مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۱، ص ۱-۱۰

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2021.34921.1852

فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی

معصومه اعتبار، محمدعلی سیاوشی [×]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۶/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۹/۲۳
دبیر مسئول: مهرداد نامداری

چکیده: در این مقاله، برای کاردینال نامتناهی λ، فضاهای λـ نیم‌فشرده که تعمیمی از فضاهای نیم‌فشرده و همچنین فضاهای λ ـ فشرده‌ی قوی که این‌ها نیز تعمیمی از فضاهای به‌طور قوی فشرده هستند، معرفی و مورد مطالعه قرار می‌گیرند. به‌ازای هر کاردینال نامتناهی مانند λ نشان داده شده است که فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قویِ ناگسسته وجود دارند. همچنین ویژگی‌های اساسی این فضاها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: λـ نیم‌فشرده، λـ فشرده‌ی قوی، نیم P_λـ فضا، فضای λـ نیم نرمال.

رده‌بندی ریاضی(۲۰۱۰): 54A08، 54D08، 54C08.

۱ مقدمه

در این بخش مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز را می‌آوریم و از اثبات قضایا و لم‌ها صرف نظر می‌کنیم. مجموعه‌های نیم‌ـ باز، پیش‌باز و نسبتاً پیش‌باز در یک فضای توپولوژی به‌صورت زیر معرفی شده‌اند.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. گوییم A یک مجموعه‌ی

الف. [۱۶] نیم‌ـ باز است، هرگاه $A \subseteq cl(intA)$. به‌علاوه، متمم یک مجموعه‌ی نیم‌ـ باز را یک مجموعه‌ی نیم‌ـ بسته گوییم.
ب. [۱۸] پیش‌باز است، هرگاه $A \subseteq int(clA)$. به‌علاوه، متمم یک مجموعه‌ی پیش‌باز را یک مجموعه‌ی پیش‌بسته می‌نامیم.
پ. [۲۴] نسبتاً پیش‌باز است، هرگاه $int(clA) \neq \emptyset$.

اجتماع هر خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) یک مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) است، اما اشتراک دو مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) لزوماً نیم‌ـ باز (پیش‌باز) نیست. خانواده‌ی تمام مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) در فضای توپولوژی (X,τ) را با $SO(X,\tau)$ $(PO(X,\tau))$ نشان می‌دهیم.

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: m.siavoshi@scu.ac.ir$ (Mohammad Ali Siavoshi), m.etebar@scu.ac.ir (Masoumeh Etebar)

تعریف ۲.۱. [۱، ۶] نیم‌ـ بستار (پیش‌ـ بستار) مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X به صورت اشتراک خانواده‌ی تمام مجموعه‌های نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) شامل A تعریف می‌شود و با $sclA$ $(pclA)$ نمایش داده می‌شود.

مفاهیم فضاهای نیم‌ـ فشرده، نیم‌ـ لیندلوف، به‌طور قوی فشرده و به‌طور قوی لیندلوف با استفاده از مجموعه‌های نیم‌ـ باز و پیش‌باز به‌صورت زیر معرفی شده‌اند.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. گوییم X یک فضای

الف. [۷، ۹] نیم ـ فشرده (نیم ـ لیندلوف) است، هرگاه هر پوشش X متشکل از مجموعه‌های نیم ـ باز دارای زیر پوششی متناهی (شمارش‌پذیر) باشد.

ب. [۱۹] به‌طور قوی فشرده (به‌طور قوی لیندلوف) است، هرگاه هر پوشش X متشکل از مجموعه‌های پیش‌باز دارای زیرپوششی متناهی (شمارش‌پذیر) باشد.

گانستر در [۱۰] برخی از ویژگی‌های فضاهای نیم ـ فشرده و به‌طور قوی فشرده را بیان نمود.

حال به معرفی برخی از اصول تفکیک‌پذیری می‌پردازیم که با استفاده از مجموعه‌های نیم ـ باز و پیش‌باز تعریف می‌شوند، جهت مطالعه‌ی بیش‌تر در این زمینه به [۶، ۱۷، ۲۰] مراجعه شود.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. گوییم X یک فضای

الف. [۱۴، ۱۷] نیم‌ـ T_2 (پیش‌ـT_2) است هرگاه هر دو نقطه‌ی متمایز از X در دو مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) مجزا قرار گیرند.

ب. [۵، ۶] نیم‌ـ منظم (به‌طور قوی pـ منظم) است هرگاه برای هر مجموعه‌ی نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) چون $A \subseteq X$ و هر $x \in X$ که $x \notin A$، مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) و مجزای $U, V \subseteq X$ موجود باشند که $x \in U$ و $A \subseteq V$.

پ. [۲۰، ۲۷] نیم‌ـ نرمال (به‌طور قوی نرمال) است هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) و مجزای $A, B \subseteq X$، مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) و مجزای $U, V \subseteq X$ موجود باشند که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

قضیه ۵.۱. [قضیه ۱.۲، ۵] گزاره‌های زیر در مورد فضای توپولوژی X معادل‌اند.

۱. فضای X نیم‌ـ منظم است.

۲. برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی نیم‌ـ باز $U \subseteq X$ که $x \in U$، مجموعه‌ی نیم‌ـ باز $V \subseteq X$ وجود دارد که $x \in V \subseteq sclV \subseteq U$.

مشابه قضیه ۵.۱، قضیه زیر را به‌راحتی می‌توان اثبات نمود.

قضیه ۶.۱. گزاره‌های زیر در مورد فضای توپولوژی X معادل‌اند.

۱. فضای X به‌طور قوی pـ منظم است.

