مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۱، ص ۱۱–۲۴

شاپا چاپی: ۸۰۸۸–۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2020.28513.1685

بررسی پایداری دستگاهی از معادلات اویلر–لاگرانژ مکعبی در فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی

حمید ماجانی [×]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت : ۱۳۹۷/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۶/۲۱
دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

چکیده: «فریس» و «چو» پیش از این فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی را معرفی نمودند و پس از آن «اسحقی» و همکاران فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی احتمالی منگر را معرفی کردند. در این مقاله پایداری دستگاهی از معادلات اویلر–لاگرانژ مکعبی را در فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی ثابت می‌کنیم. همچنین پایداری این دستگاه را در فضاهای ۲–نرم ناارشمیدسی احتمالی منگر نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی اویلر–لاگرانژ مکعبی، فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی، فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی احتمالی منگر، پایداری هایرز–اولام–راسیاس تعمیم‌یافته.

رده‌بندی ریاضی: 39B72, 46S10, 54E70

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

گالر [۱، ۲] مفهوم فضاهای ۲–نرمدار را ارائه نمود. سپس گالر و وایت [۳–۵] مفهوم فضاهای ۲–باناخ را ارائه نمودند. در سال‌های ۱۹۹۹ تا ۲۰۰۳، لوانوسکا [۶–۱۰] طی سلسله مقالاتی، جزئیات بیش‌تری از مفاهیم فضاهای ۲–نرمدار و ۲–نرمدار تعمیم‌یافته را بررسی و مطرح نمود. پارک [۱۱] پایداری معادلات تابعی جمعی را در فضاهای ۲–باناخ ثابت نمود. ابتدا تعریف فضای ۲–نرمدار را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و بُعد فضای X بزرگ‌تر از یک باشد و $\|.,.\| : X \times X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\|x, y\| = 0$ اگر و تنها اگر x, y وابسته خطی باشند.

۲. $\|x, y\| = \|y, x\|$.

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: h.majani@scu.ac.ir (H. Majani)

۳. $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$.

۴. $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

آنگاه تابع $\|.,.\|$ را یک ۲-نرم روی X و دوتایی $(X, \|.,.\|)$ را یک فضای ۲-نرمدار می‌گوییم.

می‌توان ملاحظه نمود که اگر برای هر $y \in X$ داشته باشیم: $\|x, y\| = ۰$، آنگاه $x = ۰$. همچنین تابع $x \to \|x, y\|$ برای هر $y \in X$ ثابت، تابعی پیوسته است؛ زیرا از شروط ۲ و ۴ تعریف تابع ۲-نرم نتیجه می‌شود: $\|x-y, z\| \geq \Big| \|x, z\| - \|y, z\| \Big|$.

تعریف ۲.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲-نرمدار X را کوشی گوییم هرگاه دو عضو مستقل خطی $y, z \in X$ موجود باشند به گونه‌ای که: $\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m, y\| = ۰$ و $\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m, z\| = ۰$. همچنین دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲-نرمدار X را همگرا گوییم اگر $x \in X$ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $y \in X$ داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = ۰$. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

می‌توان نشان داد که برای دنباله همگرای $\{x_n\}$ و هر $y \in X$ داریم $\|\lim_{n\to\infty} x_n, y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n, y\|$. فضای ۲-نرمدار X را ۲-باناخ گوییم در صورتی که هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. یک تابع قدرمطلق روی میدان $\mathbb{K}$ تابعی است به‌صورت $|.| : \mathbb{K} \to [۰, \infty)$ که اولاً صفر میدان $\mathbb{K}$ تنها عضوی باشد که قدرمطلقش برابر با صفر است، ثانیاً $|ab| = |a||b|$ برای تمام اعضای a و b در میدان $\mathbb{K}$ و ثالثاً نامساوی مثلثی برقرار باشد؛ یعنی $|a+b| \leq |a| + |b|$ برای تمام اعضای a و b در میدان $\mathbb{K}$. میدان $\mathbb{K}$ مجهز به یک قدرمطلق را یک میدان قدرمطلق می‌نامیم. مجموعه اعداد حقیقی با قدرمطلق معمولی و مجموعه اعداد مختلط با قدرمطلق مختلط مثال‌های معروفی از میدان‌های قدرمطلق هستند. اگر شرط نامساوی مثلثی را با شرط $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ که آن را نامساوی مثلثی قوی می‌نامیم، جایگزین نماییم، تابع قدرمطلق را یک قدرمطلق ناارشمیدسی و میدان مجهز به چنین قدرمطلقی را میدان ناارشمیدسی می‌نامیم.

واضح است که هر میدان ناارشمیدسی یک میدان ارشمیدسی است ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. مثلاً در میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با قدرمطلق معمولی اگر $a = b = ۱$، آنگاه نامساوی مثلثی قوی برقرار نیست. بنابراین میدان قدرمطلق $\mathbb{R}$ با قدرمطلق معمولی یک میدان ناارشمیدسی نیست. تابع قدرمطلق گسسته روی میدان دلخواه $\mathbb{K}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که قدرمطلق تمام اعضای $\mathbb{K}$ برابر با یک باشد بجز صفر میدان و قدر مطلق صفر میدان نیز برابر با صفر باشد. قدر مطلق گسسته را مثال بدیهی برای میدان ناارشمیدسی $\mathbb{K}$ می‌نامیم. می‌توان ثابت نمود که روی یک میدان متناهی $\mathbb{K}$ تنها تابع قدرمطلق ناارشمیدسی قابل تعریف، همان تابع قدرمطلق بدیهی است. اولین بار هنشل [۱۲] مفهوم میدان ناارشمیدسی را ارائه نمود. همچنین مثال مهم میدان ناراشمیدسی اعداد p-اَدیک را هنشل ارائه نمود. برای آشنایی با فضای ناارشمیدسی اعداد p-ادیک به مرجع [۱۳] مراجعه شود.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم E یک میدان برداری روی یک میدان ناارشمیدسی $\mathbb{K}$ با قدرمطلق نابدیهی $|\ |$ باشد. تابع $||.|| : \mathbb{E} \to [۰, \infty)$ را یک نرم ناارشمیدسی گوییم هرگاه اولاً صفر فضای برداری E تنها عضوی باشد که نرمش برابر با صفر است، ثانیاً برای تمام اعضای a در فضای برداری E و تمام اعضای r در میدان $\mathbb{K}$، $||ra|| = |r|.||a||$ و ثالثاً نامساوی مثلثی قوی برقرار باشد، یعنی برای تمام اعضای a و b در فضای برداری E داشته باشیم: $||a+b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}$. فضای برداری E مجهز به یک نرم ناارشمیدسی را یک فضای نرمدار ناارشمیدسی می‌نامیم.

