاه بازه باز ناتهی مانند $A \subseteq \left(۰, r\theta\right]$ و عدد مثبت q وجود دارند به‌طوری‌که به ازای $\lambda \in A$ مسئله

$$\begin{cases} -div\left(\left(۱+\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{۱+|\nabla u|^{۲p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-۲}\nabla u\right) \\ +a\left(x\right)|u|^{p(x)-۲}u = \lambda f\left(x,u\right), \qquad x \in \Omega, \\ \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = ۰, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

دارای سه جواب ضعیف در X است که نرم آن‌ها از q کمتر است.■

نتیجه‌گیری

رده‌ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی که در این مقاله بررسی شد حاصل مدل‌سازی یک پدیده فیزیکی است. با استفاده از روش تغییراتی و اعمال شرایط کافی ثابت کردیم به ازای بازه‌های مشخص از پارامترها، مسئله مقدار مرزی مطرح شده دارای سه جواب ضعیف در یک فضای سوبولف با نمای متغیر است. در واقع معادله‌ی دیفرانسیل را با یک عملگر غیرخطی مشتق‌پذیر طوری نظیر کردیم که نقاط بحرانی عملگر جواب‌های ضعیف از مسئله باشند. سپس با استفاده از قضیه تغییراتی ریچری تعداد نقاط بحرانی عملگر را به ازای مقادیر مشخص از پارامترهای مسئله به‌دست آوردیم. خواننده‌های محترم می‌توانند از این روش و دیگر قضایای اثبات شده توسط پروفسور ریچری و پروفسور بونانو بهره برده و مسائل متنوعی را حل نمایند.

تقدیر و تشکر

نویسنده از سردبیر محترم و داورهای گرامی که با پیشنهادهای سازنده و نظرات ارزشمندشان زمینه ارائه هرچه بهتر مقاله را مهیا ساختند، کمال تشکر را دارد. هم‌چنین از دانشگاه گنبدکاووس بابت پشتیبانی مالی طرح شماره ۶/۵۱۶ سپاس‌گزار است.

منابع

[1] Ghazanfari, B. and Shahkarami, A. (2015). Meshfree method for solving mathematical fractional order model of capillary formation in tumor angiogenesis, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **5**(1), 1-18.

[2] Shirzadi, A., Ghayedi, S., Safarpoor, M. and Bagheri Bardi, G. (2018), Numerical solutions of a mathematical model of plankton-oxygen dynamics using a meshless method, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **8**(2), 74-93.

[3] Gautam, A. and Jameson, G.J. (2012). The capillary force between a bubble and a cubical particle, *Miner. Eng.*, **36**, 291-299.

[4] Karagiannis, N., Karoglou, M., Bakolas, A. and Moropoulou, A. (2016). Effect of temperature on water capillary rise coefficient of building materials, *Build Environ*, **106**, 402-408.

[5] Jafari, D., Wits, W. and Geurts, B. (2018). Metal 3D-printed wick structures for heat pipe application: Capillary performance analysis, *Appl. Therm. Eng.*, **143**, 403-414.

[6] Bergner, M. (2009). On the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation over general domains, *Differential Geom. Appl.*, **27**, 335-343.

[7] Figueiredo, G.M. and Pimenta, M.T. (2015). Existence and multiplicity of solutions for a prescribed mean-curvature problem with critical growth, *Electron. J. Differential Equations*, **86**, 1-15.

[8] Corsato, C. and Coster, C.D. (2018). A Prescribed anisotropic mean curvature equation modeling the corneal shape: A paradigm of nonlinear analysis, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **11**, 213-256.

[9] Corsato C., Coster, C.D. and Omari P. (2016). The Dirichlet problem for a prescribed anisotropic mean curvature equation: existence, uniqueness and regularity of solutions, J. Differential Equations, 260, 4572–4618.

[10] Obersnel, F. and Omari, P. (2010). Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation, J. Differential Equations, 249, 1674–1725.