۲. برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی پیش‌باز $U \subseteq X$ که $x \in U$، مجموعه‌ی پیش‌باز $V \subseteq X$ وجود دارد که $x \in V \subseteq pclV \subseteq U$.

فضای توپولوژی λـ فشرده برای اولین بار توسط کرمزاده و همکارانش در [۱۵] چنین معرفی شد:
فضای توپولوژی X را λـ فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن دارای زیرپوششی با کاردینال کوچکتر از λ باشد که در آن λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این ویژگی است. نویسندگان با معرفی این مفهوم قضیه زیر را تعمیم داده‌اند: "فضای توپولوژی X فشرده است اگر و تنها اگر هر ایدآل در $C(X)$ ثابت باشد" که در آن $C(X)$ حلقه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی فضای X است. همچنین ثابت نموده‌اند که برای هر کاردینال نامتناهی λ یک فضای کاملاً منظم و λـ فشرده وجود دارد. ویژگی‌های این فضاها در [۲۲] توسط نامداری و سیاوشی مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله فضاهای توپولوژی λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی را معرفی و مطالعه می‌کنیم.

در بخش ۲، با ارائه‌ی خواصی با نام‌های C_λ و S_λ در فضاهای توپولوژی، فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی را شناسایی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر کاردینال نامتناهی λ، فضاهای ناگسسته‌ی λـ فشرده‌ی قوِی، به‌طور قوی نرمال و λـ نیم‌فشرده وجود دارند.

در بخش ۳، با استفاده از ویژگی‌های مجموعه‌های نیم‌ـ باز و پیش‌باز و همچنین ارتباط میان این مجموعه‌ها، ویژگی‌های اساسی فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه λـ نیم‌فشردگی و λـ فشردگی قوی یک مجموعه در یک فضای توپولوژی را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که هرگاه X یک فضای توپولوژی باشد و Y در X پیش‌باز (نیم‌ـ باز) باشد، آن‌گاه λـ نیم‌فشردگی

(λـ فشردگی قوی) A در Y و X با هم معادل‌اند. در همین بخش نیم P_λـ فضاها، فضاهای λـ نیم‌نرمال، پیش P_λـ فضاها و فضاهای λـ نرمال قوی را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که هر نیم P_λـ فضای λـ نیم‌فشرده، λـ نیم‌نرمال است. ثابت می‌کنیم که هر فضای نیم‌ـ منظم و λـ نیم‌فشرده، یک فضای λـ نیم‌نرمال است. در ادامه شرایطی را به‌دست می‌آوریم که در آن، اجتماع خانواده‌ای با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های λـ نیم‌فشرده، یک مجموعه‌ی λ ـ نیم‌فشرده باشد. همچنین نتایج مشابهی برای پیش P_λـ فضاها و فضاهای λ ـ نرمال قوی به‌دست می‌آوریم.

۲ λـ نیم‌فشردگی و λـ فشردگی قوی

در این بخش فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی معرفی می‌شوند. سپس برخی از نتایج و قضایای مربوط به فضاهای نیم‌ـ فشرده و به‌طور قوی فشرده به این فضاها تعمیم داده شده است.

تعریف ۱.۲. فضای توپولوژی X را λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) گوییم، هرگاه هر پوشش X متشکل از مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) دارای زیرپوششی با کاردینال کمتر از λ باشد؛ که در آن λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این خاصیت است.

بدیهی است که هر فضای λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) یک فضای βـ فشرده است که $\beta \leq \lambda$.

مانند λـ فشردگی، هر فضای توپولوژی X به ازای کاردینالی مانند μ یک فضای μـ نیم‌فشرده (μـ فشرده‌ی قوی) است. بدیهی است که اگر $|X| < \lambda$، آن‌گاه کاردینال $\mu \leq \lambda$ وجود دارد که X یک فضای μـ نیم‌فشرده (μـ فشرده‌ی قوی) است؛ بنابراین در مطالعه‌ی فضاهای λـ نیم‌فشرده و λـ فشرده‌ی قوی فرض بر این است که $|X| \geq \lambda$.

توجه کنیم که $\aleph_0$ـ نیم‌فشردگی ($\aleph_0$ـ فشردگی قوی) همان نیم‌ـ فشردگی (به‌طور قوی فشردگی) است؛ همچنین فضاهای $\aleph_1$ـ نیم‌فشرده ($\aleph_1$ـ فشرده‌ی قوی) همان فضاهای نیم‌ـ لیندلوفی (به‌طور قوی لیندلوف) هستند که نیم‌ـ فشرده (به‌طور قوی فشرده) نمی‌باشند. مثال زیر نشان می‌دهد که برای هر کاردینال نامتناهی λ یک فضای λـ فشرده‌ی قوی وجود دارد که هاسدورف و به‌طور قوی نرمال است.

مثال ۲.۲. [مثال ۸.۱، ۱۵] فرض کنیم (X, τ) یک فضای گسسته باشد که $|X| > \lambda$ و $a \notin X$. قرار می‌دهیم $X^* = X \cup \{a\}$ و توپولوژی τ^* را روی X^* به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau^* = \tau \cup \{G \subseteq X^* : a \in G, |X^* \backslash G| < \lambda\}$$

در این صورت (X^*, τ^*) یک فضای λـ فشرده و نرمال است و از آنجا که $PO(X^*, \tau^*) = \tau^*$، پس این فضا λـ فشرده‌ی قوی و به‌طور قوی نرمال است.

مثال زیر نشان می‌دهد که برای هر کاردینال نامتناهی λ یک فضای λـ نیم‌فشرده و بدون نقاط منفرد وجود دارد.