می‌توان ملاحظه نمود که دنباله $\{a_n\}$ در فضای نرمدار ناارشمیدسی E کوشی است هرگاه دنباله $\{a_{n+۱} - a_n\}$ در E همگرا به صفر باشد، زیرا برای $n > m$ داریم:

$$||a_n - a_m|| \leq \max\{||a_{j+۱} - a_j|| : m \leq j \leq n-۱\}.$$

فضای نرمدار ناارشمیدسی را کامل (باناخ) نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد. برای آشنایی بیشتر با فضاهای نرمدار ناارشمیدسی مرجع [۱۴] را ملاحظه کنید. فریس و چو [۱۵] فضاهای ۲-نرمدار ناارشمیدسی را معرفی نمودند.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و بُعد فضای X بزرگ‌تر از یک باشد و $||.,.|| : X \times X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $||x, y|| = ۰$ اگر و تنها اگر x و y وابسته خطی باشند.

۲. $||x, y|| = ||y, x||$.

۳. برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $||\alpha x, y|| = |\alpha|.||x, y||$.

۴. $||x, y+z|| \leq \max\{||x, y||, ||y, z||\}$.

آنگاه تابع $||.,.||$ را یک ۲-نرم نارشمیدسی روی X و دوتایی $(X, ||.,.||)$ را یک فضای ۲-نرمدار نارشمیدسی می‌گوییم.

از جمله ویژگی‌های فضاهای ۲-نرمدار نارشمیدسی این است که دنباله $\{a_n\}$ در فضای ۲-نرمدار نارشمیدسی کوشی است هرگاه دنباله $\{a_{n+1} - a_n\}$ در E همگرا به صفر باشد، زیرا برای $n > m$ داریم:

$$||a_n - b_m, y|| \leq \max\{||a_{j+1} - a_j, y|| : m \leq j \leq n-1\}.$$

فضای ۲-نرمدار نارشمیدسی E را کامل (۲-باناخ) نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

در سال ۱۹۶۲، فضاهای نرمدار احتمالی توسط شرزنف [۶] معرفی گردید. السینا و همکاران [۱۷] این مفهوم را تعمیم دادند. در ادامه با استفاده از مرجع [۱۸] به معرفی این فضا می‌پردازیم.

تعریف ۶.۱ اگر $F : [0, +\infty] \to [0, 1]$ تابعی نانزولی و روی $(0, +\infty)$ پیوسته چپ باشد و $F(0) = 0$ و $F(+\infty) = 1$، آنگاه F را تابع توزیع فاصله می‌نامیم. فضای تمام توابع توزیع فاصله را با Δ^+ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم تابع نانزولی $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ روی هر متغیر، جابجایی، به این معنی که $T(x, y) = T(y, x)$، شرکت‌پذیر، به این معنی که $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ و ۱ عضو همانی باشد، به این معنی که $T(x, 1) = x$. در این صورت T را یک نرم مثلثی یا t-نرم می‌نامیم.

مثلا برای هر $a \geq 0$ تابع ε_a با ضابطه زیر یک تابع توزیع فاصله است.

$$\varepsilon_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq a \\ 1 & \text{if } t > a \end{cases}$$

مهم‌ترین t-نرم‌ها عبارتند از t-نرم ضربی، $T_P(x, y) = xy$، t-نرم لوکاشویچ، $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ و قوی‌ترین t-نرم $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$.

تعریف ۷.۱ سه‌تایی (X, ν, T) را یک فضای نرمدار احتمالی منگر گوییم هرگاه X یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی، T یک t-نرم و $\nu : X \to \Delta^+$ نگاشتی باشد که برای هر $p, q \in X$ و $a, s, t \in (0, +\infty)$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\nu(p) = \varepsilon_0$ اگر و تنها اگر p بردار صفر باشد.

۲. $\nu(ap)(t) = \nu(p)(\frac{t}{|a|})$.

۳. $\nu(p+q)(s+t) \geq T(\nu(p)(s), \nu(q)(t))$.

اسحقی و همکاران [۱۹] مفهوم فضاهای ۲-نرمدار نارشمیدسی احتمالی منگر را به صورت زیر ارائه نموده‌اند.

تعریف ۸.۱ سه‌تایی (X, ν, T) را یک فضای ۲-نرمدار نارشمیدسی احتمالی منگر گوییم هرگاه X یک فضای برداری با بُعد بزرگ‌تر از یک، روی میدان نارشمیدسی $\mathbb{K}$، T یک t-نرم و $\nu : X^2 \to \Delta^+$ نگاشتی باشد که برای هر $p, q, r \in X$، هر $\alpha \in \mathbb{K}$ و هر $s, t \in (0, +\infty)$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\nu(p, q) = \varepsilon_0$ اگر و تنها اگر p و q وابسته خطی باشند.