[11] Afrouzi, G.A., Zhang, Q. and Hadjian, A. (2014). Multiple solutions for a class of Neumann doubly eigenvalue boundary value systems involving the $\left(p_1(x),\ldots,p_n(x)\right)-$ Laplacian, *RACSAM. REV. R ACAD. A*, **108**, 1055–1064.

[12] Bin, G. (2014). On superlinear $p(x)$ -Laplacian-like problem without Ambrosetti and Rabinowitz condition. *Bull. Korean Math. Soc.*, **51**, 409–421.

[13] Khademloo, S., Afrouzi, G.A. and Norouzi, T. (2018). Infinitely many solutions for anisotropic variable exponent problems, *Complex Var. Elliptic.*, **63**, 1353-1369.

[14] Rasouli, S.H. (2015). On a PDE involving the variable exponent operator with nonlinear boundary conditions, *Mediterr. J.Math.,* **12**, 821-837.

[15] Rasouli, S.H. and Fallah, K. (2017). The Nehari manifold approach for a $p(x)-$ Laplacian problem with nonlinear boundary conditions, *UKR. MATH. J.,* **69**, 111-125.

[16] Rodrigues, M. M. (2012). Multiplicity of solutions on a nonlinear eigenvalue problem for $p(x)-$ Laplacian-like operators, *Mediterr. J.Math.*, **9**, 211-223.

[17] Zhou, Q.M. (2015). On the superlinear problems involving $p(x)-$ Laplacian-like operators without AR-condition, *Nonlinear Anal.,***12**, 161–169.

[18] Ricceri, B. (2009). A three critical points theorem revisited, *Nonlinear Anal.*, **70**, 3084-3089.

[19] Bonanno, G. (2003). Some remarks on a three critical points theorem, Nonlinear Anal., 54, 651-665.

[20] Fan, X.L. and Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ a $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, *J.Math. Anal. Appl.*, **263**, 424-446.

[21] Fan, X.L. and Zhang, Q.H. (2003). Existence of solutions for $p(x)-$ Laplacian Dirichlet problem, *Nonlinear Anal.*, **52**, 1843-1852.

[22] Zeidler, E. (1985). Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vols. II, III, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[23] D’Aguì, G. and Sciammetta, A. (2003). Infinitely many solutions to elliptic problems with variable exponent and nonhomogeneous Neumann conditions, *Nonlinear Anal.*, **52**, 1843-1852.

[24] Lapa, E.C., Rivera, V.P. and Broncano, J.Q. (2015). No-flux boundary problems involving $p(x)-$ Laplacian-like operators, *Electron. J. Differential Equations*, **219**, 1-10.

JAMM
DOI: 10.22055/JAMM.2020.31804.1784

Shahid Chamran University of Ahvaz

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

On a Model of Nonlinear Differential Equations with Variable Exponent by Variational Method

Saeid Shokooh

Department of Mathematics, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran

Received: November 30 2019 Accepted for publication: July 18 2020
Corresponding author: shokooh@gonbad.ac.ir

Abstract

One of the most important physical phenomena caused by surface adhesion forces is capillary property. Capillarity can be briefly explained by considering the effects of two opposing forces: adhesion, i.e. the attractive (or repulsive) force between the molecules of the liquid and those of the container; and cohesion, i.e. the attractive force between the molecules of the liquid. In this paper, we study a class of boundary value problems obtained from a capillary phenomenon modelling. Indeed, using a three critical points theorem, we will prove the existence of three weak solutions for a model of nonlinear differential equations with variable exponent. In this method which is based on the variational method, we correspond the differential equation with a nonlinear operator such that the critical points of this operator are weak solutions to the desired differential equation. As can be seen in the next section, there are two control parameters $\lambda, \mu \geq 0$ in the differential equation. We find intervals like A and B such that for $\lambda \in A$ and $\mu \in B$, our problem has three bounded weak solutions in a Sobolev space with variable exponent.

Keywords: Nonlinear models, Sobolev space with variable exponent, Variational method.

Mathematics Subject Classification (2010): 35J35, 35J60.