مثال ۳.۲. فرض کنیم λ یک کاردینال نامتناهی و X مجموعه‌ای باشد که $|X| = \lambda^+$. قرار می‌دهیم

$$\tau = \{U \subseteq X : \ |X \backslash U| \leq \lambda\}$$

به آسانی می‌توان دید که (X, τ) یک فضای μـ نیم‌فشرده است که $\mu \leq \lambda$. حال نشان می‌دهیم که $\mu = \lambda$. برای این منظور، فرض کنیم $A \subseteq X$ و $|A| = \lambda$. برای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم $U_a = (X \backslash A) \cup \{a\}$. در این صورت خانواده‌ی $\{U_a\}_{a \in A}$ پوششی باز و در نتیجه نیم‌ـ باز برای X است که هیچ زیرپوششی با کاردینال کم‌تر از λ ندارد. بنابراین (X, τ) یک فضای λـ نیم‌فشرده است.

حال خاصیت C_λ در فضاهای توپولوژی را معرفی می‌کنیم؛ که به شناسایی فضاهای توپولوژی λـ فشرده‌ی قوی کمک می‌کند.

تعریف ۴.۲. گوییم فضای توپولوژی X دارای خاصیت C_λ است هرگاه برای هر $A \subseteq X$ که $|A| \geq \lambda$ داشته باشیم $intA \neq \emptyset$.

گزاره‌ی زیر که برخی از معادل‌های خاصیت C_λ در یک فضای توپولوژی را بیان می‌کند، به‌سادگی اثبات می‌شود.

گزاره ۵.۲. گزاره‌های زیر درمورد فضای توپولوژی X معادل‌اند.

۱. فضای X دارای خاصیت C_λ است.

۲. برای هر $A \subseteq X$، اگر $intA = \emptyset$، آن‌گاه $|A| < \lambda$.

۳. $|A \backslash intA| < \lambda$ برای هر $A \subseteq X$.

۴. $|clA \backslash A| < \lambda$ برای هر $A \subseteq X$.

تعریف ۶.۲ فضای X را شبه H_λـ بسته گوییم هرگاه برای هر پوشش باز X چون $\mathfrak{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ مجموعه‌ی $J \subseteq I$ موجود باشد که $|J| < \lambda$، $X = \bigcup_{\alpha \in J} clU_\alpha$ و λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این خاصیت باشد.

قضیه‌ی زیر معادل‌های λـ فشردگی قوی در فضاهای توپولوژی را بیان می‌کند.

قضیه ۷.۲ گزاره‌های زیر برای فضای توپولوژی X معادل‌اند.

۱. فضای X یک فضای λـ فشرده‌ی قوی است.

۲. فضای X یک فضای λـ فشرده و دارای خاصیت C_λ است.

۳. فضای X یک فضای شبه H_λـ بسته و دارای خاصیت C_λ است.

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲. گیریم X یک فضای λـ فشرده‌ی قوی باشد. همچنین فرض کنیم $A \subseteq X$ و $intA = \emptyset$. برای هر $x \in A$ قرار می‌دهیم $V_x = (X \backslash A) \cup \{x\}$. بدیهی است که خانواده‌ی $\{V_x : x \in A\}$ پوشش پیش‌بازی برای X است که بنا به λـ فشردگی قوی X دارای زیرپوششی با کاردینال کم‌تر از λ است. بنابراین $|A| < \lambda$ و بنا به گزاره ۵.۲، X دارای خاصیت C_λ است. بدیهی است که هر فضای λـ فشرده‌ی قوی برای یک $\beta \leq \lambda$، βـ فشرده است. برای اثبات تساوی $\beta = \lambda$، کافی است عکس این گزاره را ثابت کنیم.

۲ $\Leftarrow$ ۱. فرض کنیم $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ یک پوشش پیش‌باز برای X باشد. در این صورت خانواده‌ی $\{int(clV_\alpha) : \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای X است. چون X یک فضای λـ فشرده است، $J \subseteq I$ وجود دارد که $|J| < \lambda$ و $X = \bigcup_{\alpha \in J} int(clV_\alpha)$. بنا به خاصیت C_λ، برای هر $\alpha \in J$ داریم $|clV_\alpha \backslash V_\alpha| < \lambda$ و در نتیجه $|(int(clV_\alpha)) \backslash V_\alpha| < \lambda$. بنابراین $L \subseteq X$ وجود دارد که $|L| < \lambda$ و $X = L \cup (\cup_{\alpha \in J} V_\alpha)$. از آنجا که $|J \cup L| < \lambda$، پس X یک فضای γـ فشرده‌ی قوی است که $\gamma \leq \lambda$. حال بنا به اثبات قسمت «۱ $\Leftarrow$ ۲»، $\gamma = \lambda$ و در نتیجه X یک فضای λـ فشرده‌ی قوی است.

۱ $\Leftarrow$ ۳. بنا به قسمت «۱ $\Leftarrow$ ۲»، اگر X یک فضای λـ فشرده‌ی قوی باشد، آن‌گاه X دارای خاصیت C_λ است. بدیهی که هر فضای λـ فشرده‌ی قوی، شبه H_β ـ بسته است که $\beta \leq \lambda$. برای آن که نشان دهیم $\beta = \lambda$، کافی است که عکس گزاره را ثابت کنیم.