۲. $\nu(p, q) = \nu(q, p)$.

۳. $\nu(\alpha p, q)(t) = \nu(p, q)(\frac{t}{|\alpha|})$.

۴. $\nu(p+q, r)(\max\{s+t\}) \geq T(\nu(p, r)(s), \nu(q, r)(t))$.

با توجه به ناافزایشی بودن $\nu(p,q)$، می‌توانیم نشان دهیم که شرط ۴ فوق معادل است با

$$\nu(p+q,r)(t) \geq T(\nu(p,r)(t), \nu(q,r)(t)).$$

دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲-نرمدار ناارشمیدسی احتمالی (X,ν,T) را همگرا گوییم هرگاه $x \in X$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $y \in X$ و $t > 0$ داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(x_n - x, y)(t) = 1$. همچنین دنباله $\{x_n\}$ در فضای ۲-نرمدار ناارشمیدسی احتمالی (X,ν,T) را کوشی گوییم اگر برای هر $\epsilon > 0$ و هر $t > 0$ عدد صحیح مثبت n_0 و دو عضو مستقل خطی $y, z \in X$ به‌گونه‌ای موجود باشند که برای هر $n > n_0$ و هر $p > 0$ داشته باشیم: $\nu(x_{n+p} - x_n, y)(t) > 1-\epsilon$ و $\nu(x_{n+p} - x_n, z)(t) > 1-\epsilon$.

فرض کنیم یک t-نرم T داده شده باشد. برای $n \in \mathbb{N}$ نگاشت $[0,1] \to [0,1]$: T^n به این صورت تعریف می‌شود: $T^1(x) = T(x,x)$، $T^n(x) = T(T^{n-1}(x), x)$، $x \in [0,1]$. برای سه t-نرم مهم T_M، T_P و T_L داریم:

$$t_M^n(x) = x,\ T_P^n(x) = x^n,\ T_L^n(x) = \max\{(n+1)x - n, 0\}.$$

تعریف ۹.۱. [۲۰] t-نرم T را هادزیچ گوییم اگر خانواده $\{T^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $t=1$ هم‌پیوسته باشد؛ یعنی

$$\forall \epsilon \in (0,1),\ \exists \delta \in (0,1): \quad t > 1-\delta \Rightarrow T^n(t) > 1-\epsilon.$$

مثال بدیهی t-نرم هادزیچ T_M است اما t-نرم‌های هادزیچ نابدیهی دیگری بجز T_M نیز موجود است (مراجعه شود به [۲۱]).

لم ۱۰.۱. فرض کنیم t-نرم T در فضای ۲-نرمدار ناارشمیدسی احتمالی منگر (X,ν,T) هادزیچ باشد. دنباله $\{x_n\}$ در این فضا کوشی است اگر برای هر $\epsilon > 0$ و هر $t > 0$ عدد صحیح مثبت n_0 و دو عضو مستقل خطی $y, z \in X$ به گونه‌ای موجود باشند که برای هر $n \geq n_0$ این دو رابطه برقرار باشند: $\nu(x_{n+1} - x_n, y)(t) > 1-\epsilon$ و $\nu(x_{n+1} - x_n, z)(t) > 1-\epsilon$.

اثبات. با توجه به

$$\begin{aligned}
\nu(x_{n+p} - x_n, y)(t) &\geq T(\nu(x_{n+p} - x_{n+p-1}, y)(t), \nu(x_{n+p-1} - x_n, y)(t))\\
&\geq T(\nu(x_{n+p} - x_{n+p-1}, y)(t), T(\nu(x_{n+p-1} - x_{n+p-2}, y)(t),\\
&\quad \nu(x_{n+p-2} - x_n, y)(t)))\\
&\quad \vdots\\
&\geq T(\nu(x_{n+p} - x_{n+p-1}, y)(t), T(\nu(x_{n+p-1} - x_{n+p-2}, y)(t), \ldots,\\
&\quad T(\nu(x_{n+2} - x_{n+1}, y)(t), (x_{n+1} - x_n, y)(t)))\ldots),
\end{aligned}$$

و با توجه به این که رابطه فوق برای $z \in X$ نیز برقرار است و با توجه به هادزیچ بودن t-نرم T حکم ثابت می‌گردد. □

واضح است که هر دنباله همگرا در یک فضای ۲-نرمدار ناارشمیدسی احتمالی منگر کوشی است. اگر هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد، آن را یک فضای ۲-باناخ ناارشمیدسی احتمالی منگر گوییم.

در سال ۱۹۴۰، اولام [۲۲] سوالی را مطرح کرد و پایه‌گذار مفهوم پایداری گردید. در سال ۱۹۴۱، هایرز [۲۳] به سوال اولام پاسخ داد و اولین مساله پایداری را حل نمود. آئوکی [۲۴]، راسیاس [۲۵] و گاوروتا [۲۶] نتایج هایرز را به شکل قابل توجهی گسترش دادند. در سال‌های اخیر مقالات متعددی در مساله پایداری ارائه گردیده است (مراجعه شود به [۱۹، ۲۷-۳۱]).

جون و کیم [۳۲] پایداری هایرز-اولام-راسیاس معادله تابعی اویلر-لاگرانژ مکعبی زیر را ثابت نمودند:

$$f(ax+y) + f(x+ay) = (a+1)(a-1)^2(f(x)+f(y)) + a(a+1)f(x+y).$$

در این مقاله پایداری دستگاه معادلات تابعی اویلر-لاگرانژ مکعبی زیر را ثابت خواهیم نمود:

$$\begin{cases}
f(a_1x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1 + a_1y_1, x_2, \ldots, x_n) =\\
(a_1+1)(a_1-1)^2(f(x_1, \ldots, x_n) + f(y_1, x_2, \ldots, x_n)) +\\
a_1(a_1+1)f(x_1+y_1, x_2, \ldots, x_n);\\
\vdots\\
f(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_nx_n + y_n) + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + a_ny_n) =\\
(a_n+1)(a_n-1)^2(f(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)) +\\
a_n(a_n+1)f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n+y_n);
\end{cases} \tag{1.1}$$

ابتدا در بخش ۲، پایداری هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۱.۱) را در فضای ۲-باناخ ناارشمیدسی ثابت می‌کنیم. سپس در بخش ۳، پایداری هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۱.۱) را در فضای ۲-باناخ ناارشمیدسی احتمالی منگر ثابت خواهیم نمود.

۲ پایداری هایرز–اولام–راسیاس دستگاه (۱.۱) در فضای ۲–باناخ ناارشمیدسی

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که $i, k, n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $\mathbb{K}$ یک میدان ناارشمیدسی، Y یک ۲–باناخ ناارشمیدسی روی $\mathbb{K}$، X یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ و $f : X^n \to Y$ یک نگاشت باشد. در قضیه زیر پایداری هایرز–اولام–راسیاس تعمیم‌یافته دستگاه (۱.۱) در فضای ۲–باناخ ناارشمیدسی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$، تابع $\varphi_i : X^{n+1} \to [0, \infty)$ به گونه‌ای باشد که شرایط:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{1}{a_1^{3k}\dots a_n^{3k}}| \max\{|\frac{1}{a_1^3\dots a_i^3}|\varphi_i(a_1^{k+1}x_1, \dots, a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, a_i^k x_i, 0, a_{i+1}^k x_{i+1}, \dots, a_n^k x_n), \tag{۱.۲}$$
$$||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3\dots a_i^3} f(a_1^{k+1}x_1, \dots, a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, 0, a_{i+1}^k x_{i+1}, \dots, a_n^k x_n), w_i|| \ : \ i = 1, \dots, n\} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(x_1, \dots, x_i, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \lim_{p\to\infty} \max\{|\frac{1}{a_1^{3k}\dots a_n^{3k}}| \max\{|\frac{1}{a_1^3\dots a_i^3}|\varphi_i(a_1^{k+1}x_1, \dots, a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, a_i^k x_i, 0, a_{i+1}^k x_{i+1}, \dots, a_n^k x_n), \\ &\quad ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3\dots a_i^3} f(a_1^{k+1}x_1, \dots, a_{i-1}^{k+1}x_{i-1)}, 0, a_{i+1}^k x_{i+1}, \dots, a_n^k x_n), w_i|| \ : \\ &\quad i = 1, \dots, n\} : k = 0, 1, \dots, p\} < \infty, \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{1}{a_1^{3k}\dots a_n^{3k}}|\varphi_i(a_1^k x_1, \dots, a_i^k x_i, a_i^k y_i, \dots, a_n^k x_n) = 0 \tag{۳.۲}$$

برای هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، برقرار باشند. فرض کنیم $f : X^n \to Y$ نگاشتی باشد که برای هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} ||f(a_1x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n) + f(x_1 + a_1y_1, x_2, \dots, x_n) - \\ (a_1+1)(a_1-1)^2(f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, x_2, \dots, x_n)) - \\ a_1(a_1+1)f(x_1+y_1, x_2, \dots, x_n), w_1|| \leq \varphi_1(x_1, y_1, x_2, \dots, x_n); \\ \quad \vdots \\ ||f(x_1, \dots, x_{n-1}, a_nx_n + y_n) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + a_ny_n) - \\ (a_n+1)(a_n-1)^2(f(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)) - \\ a_n(a_n+1)f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + y_n), w_n|| \leq \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, y_n); \end{cases}$$

آنگاه نگاشت یکتای $T : X^n \to Y$ موجود است به گونه‌ای که در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند و برای هر $x_i, w_i \in X$ رابطه زیر برقرار است:

$$||f(x_1, \dots, x_n) - T(x_1, \dots, x_n), w_i|| \leq \Phi \tag{۴.۲}$$

اثبات. فرض کنیم ثابت $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ و نامساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &||f(x_1, \dots, a_ix_i + y_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i + a_iy_i, \dots, x_n) - \\ &\quad (a_i+1)(a_i-1)^2(f(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) - \\ &\quad\quad a_i(a_i+1)f(x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n), w_i|| \leq \varphi_i(x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

با جایگذاری $y_i = 0$ و تقسیم بر $|a_i^3|$ در (۵.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}||f(x_1, ..., x_n) - \frac{1}{a_i^3}f(x_1, ..., a_ix_i, ..., x_n), w_i|| \leq \\ \max\{|\frac{1}{a_i^3}|\varphi_i(x_1, ..., x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n), \\ ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2)}{a_i^3}f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i||\}.\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned}||\frac{1}{a_1^3...a_{i-1}^3}f(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, x_i, ..., x_n) - \frac{1}{a_1^3...a_i^3}f(a_1x_1, ..., a_ix_i, x_{i+1}, ..., x_n), w_i|| \leq \\ \max\{|\frac{1}{a_1^3...a_i^3}|\varphi_i(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n), \\ ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3...a_i^3}f(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i||\}.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}||f(x_1, ..., x_n) - \frac{1}{a_1^3...a_n^3}f(a_1x_1, ..., a_nx_n), w_i|| \leq \\ \max\{|\frac{1}{a_1^3...a_i^3}|\varphi_i(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n), \\ ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3...a_i^3}f(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i|| : i = 1, ..., n\}.\end{aligned}$$