۳ $\Leftarrow$ ۱. فرض کنیم $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ پوششی پیش‌باز برای X باشد. در این صورت خانواده $\{int(clV_\alpha) : \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای X است. از آن‌جا که X یک فضای شبه H_λـ بسته است، $J \subseteq I$ وجود دارد که $|J| < \lambda$ و به‌علاوه، $X = \bigcup_{\alpha \in J} cl(int(clV_\alpha))$. در نتیجه $X = \bigcup_{\alpha \in J} clV_\alpha$؛ زیرا برای هر $\alpha \in J$، مجموعه‌ی V_α پیش‌باز است. حال بنا بر خاصیت C_λ داریم $|clV_\alpha \backslash V_\alpha| < \lambda$ و در نتیجه $X = L \cup (\cup_{\alpha \in J} V_\alpha)$ که در آن $L \subseteq X$ و $|L| < \lambda$. ادامه‌ی برهان مانند برهان قسمت «۲ $\Leftarrow$ ۱» است. $\square$

حال به معرفی خاصیت S_λ می‌پردازیم که در شناسایی فضاهای λـ نیم فشرده مورد نیاز است.

تعریف ۸.۲ گوییم فضای توپولوژی X دارای خاصیت S_λ است هرگاه هر مجموعه‌ی A در X که $|A| \geq \lambda$، نسبتاً پیش‌باز باشد.

بدیهی که خاصیت C_λ قوی‌تر از خاصیت S_λ است، اما این دو یکسان نیستند. به‌عنوان مثال، فضای توپولوژی معرفی شده در مثال ۳.۲ دارای خاصیت S_λ و فاقد خاصیت C_λ می‌باشد. اثبات گزاره‌ی زیر آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۹.۲ گزاره‌های زیر برای فضای X معادل‌اند.

۱. X دارای خاصیت S_λ است.

۲. برای هر $A \subseteq X$، اگر $int(clA) = \emptyset$، آن‌گاه $|A| < \lambda$.

۳. برای هر مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ داریم $|clU \backslash U| < \lambda$.

۴. برای هر $A \subseteq X$ داریم $|clA \backslash int(clA)| < \lambda$.

تعریف ۱۰.۲. فضای توپولوژی X را S_λـ بسته گوییم، اگر برای هر پوشش نیم‌ باز X مانند $\mathfrak{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$، زیر مجموعه‌ای از I مانند J موجود باشد که $|J| < \lambda$ و $X = \bigcup_{\alpha\in J} clU_\alpha$؛ همچنین λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این ویژگی باشد.

اثبات قضیه‌ی زیر مشابه اثبات قضیه ۷.۲ است و به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۱۱.۲. فضای توپولوژی X یک λـ نیم فشرده است اگر و تنها اگر S_λـ بسته و دارای خاصیت S_λ باشد.

۳ ویژگی‌های اساسی فضاهای λ ـ نیم‌فشرده و λ ـ فشرده‌ی قوی

در این بخش ویژگی‌های اساسی فضاهای λ ـ نیم‌فشرده و λ ـ فشرده‌ی قوی مورد بررسی قرار می‌گیرند. برخی از این ویژگی‌ها مشابه λـ فشردگی است.

تعریف ۱.۳. [تعریف ۸.۳ ، ۱۶] گوییم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های فضای X دارای خاصیت λـ اشتراک است، اگر هر زیرخانواده‌ی آن با کاردینال کم‌تر از λ دارای اشتراک ناتهی باشد.

قضیه ۲.۳. فضای توپولوژی X، λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) است اگر و تنها اگر هر خانواده از مجموعه‌های نیم‌ بسته (پیش‌بسته) با خاصیت λـ اشتراک، دارای اشتراک ناتهی باشد و λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این ویژگی باشد.

اثبات. مشابه لم ۹.۳ در [۲۲] اثبات می‌شود. □

نقاط نیم‌ حدی و پیش‌حدی یک مجموعه در یک فضای توپولوژی مشابه نقاط حدی آن و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۳. [۴، ۱۳] نقطه‌ی x در فضای توپولوژی X یک نقطه‌ی نیم‌ حدی (پیش‌ حدی) $A \subseteq X$ است، اگر برای هر مجموعه‌ی نیم‌ باز (پیش‌باز) G در X شامل x داشته باشیم $G \cap (A\backslash\{x\}) \neq \emptyset$.

مشابه گزاره‌ی ۳.۲ در [۲۲]، گزاره‌ی زیر را می‌توان به سادگی اثبات نمود.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم X یک فضای λـ نیم فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) باشد و $Y \subseteq X$. در این صورت اگر $|Y| \geq \lambda$، آن‌گاه Y دارای یک نقطه‌ی نیم‌ حدی (پیش‌ حدی) در X است.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. گوییم A یک مجموعه‌ی
الف. [۳، ۲۶] نیم‌ فشرده (نیم‌ لیندلوف) نسبت به X است، درصورتی که هر پوشش A با مجموعه‌های نیم‌ باز در X دارای زیرپوششی متناهی (شمارا) باشد.
ب. [۱۲، ۱۹] به‌طور قوی فشرده (به‌طور قوی لیندلوف) نسبت به X است، درصورتی که هر پوشش A با مجموعه‌های پیش‌باز در X دارای زیرپوششی متناهی (شمارا) باشد.

بر این اساس، مفاهیم زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. گوییم A در X یک λ ـ نیم فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) است هرگاه هر پوشش A با مجموعه‌های نیم‌ باز (پیش‌باز) در X دارای زیرپوششی با کاردینال کم‌تر از λ باشد؛ که در آن λ کوچک‌ترین کاردینال نامتناهی با این ویژگی است.

حال می‌خواهیم شرایطی را به‌دست آوریم که در آن، λـ نیم‌فشردگی (λـ فشردگی قوی) مجموعه‌ی A در فضای X با λـ نیم فشردگی (λـ فشردگی قوی) A معادل باشد. برای این منظور، به مطالب زیر نیاز داریم.