پس برای هر $x_i, w_i \in X$ و $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داریم:

$$\begin{aligned}||\frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}}f(a_1^kx_1, ..., a_n^kx_n) - \frac{1}{a_1^{3(k+1)}...a_n^{3(k+1)}}f(a_1^{k+1}x_1, ..., a_n^{k+1}x_n), w_i|| \leq \\ |\frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}}|\max\{|\frac{1}{a_1^3...a_i^3}|\varphi_i(a_1^{k+1}x_1, ..., a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, a_i^kx_i, 0, a_{i+1}^kx_{i+1}, ..., a_n^kx_n), \\ ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3...a_i^3}f(a_1^{k+1}x_1, ..., a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, 0, a_{i+1}^kx_{i+1}, ..., a_n^kx_n), w_i|| : i = 1, ..., n\},\end{aligned} \tag{۷.۲}$$

از روابط (۱.۲) و (۷.۲) نتیجه می‌شود که دنباله $\{\frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}}f(a_1^kx_1, ..., a_n^kx_n)\}$ کوشی است و با توجه به کامل بودن Y این دنباله همگرا است. پس می‌توانیم نگاشت $T : X^n \to Y$ را با ضابطه زیر تعریف کنیم:

$$T(x_1, ..., x_n) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}}f(a_1^kx_1, ..., a_n^kx_n). \tag{۸.۲}$$

از رابطه (۷.۲) و به استقراء می‌توانیم نشان دهیم:

$$\begin{aligned}||f(x_1, ..., x_n) - \frac{1}{a_1^{3p}...a_n^{3p}}f(a_1^px_1, ..., a_n^px_n), w_i|| \leq \\ \max\{|\frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}}|\max\{|\frac{1}{a_1^3...a_i^3}|\varphi_i(a_1^{k+1}x_1, ..., a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, a_i^kx_i, 0, a_{i+1}^kx_{i+1}, ..., a_n^kx_n), \\ ||\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3...a_i^3}f(a_1^{k+1}x_1, ..., a_{i-1}^{k+1}x_{i-1}, 0, a_{i+1}^kx_{i+1}, ..., a_n^kx_n), w_i|| \\ : i = 1, ..., n\} : k = 0, 1, ..., p\}.\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

اگر در رابطه (۹.۲) قرار دهیم $p \to \infty$، با استفاده از رابطه (۲.۲) رابطه (۴.۲) حاصل می‌گردد. برای $i \in \{۱,۲,...,n\}$ ثابت، با استفاده از روابط (۵.۲) و (۸.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&||T(x_۱,...,a_ix_i+y_i,...,x_n)+T(x_۱,...,x_i+a_iy_i,...,x_n)-\\
&(a_i+۱)(a_i-۱)^۲(T(x_۱,...,x_n)+T(x_۱,...,y_i,...,x_n))-\\
&a_i(a_i+۱)T(x_۱,...,x_i+y_i,...,x_n),w_i||=\\
&\lim_{k\to\infty}||\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}\{f(a_۱^kx_۱,...,a_i^k(a_ix_i+y_i),...,a_n^kx_n)+\\
&f(a_۱^kx_۱,...,a_i^k(x_i+a_iy_i),...,a_n^kx_n)-\\
&(a_i+۱)(a_i-۱)^۲(f(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n)+f(a_۱^kx_۱,...,a_i^ky_i,...,a_n^kx_n))-\\
&a_i(a_i+۱)f(a_۱^kx_۱,...,a_i^k(x_i+y_i),...,a_n^kx_n)\},w_i||\le\\
&|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\varphi_i(a_۱^kx_۱,...,a_i^kx_i,a_i^ky_i,...,a_n^kx_n).
\end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

از روابط (۳.۲) و (۱۰.۲) نتیجه می‌شود که T در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند. برای اثبات یکتایی، فرض کنیم $T' : X^n \to Y$ نگاشت دیگری باشد که در (۱.۱) و (۴.۲) صدق کند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&||T(x_۱,...,x_n)-T'(x_۱,...,x_n),w_i||\le\\
&|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\max\{||T(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n)-f(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n),w_i||,\\
&||f(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n)-T'(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n),w_i||\}\le\\
&|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\max\{\Phi(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n),\Phi(a_۱^kx_۱,...,a_n^kx_n)\},
\end{aligned}$$

اگر در رابطه فوق قرار دهیم $k \to \infty$، آنگاه با توجه به رابطه (۲.۲) سمت راست به صفر میل می‌کند. بنابراین $T = T'$.

□

از قضیه (۱.۲) بی‌درنگ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۲. فرض کنیم برای هر $i \in \{۱,...,n\}$، تابع $\varphi_i : X^{n+۱} \to [۰,\infty)$ به گونه‌ای باشد که شرایط:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\max\{|\frac{۱}{a_۱^۳...a_i^۳}|\\
&\quad\varphi_i(a_۱^{k+۱}x_۱,...,a_{i-۱}^{k+۱}x_{i-۱},a_i^kx_i,۰,a_{i+۱}^kx_{i+۱},...,a_n^kx_n) : i=۱,...,n\}=۰,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi=\Phi(x_۱,...,x_i,۰,x_{i+۱},...,x_n)=\\
&\lim_{p\to\infty}\max\{|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\max\{\\
&|\frac{۱}{a_۱^۳...a_i^۳}|\varphi_i(a_۱^{k+۱}x_۱,...,a_{i-۱}^{k+۱}x_{i-۱},a_i^kx_i,۰,a_{i+۱}^kx_{i+۱},...,a_n^kx_n)\\
&: i=۱,...,n\} : k=۰,۱,...,p\}<\infty,
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{۱}{a_۱^{۳k}...a_n^{۳k}}|\varphi_i(a_۱^kx_۱,...,a_i^kx_i,a_i^ky_i,...,a_n^kx_n)=۰,$$

برای هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، برقرار باشند. فرض کنیم $f : X^n \to Y$ نگاشتی باشد که برای هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \|f(a_1x_1 + y_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1 + a_1y_1, x_2, ..., x_n) - \\ (a_1 + 1)(a_1 - 1)^2(f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, x_2, ..., x_n)) - \\ a_1(a_1 + 1)f(x_1 + y_1, x_2, ..., x_n), w_1\| \leq \varphi_1(x_1, y_1, x_2, ..., x_n); \\ \qquad\qquad \vdots \\ f(x_1, ..., x_{n-1}, a_nx_n + y_n) + f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + a_ny_n) - \\ (a_n + 1)(a_n - 1)^2(f(x_1, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_(n-1), y_n)) - \\ a_n(a_n + 1)f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + y_n), w_n\| \leq \varphi_n(x_1, ..., x_(n-1), x_n, y_n); \end{cases}$$

همچنین فرض کنیم $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ اگر $x_i = 0$ برای برخی $i = 1, ..., n$. آنگاه نگاشت یکتای $T : X^n \to Y$ موجود است به گونه‌ای که در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند و برای هر $x_i, w_i \in X$ رابطه زیر برقرار است:

$$\|f(x_1, ..., x_n) - T(x_1, ..., x_n), w_i\| \leq \Phi.$$

۳ پایداری هایرز-اولام-راسیاس دستگاه (۱.۱) در فضای ۲-باناخ نارشمیدسی احتمالی منگر

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که $u \in \mathbb{R}$، $i, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $\mathbb{K}$ یک میدان نارشمیدسی، T یک t-نرم هادزیچ، (Y, ν, T) یک ۲-باناخ نارشمیدسی احتمالی منگر روی $\mathbb{K}$، (Z, ω, T) یک فضای ۲-نرمدار نارشمیدسی احتمالی منگر روی $\mathbb{K}$، یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ و $f : X^n \to Y$ یک نگاشت باشد. در قضیه زیر پایداری هایرز-اولام-راسیاس تعمیم‌یافته دستگاه (۱.۱) در فضای ۲-باناخ نارشمیدسی احتمالی منگر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم برای هر $i \in \{1, ..., n\}$، تابع $\varphi_i : X^{n+1} \to Z$ به گونه‌ای باشد که شرایط:

$$\begin{cases} \Phi_i = \Phi_i(x_1, ..., x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n, u) = \\ T\{\omega(\frac{1}{a_1^{3(m+1)}...a_i^{3(m+1)}a_{i+1}^{3m}...a_n^{3m}}\varphi_i(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i)(u), \\ \nu(\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^{3(m+1)}...a_i^{3(m+1)}a_{i+1}^{3m}...a_n^{3m}}f(a_1x_1, ..., a_{i-1}x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i)(u)\}; \\ \Psi_1^m = \Psi_1^m(x_1, 0, x_2, ..., x_n, u) = \Phi_1; \\ \Psi_i^m = \psi_i^m(x_1, ..., x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n, u) = T(\Phi_i, \Psi_{i-1}^m); \\ \lim\limits_{m\to\infty} \Psi_n^m = 1; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \omega(\frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}}\varphi_i(a_1^mx_1, ..., a_i^mx_i, a_i^my_i, ..., a_n^mx_n), w_i)(u) = 1; \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \Psi_*^1 = \Psi_*^1(x_1, ..., x_n, 0, u) = \Psi_n^1; \\ \Psi_*^m = \Psi_*^m(x_1, ..., x_n, 0, u) = T(\Psi_n^m, \Psi_*^{m-1}); \\ \Psi = \Psi(x_1, ..., x_n, 0, u) = \lim\limits_{m\to\infty} \Psi_*^m = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

برای هر $u > 0$، هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، برقرار باشند. فرض کنیم $f : X^n \to Y$ نگاشتی

باشد که در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \nu(f(a_1x_1+y_1,x_2,...,x_n)+f(x_1+a_1y_1,x_2,...,x_n)- \\ (a_1+1)(a_1-1)^2(f(x_1,...,x_n)+f(y_1,x_2,...,x_n))- \\ a_1(a_1+1)f(x_1+y_1,x_2,...,x_n),w_1)(u)\geq\omega(\varphi_1(x_1,y_1,x_2,...,x_n),w_1)(u); \\ \quad\vdots \\ \nu(f(x_1,...,x_{n-1},a_nx_n+y_n)+f(x_1,...,x_{n-1},x_n+a_ny_n)- \\ (a_n+1)(a_n-1)^2(f(x_1,...,x_n)+f(x_1,...,x_{n-1},y_n))- \\ a_n(a_n+1)f(x_1,...,x_{n-1},x_n+y_n),w_n)(u)\geq\omega(\varphi_n(x_1,...,x_n,y_n),w_n)(u); \end{cases}$$

برای هر $u>0$، هر $x_i,y_i,w_i\in X$ و هر $a_i\in\mathbb{K}$، که $a_i\neq 0,\pm 1$. در این صورت نگاشت یکتای $F:X^n\to Y$ موجود است که در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند و برای هر $u>0$ و $x_i,w_i\in X$ رابطه زیر برقرار است:

$$\nu(f(x_1,...,x_n)-F(x_1,...,x_n),w_i)(u)\geq\Psi. \tag{۴.۳}$$

اثبات. فرض کنیم $i\in\{1,2,...,n\}$ ثابت باشد. نامساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\nu(f(x_1,...,a_ix_i+y_i,...,x_n)+f(x_1,...,x_i+a_iy_i,...,x_n)- \\ &(a_i+1)(a_i-1)^2(f(x_1,...,x_n)+f(x_1,...,y_i,...,x_n))- \\ &(a_i(a_i+1)f(x_1,...,x_i+y_i,...,x_n),w_i)(u)\geq\omega(\varphi_i(x_1,...,x_i,y_i,...,x_n),w_i)(u). \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