گزاره ۷.۳. [گزاره ۲.۱ ، ۲۰] فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ پیش‌باز باشد. در این صورت $A \subseteq Y$ در Y نیم‌ باز است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نیم‌ باز S در X موجود باشد که $A = S \cap Y$.

لم ۸.۳. [لم ۱.۲ ، ۲۲] فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ نیم‌ باز باشد. اگر P مجموعه‌ای پیش‌باز در X باشد، آن‌گاه $P \cap Y$ در Y پیش‌باز است.

گزاره ۹.۳. [گزاره ۱.۲ ، ۲۳] مجموعه‌ی A در فضای X پیش‌باز است اگر و تنها اگر A به‌صورت اشتراکی از یک مجموعه‌ی باز و یک مجموعه‌ی چگال باشد.

گزاره‌ی زیر با استفاده از لم ۸.۳ و گزاره ۹.۳ به‌سادگی اثبات می‌شود.

گزاره ۱۰.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ نیم‌ـ باز باشد. در این صورت $A \subseteq Y$ در Y پیش‌باز است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی پیش‌باز P در X موجود باشد که $A = P \cap Y$.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ پیش‌باز (نیم‌ـ باز) باشد. در این صورت $A \subseteq Y$ در X یک λـ نیم فشرده (λـ فشرده قوی) است اگر و تنها اگر A در Y، λـ نیم فشرد ه (λـ فشرده قوی) باشد.

اثبات. قضیه را برای حالت λـ نیم فشردگی اثبات می‌کنیم. در مورد λـ فشردگی قوی، اثبات به‌صورت مشابه است. فرض کنیم A در X یک λـ نیم فشرده باشد و $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$، که هر S_α در Y نیم‌ـ باز است. بنا به گزاره‌ی ۷.۳، برای هر $\alpha \in I$ مجموعه‌ی نیم‌ـ باز S'_α در X وجود دارد که $S_\alpha = S'_\alpha \cap Y$. حال خانواده‌ی $\{S'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A متشکل از مجموعه‌های نیم‌ـ باز در X است که بنا به λـ نیم فشردگی A در X یک $J \subseteq I$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $|J| < \lambda$ و $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} S'_\alpha$. بنابراین A در Y یک βـ نیم فشرده است که $\beta \leq \lambda$. برای این که نشان دهیم $\beta = \lambda$، کافی است قسمت عکس را اثبات کنیم. برای این منظور نیز فرض کنیم A در Y یک λـ نیم فشرده باشد و $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$، که هر S_α در X نیم‌ـ باز است. بنا به گزاره‌ی ۷.۳، خانواده‌ی $\{S_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A از مجموعه‌های نیم‌ـ باز در Y است. با توجه به فرض، $J \subseteq I$ وجود دارد که $|J| < \lambda$ و $A \subseteq (\bigcup_{\alpha\in J} S_\alpha) \cap Y$. درنتیجه، A یک مجموعه‌ی β ـ نیم‌فشرده در X است که $\beta \leq \lambda$. از طرفی بنا به اثبات قسمت لزوم، A در Y یک γـ نیم‌فشرده است که $\gamma \leq \beta$ و از آن‌جا که بنا به فرض، $\gamma = \lambda$، پس نتیجه می‌گیریم که $\beta = \lambda$. □

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ پیش‌باز (نیم‌ـ باز) باشد. در این صورت A یک زیرفضای λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) از X است اگر و تنها اگر A در X یک λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) باشد.

نتیجه ۱۳.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq B \subseteq X$ باشد به‌طوری که A و B در X پیش‌باز (نیم‌ـ باز) هستند. در این صورت A یک زیرفضای λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) از B است اگر و تنها اگر A یک زیرفضای λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) از X باشد.

گزاره‌ی بعد ارتباط میان برخی از صورت‌های تعمیم یافته‌ی نگاشت‌های پیوسته و همسان‌ریختی‌ها را با λـ نیم‌فشردگی و λـ فشردگی قوی بیان می‌کند. قبل از بیان آن به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱۴.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند و $f : X \to Y$ یک نگاشت باشد. گوییم f یک نگاشت

الف. [۲، ۲۵] مردد (پیش‌مردد) است، هرگاه برای هر مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) V در Y، $f^{-1}(V)$ در X نیم‌ـ باز (پیش‌باز) باشد.

ب. [۱، ۲۰] نیم‌ـ همسان‌ریختی (پیش‌همسان‌ریختی) است هرگاه f دوسویی و مردد (پیش‌مردد) باشد و همچنین تصویر هر مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) در X، یک مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) در Y باشد.

گزاره‌ی زیر را مشابه گزاره ۱۰.۲ در [۲۶] می‌توان اثبات نمود.

گزاره ۱۵.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی، $A \subseteq X$ و $f : X \to Y$ یک نگاشت باشد. گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. اگر f مردد (پیش مردد) و A در X یک λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) باشد، آن‌گاه $f(A)$ در Y یک βـ نیم‌فشرده (βـ فشرده‌ی قوی) است که $\beta \leq \lambda$.

۲. اگر f یک نیم‌ـ همسان‌ریختی (پیش‌ـ همسان‌ریختی) و A در X یک λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) باشد، آن‌گاه $f(A)$ در Y یک λـ نیم‌فشرده (λـ فشرده‌ی قوی) است.

گزاره‌ی زیر مشابه گزاره ۶.۲ در [۲۲] اثبات می‌شود.