با جای‌گذاری $y_i=0$ و تقسیم بر $|a_i^3|$ در (۵.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\nu(f(x_1,...,x_n)-\frac{1}{a_i^3}f(x_1,...,a_ix_i,...,x_n),w_i)(u)\geq \\ &T\{\omega(\frac{1}{a_i^3}\varphi_i(x_1,...,x_i,0,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u), \\ &\nu(\frac{(a_i+1)(a_i--1)^2}{a_i^3}f(x_1,...,x_(i-1),0,x_(i+1),...,x_n),w_i)(u)\} \end{aligned}$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} &\nu(\frac{1}{a_1^3...a_{i-1}^3}f(a_1x_1,...,a_{i-1}x_{i-1},x_i,...,x_n)- \\ &\frac{1}{a_1^3...a_i^3}f(a_1x_1,...,a_ix_i,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u)\geq \\ &\{\omega(\frac{1}{a_1^3...a_i^3}\varphi_i(a_1x_1,...,a_{i-1}x_{i-1},x_i,0,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u), \\ &\nu(\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^3...a_i^3}f(a_1x_1,...,a_{i-1}x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u)\}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &\nu(\frac{1}{a_1^{3(m+1)}...a_{i-1}^{3(m+1)}a_i^{3m}...a_n^{3m}}f(a_1^{m+1}x_1,...,a_{i-1}^{m+1}x_{i-1},a_i^mx_i,...,a_n^mx_n)- \\ &\frac{1}{a_1^{3(m+1)}...a_i^{3(m+1)}a_{i+1}^{3m}...a_n^{3m}}f(a_1^{m+1}x_1,...,a_i^{m+1}x_i,a_{i+1}^mx_{i+1},...,a_n^mx_n),w_i)(u)\geq \\ &T\{\omega(\frac{1}{a_1^{3(m+1)}...a_i^{3(m+1)}a_{i+1}^{3m}...a_n^{3m}}\varphi_i(a_1x_1,...,a_{i-1}x_{i-1},x_i,0,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u), \\ &\nu(\frac{(a_i+1)(a_i-1)^2}{a_1^{3(m+1)}...a_i^{3(m+1)}a_{i+1}^{3m}...a_n^{3m}}f(a_1x_1,...,a_{i-1}x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n),w_i)(u)\}=\Phi_i. \end{aligned}$$

پس برای هر $u > 0$، هر $x_i, w_i \in X$ و هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داریم:

$$\nu(\frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n) - \frac{1}{a_1^{3(m+1)}...a_n^{3(m+1)}} f(a_1^{m+1} x_1, ..., a_n^{m+1} x_n), w_i)(u) \geq \Psi_n^m. \quad (۶.۳)$$

از روابط (۶.۳) و (۱.۳) نتیجه می‌شود که دنباله $\{\frac{1}{a_1^{3k}...a_n^{3k}} f(a_1^k x_1, ..., a_n^k x_n)\}$ کوشی است و با توجه به کامل بودن Y این دنباله همگرا است. پس می‌توانیم نگاشت $F : X^n \to Y$ را با ضابطه زیر تعریف کنیم:

$$\lim_{m\to\infty} \nu(F(x_1, ..., x_n) - \frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n), w_i)(u) = 1. \quad (۷.۳)$$

از رابطه (۶.۳) و به استقراء می‌توانیم نشان دهیم:

$$\nu(f(x_1, ..., x_n) - \frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n), w_i)(u) \geq \Psi_*^{m-1}. \quad (۸.۳)$$

اگر در رابطه (۸.۳) قرار دهیم $m \to \infty$، آنگاه با استفاده از رابطه (۳.۳) رابطه (۴.۳) حاصل می‌گردد. برای $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ثابت، با استفاده از روابط (۵.۳) و (۷.۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\nu(F(x_1, ..., a_i x_i + y_i, ..., x_n) + F(x_1, ..., x_i + a_i y_i, ..., x_n) - \\
&(a_i + 1)(a_i - 1)^2 (F(x_1, ..., x_n) + F(x_1, ..., y_i, ..., x_n)) - \\
&a_i(a_i + 1) F(x_1, ..., x_i + y_i, ..., x_n), w_i)(u) = \\
&\lim_{m\to\infty} \nu(\frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} \{f(a_1^m x_1, ..., a_i^m (a_i x_i + y_i), ..., a_n^m x_n) + \\
&f(a_1^m x_1, ..., a_i^m (x_i + a_i y_i), ..., a_n^m x_n) - \\
&(a_i + 1)(a_i - 1)^2 (f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n) + f(a_1^m x_1, ..., a_i^m y_i, ..., a_n^m x_n)) - \\
&a_i(a_i + 1) f(a_1^m x_1, ..., a_i^m (x_i + y_i), ..., a_n^m x_n)\}, w_i)(u) \geq \\
&\lim_{m\to\infty} \omega(\frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} \varphi_i(a_1^m x_1, ..., a_i^m x_i, a_i^m y_i, ..., a_n^m x_n), w_i)(u).
\end{aligned} \quad (۹.۳)$$