گزاره ۱۶.۳. هر زیرمجموعه‌ی نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) از فضای λـ نیم‌فشرده‌ی (λـ فشرده‌ی قوی) X در X یک βـ نیم‌فشرده (βـ فشرده‌ی قوی) است که $\beta \leq \lambda$.

با توجه به لم ۱۵.۵.۱ در [۸]، تعریف فضای نرمال به‌صورت زیر تعمیم داده شده می‌شود.

تعریف ۱۷.۳. [۵.۲ ، ۱۶] فضای توپولوژی X یک فضای λـ نرمال نامیده می‌شود، درصورتی که برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی F و هر مجموعه‌ی باز W در X شامل F، خانواده‌ی $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ با کاردینال کم‌تر از λ ومتشکل از مجموعه‌های باز X موجود باشد که برای هر $\alpha \in I$، داشته باشیم $clW_\alpha \subseteq W$ و $F \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} W_\alpha$.

بر این اساس، فضاهای λـ نیم‌نرمال و λـ نرمال قوی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۸.۳. فضای توپولوژی X را λـ نیم‌نرمال (λـ نرمال قوی) گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) چون F و هر مجموعه‌ی نیم‌ـ باز (پیش‌باز) W در X شامل F، خانواده‌ی $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش‌باز) در X موجود باشد به‌قسمی که برای هر $\alpha\in I$، داشته باشیم $sclW_\alpha\subseteq W$ ($pclW_\alpha\subseteq W$) و $F\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}W_\alpha$.

تذکر ۱۹.۳. در نتیجه‌ی پس از گزاره ۷ در [۲۳] ثابت می‌شود که برای فضای توپولوژی (X,τ)، خانواده‌ی $SO(X,\tau)$ یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر (X,τ) ناهمبند شدید باشد (فضای X ناهمبند شدید نام دارد، هرگاه بستار هر مجموعه‌ی باز در X باز باشد). همچنین بنا به گزاره ۴.۴ در [۱۱]، $PO(X,\tau)$ یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر اشتراک هر دو مجموعه‌ی چگال در (X,τ)، پیش‌باز باشد. با استفاده از این گزاره‌ها، مشابه قضیه ۱۵.۵.۱ در [۸] می‌توان نشان داد که در صورتی که X ناهمبند شدید باشد (اشتراک هر دو مجموعه‌ی چگال در X، پیش باز باشد)، X یک فضای $\aleph_1$ـ نیم‌نرمال ($\aleph_1$ـ نرمال قوی) است اگر و تنها اگر نیم‌ـ نرمال (به‌طور قوی نرمال) باشد. همچنین به‌سادگی و با استفاده از قضایای ۵.۱ و ۶.۱ می‌توان دید که هر فضای نیم‌ـ منظم (به‌طور قوی pـ منظم) X که $|SO(X,\tau)|<\lambda$ ($|PO(X,\tau)|<\lambda$)، یک فضای λـ نیم‌نرمال (λـ نرمال قوی) است.

قضیه ۲۰.۳. هر فضای نیم‌ـ منظم و λـ نیم‌فشرده (به‌طور قوی pـ منظم و λـ فشرده‌ی قوی) یک فضای λـ نیم‌نرمال (λـ نرمال قوی) است.

اثبات. فرض کنیم F مجموعه‌ای نیم‌ـ بسته و W مجموعه‌ی نیم‌ـ بازی شامل F در X باشد. بنا به قضیه ۵.۱، برای هر $x\in F$ مجموعه‌ی نیم‌ـ باز W_x وجود دارد که $x\in W_x\subseteq sclW_x\subseteq W$. حال خانواده‌ی $\{W_x\}_{x\in F}$ پوششی از مجموعه‌های نیم‌ـ باز در X برای F است و بنابر گزاره‌ی ۱۶.۳، $I\subseteq F$ وجود دارد که $|I|<\beta$ و $F\subseteq\bigcup_{x\in I}W_x$؛ یعنی، X یک فضای λـ نیم‌نرمال است. حالت دوم قضیه به‌صورت مشابه اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۲۱.۳. [تعریف۱۰.۲، ۱۶] اشتراک خانواده‌ای با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های باز در یک فضای توپولوژی را یک G_λـ مجموعه می‌نامیم. به‌علاوه، فضای توپولوژی X را یک P_λـ فضا گوییم، هرگاه هر G_λ ـ مجموعه در X باز باشد.

مشابه تعریف ۲۱.۳، نیم P_λـ فضاها و پیش P_λـ فضاها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۲.۳. الف) اشتراک خانواده‌ی G با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های نیم‌ـ باز (پیش باز) در فضای توپولوژی X را یک $G_{\lambda s}$ـ مجموعه ($G_{\lambda p}$ـ مجموعه) می‌نامیم.

ب) فضای توپولوژی X را یک نیم P_λ ـ فضا (پیش P_λـ فضا) گوییم، درصورتی که هر $G_{\lambda s}$ـ مجموعه ($G_{\lambda p}$ـ مجموعه) در X نیم‌ـ باز (پیش باز) باشد. یک نیم $P_{\aleph_1}$ـ فضا (پیش $P_{\aleph_1}$ـ فضا) را نیم Pـ فضا (پیش Pـ فضا) می‌نامیم.

تذکر ۲۳.۳. با استفاده از مطالب نکته ۱۹.۳، فضای ناهمبند شدید (X,τ) یک نیم P_λـ فضا است اگر وتنها اگر $(X,SO(X,\tau))$ یک P_λـ فضا باشد. همچنین در فضای (X,τ) با این ویژگی که اشتراک هر دو مجموعه‌ی چگال آن پیش‌باز است، بدیهی است که (X,τ) یک پیش P_λـ فضا است اگر و تنها اگر $(X,PO(X,\tau))$ یک P_λـ فضا باشد.

مثال ۲۴.۳. در فضای مثال ۲.۲، λ را یک کاردینال منظم در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از فضاهای دوبه‌دو مجزا باشد که با (X^*,τ^*) همسان‌ریخت هستند. در این صورت هر مجموعه‌ی پیش‌باز در مجموع آزاد $Y=\oplus_{\alpha\in I}X_\alpha$، یک مجموعه‌ی باز در Y است. در نتیجه Y یک پیش P_λـ فضای λـ فشرده‌ی قوی و به‌طور قوی نرمال است که کاردینال مجموعه نقاط نامنفرد آن $|I|$ است.

مثال ۲۵.۳. فضای معرفی شده مثال ۳.۲، نمونه‌ای از یک نیم‌ـ P_λـ فضای λـ نیم‌فشرده‌ی بدون نقطه منفرد است.

گزاره ۲۶.۳. هر نیم P_λـ فضای λـ نیم‌فشرده (پیش P_λـ فضای λـ فشرده‌ی قوی) یک فضای نیم‌ـ فشرده (به‌طور قوی فشرده) است.

اثبات. فرض کنیم (X,τ) یک نیم P_λـ فضا باشد. در این صورت $(X,SO(X,\tau))$ یک P_λـ فضا است. اگر (X,τ) یک فضای λـ نیم فشرده باشد، آن‌گاه $(X,SO(X,\tau))$ یک فضای λـ فشرده و در نتیجه بنا به گزاره ۱۱.۲ در [۲۲]، $(X,SO(X,\tau))$ یک فضای منظم است؛ یعنی، (X,τ) نیم‌ـ منظم است. اثبات حالت دوم گزاره مشابه است. $\square$

نتیجه ۲۷.۳. هر نیم P_λـ فضای λـ نیم فشرده (پیش P_λـ فضای λـ فشرده‌ی قوی) یک فضای λـ نیم نرمال (λـ نرمال قوی) است.

اثبات. اگر (X,τ) نیم P_λـ فضا باشد، آن‌گاه $(X,SO(X,\tau))$ یک P_λـ فضا است. بنا به نتیجه ۱۲.۲ در [۲۲]، $(X,SO(X,\tau))$ یک فضای λـ نرمال است؛ یعنی، (X,τ) یک فضای λـ نیم نرمال است. اثبات حالت دوم مشابه است. $\square$

گزاره ۲۸.۳. فرض کنیم X یک نیم P_λـ فضای نیم‌ـ T_2 (پیش P_λـ فضای پیش‌ـ T_2) باشد و $H \subseteq X$. اگر H در X یک μـ نیم فشرده باشد که $\lambda \leq \mu$، آن‌گاه H در X نیم‌ـ بسته (پیش‌بسته) است.

اثبات. اگر (X, τ) یک نیم P_λـ فضای هاسدورف باشد، آن‌گاه $(X, SO(X, \tau))$ یک P_λـ فضای هاسدورف است. همچنین H در $(X, SO(X, \tau))$ یک μـ فشرده است. پس بنا به گزاره ۱۳.۲ در [۲۲]، H در $(X, SO(X, \tau))$ بسته و در نتیجه H در (X, τ) نیم‌ـ بسته است.
اثبات حالت دوم مشابه است. □

نتیجه ۲۹.۳. فرض کنیم X یک نیم Pـ فضای نیم‌ـ T_2 (پیش Pـ فضای پیش‌ـ T_2) باشد و $H \subseteq X$. اگر H نیم‌ـ لیندلوف (به‌طور قوی لیندلوف) باشد، آن‌گاه H نیم‌ـ بسته (پیش بسته) است.

قضیه ۳۰.۳. فرض کنیم X یک نیم P_λـ فضای نیم‌ـ T_2 باشد که λ یک کاردینال منظم است. اگر $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های پیش‌باز و λ ـ نیم‌فشرده X باشند، آن‌گاه $\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha$ در X یک λـ نیم‌فشرده است.

اثبات. قرار می‌دهیم $Y = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha$. فرض کنیم $Y \subseteq \bigcup_{\beta\in J} U_\beta$؛ که هر U_β در X، نیم‌ـ باز است. پس برای هر $\alpha \in I$ داریم $F_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in J} U_\beta$. چون هر F_α در X یک λـ نیم فشرده است، پس $J_\alpha \subseteq J$ وجود دارد که $|J_\alpha| < \lambda$ و $F_\alpha \subseteq \bigcup_{k\in J_\alpha} U_{\beta_k}$. قرار می‌دهیم $K = \bigcup_{\alpha\in I} J_\alpha$. در این صورت $Y \subseteq \bigcup_{k\in K} U_{\beta_k}$ و از آن‌جا که $|K| < \lambda$، پس Y در X یک γـ نیم فشرده است، که $\gamma \leq \lambda$. برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم $\gamma = \lambda$. بنا به نتیجه‌ی ۱۲.۳، Y یک زیرفضای γـ نیم فشرده‌ی X است. حال بنا به گزاره‌ی ۲۸.۳، هر F_α در X نیم‌ـ بسته است و از گزاره‌ی ۷.۳ نتیجه می‌شود که هر F_α در Y نیم‌ـ بسته است. پس بنا به گزاره ۱۶.۳، هر F_α در Y یک υـ نیم فشرده است که در آن $\upsilon \leq \gamma$. پس از قضیه ۱۱.۳ نتیجه می‌گیریم که هر F_α در X یک υـ نیم فشرده است و در نتیجه $\lambda = \upsilon \leq \gamma$. این هم نشان می‌دهد که $\gamma = \lambda$. □

اثبات قضیه‌ی زیر مشابه قضیه‌ی قبل است و به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۳۱.۳. فرض کنیم X یک پیش P_λ ـ فضای پیش‌ـ T_2 باشد که λ یک کاردینال منظم است. اگر $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای با کاردینال کم‌تر از λ و متشکل از مجموعه‌های نیم‌ـ باز λـ فشرده‌ی قوی باشد در X باشد. در این صورت $\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha$ در X یک λـ فشرده‌ی قوی است.

سپاس‌گزاری:

نویسندگان، از داوران محترم که نظراتشان باعث بهبود مقاله شد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به‌دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارند. شماره گرنت: (محمد علی سیاوشی SCU.AM99.190) و (معصومه اعتبار SCU.SM 99.573).

فهرست منابع

[1] S. G. Crossley and S. K. Hildebrand, *Semi-closure*, Texas J. Sci. **22** (1971) 99-112.

[2] S. G. Crossley and S. K. Hildebrand, *Semi-topological properties*, Fund. Math.**74** (1972) 233-254.

[3] M. C. Cueva and J. Dontchev, *On spaces with hereditarily compact α-topologies*, Acta Math. Hungar. **82**(1-2) (1999) 121-129.

[4] P. Das, *Note on some applications of semi-open sets*, Prog. Math. **7** (1973) 33-44.

[5] J. Dontchev, M. Ganster and T. Noiri, *On p-closed spaces*, Int. J. Math. And Math. Sci. **24**(3) (2000) 203-212.

[6] C. Dorsett, *Semi-regular spaces*, Soochow J. Math. **8** (1982) 45-53.

[7] C. Dorsett, *Semi-compactness, Semi-separation axioms and product spaces*, Bull. Malaysian Math. Soc. **4**(1) (1981) 21-28.

[8] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann verlag, Berlin, 1989.

[9] M. Ganster, *On covering properties and generalized open sets in topological spaces*, Math. Chronicle, **19** (1990) 27-33.

[10] M. Ganster, *Some remarks on strongly compact spaces and semi compact spaces*, Bull. Malaysian Math. Soc. **10** (1987) 67-81.

[11] M. Ganster, *Preopen sets and resolvable spaces*, Kyungpook Math. J. **27**(2) (1987) 135-143.

[12] H. Z. Hdeib and M. S. Sarsak, *On strongly lindelof spaces*, Q & A in General Topology, **18** (2000) 289-298.

[13] Y. B Jun, S. W. Jeong, H. J. Lee and J. W. Lee, *Applications of pre-open sets*, Appl. Gen. Topol. **9**(2) (2008) 213-228.

[14] A. Kar and P. Bhattacharyya, *Some weak separation axioms*, Bull. Calcutta Math. Soc. **82** (1990) 415-422.

[15] O. A. S. Karamzadeh, M. Namdari, and M. A. Siavoshi, *A note on λ-compact spaces*, Math. Slovaca, **63**(6) (2013) 1371-1380.

[16] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. **70** (1963) 36-41.

[17] S. N. Maheshwari and R. Prasad, *Some new separation axioms*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **89** (1975) 395-402.

[18] A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef and S. N. El-Deeb, *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, **53**(1982) 47-53.

[19] A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef, I. A. Hasanein and T. Noiri, *Strongly compact spaces*, Delta J. Sci. **8** (1984) 30-46.

[20] A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef and I. A. Hasanein, *On pretopological spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, **76**(1) (1984)39-45.

[21] A. S. Mashhour, I. A. Hasanein and S. N. El-Deeb, *A note on semicontinuity and precontinuity*, Indian J. Pure Appl. Math. **13**(10) (1982) 1119-1123.

[22] M. Namdari, M. A. Siavoshi, *A generalization of compact spaces*, Jp J. Geom. Topol. **11**(3) (2011) 259-270.

[23] O. Njastad, *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. **15**(3) (1965) 961-970.

[24] Z. Piotrowski, *A survey of results concerning generalized continuity in topological spaces*, Acta Math. Univ. Comenian. **53** (1987) 91-110.

[25] I. L. Reilly and M. K. vamanamurthy, *On α-continuity in topological spaces*, Acta Math. Hungar. **45** (1985) 27-32.

[26] M. S. Sarsak, *On semi-compact sets and associated properties*, Int. J. Math. and Math. Sci. (2009) 1-8.

[27] G. Vigilino, *Seminormal and C-compact spaces*, Duke J. Math. **38** (1971) 57-61.

λ- semi compact spaces and λ- strongly compact spaces

Masoumeh Etebar , Mohammad Ali Siavoshi [†]

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 2020/09/10 Accepted: 2020/12/13

Communicated by: M. Namdari

Abstract: For an infinite cardinal number λ, λ-semi compact spaces and λ- strongly compact spaces which are generalizations of semi-compact spaces and strongly compact spaces are introduced and studied respectively. It is shown that for every infinite cardinal numberλ, there exist non-discrete λ- semi compact spaces and non-discrete λ- strongly compact spaces. Basic properties of such spaces are investigated.

Keywords: λ- semi compact, λ- strongly compact, semi P_λ- space, pre P_λ- space, λ- semi normal .

Mathematics Subject Classification (2010):54A08,54D08,54C08.

©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: m.etebar@scu.ac.ir (Masoumeh Etebar), m.siavoshi@scu.ac.ir (Mohammad Ali Siavoshi).