از روابط (۲.۳) و (۹.۳) نتیجه می‌شود که F در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند. برای اثبات یکتایی، فرض کنیم $T' : X^n \to Y$ نگاشت دیگری باشد که در (۱.۱) و (۴.۳) صدق کند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&\nu(F(x_1, ..., x_n) - F'(x_1, ..., x_n), w_i)(u) = \\
&\nu(\frac{1}{a_1^{3m}...a_n^{3m}} \{F(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n) - f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n) + \\
&f(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n) - F'(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n)\}, w_i)(u) \geq \\
&T\{\Psi(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n, 0, |a_1^{3m}...a_n^{3m}|u), \Psi(a_1^m x_1, ..., a_n^m x_n, 0, |a_1^{3m}...a_n^{3m}|u)\},
\end{aligned}$$

اگر در رابطه فوق قرار دهیم $m \to \infty$، با توجه به رابطه (۳.۳) سمت راست به یک میل می‌کند. بنابراین $F = F'$. □

از قضیه (۱.۳) بی‌درنگ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم برای هر $i \in \{1, ..., n\}$، تابع $\varphi_i : X^{n+1} \to [0, \infty)$ به گونه‌ای باشد که شرایط:

$$\begin{cases} \Phi_i = \Phi_i(x_1, ..., x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n, u) = \\ \omega(1 a_1^{3(m+1)} ... a_i^{3(m+1)} a_{i+1}^{3m} ... a_n^{3m} \varphi_i(a_1 x_1, ..., a_{i-1} x_{i-1}, x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n), w_i)(u); \\ \Psi_1^m = \Psi_1^m(x_1, 0, x_2, ..., x_n, u) = \Phi_1; \\ \Psi_i^m = \Psi_i^m(x_1, ..., x_i, 0, x_{i+1}, ..., x_n, u) = T(\Phi_i, \Psi_{i-1}^m); \\ \lim_{m \to \infty} \Psi_n^m = 1; \end{cases}$$

$$\lim_{m \to \infty} \omega(\frac{1}{a_1^{3m} ... a_n^{3m}} \varphi_i(a_1^m x_1, ..., a_i^m x_i, a_i^m y_i, ..., a_n^m x_n), w_i)(u) = 1;$$

$$\begin{cases} \Psi_*^1 = \Psi_*^1(x_1, ..., x_n, 0, u) = \Psi_n^1; \\ \Psi_*^m = \Psi_*^m(x_1, ..., x_n, 0, u) = T(\Psi_n^m, \Psi_*^{m-1}); \\ \Psi = \Psi(x_1, ..., x_n, 0, u) = \lim_{m \to \infty} \Psi_*^m = 1. \end{cases}$$

برای هر $u > 0$، هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، برقرار باشند. فرض کنیم $f : X^n \to Y$ نگاشتی باشد که برای هر $x_i, y_i, w_i \in X$ و هر $a_i \in \mathbb{K}$، که $a_i \neq 0, \pm 1$، در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \nu(f(a_1 x_1 + y_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1 + a_1 y_1, x_2, ..., x_n) - \\ (a_1 + 1)(a_1 - 1)^2 (f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, x_2, ..., x_n)) - \\ a_1 (a_1 + 1) f(x_1 + y_1, x_2, ..., x_n), w_1)(u) \geq \omega(\varphi_1(x_1, y_1, x_2, ..., x_n), w_1)(u); \\ \vdots \\ \nu(f(x_1, ..., x_{n-1}, a_n x_n + y_n) + f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + a_n y_n) - \\ (a_n + 1)(a_n - 1)^2 (f(x_1, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_{n-1}, y_n)) - \\ a_n (a_n + 1) f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + y_n), w_n)(u) \geq \omega(\varphi_n(x_1, ..., x_n, y_n), w_n)(u); \end{cases}$$

فرض کنیم $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ اگر $x_i = 0$ برای برخی $i = 1, ..., n$. آنگاه نگاشت یکتای $T : X^n \to Y$ موجود است به‌گونه‌ای که در دستگاه (۱.۱) صدق می‌کند و برای هر $x_i, w_i \in X, i = 1, ..., n$ رابطه زیر برقرار است:

$$\nu(f(x_1, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_n), w_i)(u) \geq \Psi.$$

فهرست منابع

[1] S. Gähler, 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, Math. Nachr. 26 (1963) 115-148.

[2] S. Gähler, Lineare 2-normierte Räumen, Math. Nachr. 28 (1964) 1-43.

[3] S. Gähler, Über 2-Banach-Räume, Math. Nachr. 42 (1969) 335-347.

[4] A. White, 2-Banach spaces, Doctorial Diss., St. Louis Univ., 1968.

[5] A. White, 2-Banach spaces, Math. Nachr. 42 (1969) 43-60.

[6] Z. Lewandowska, Linear operators on generalized 2-normed spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 42(4), 353-368 (1999).

[7] Z. Lewandowska, Generalized 2-normed spaces, Slupskie Prace Matematyczno- Fizyczne 1, 33-40 (2001).

[8] Z. Lewandowska, On 2-normed sets, Glas. Mat. Ser. III 38 (1) 99-110 (2003).

[9] Z. Lewandowska, Banach-Steinhaus theorems for bounded linear operators with values in a generalized 2-normed space, Glas. Mat. Ser. III 38 (2) 329-340 (2003).

[10] Z. Lewandowska, Bounded 2-linear operators on 2–normed sets, Glas. Mat. Ser. III 39 (2) 301-312 (2004).

[11] W. -G. Park, Approximate additive mappings in 2-Banach spaces and related topics, J. Math. Anal. Appl. 376 (2011) 193-202.

[12] K. Hensel, Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, Jahresber. Deutsch. Math. Verein 6 (1897) 83-88.

[13] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov, p-adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, 1994.

[14] A. Khernikov, non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[15] R. W. Freese, Y. Cho, Geometry of Linear 2-Normed Spaces, Nova Science Publishers, 2001.

[16] A. N. Srstnev, On the motion of a random normed space, Dokl. Akad. Nauk SSSR 149 (1963), 280-283 English translation in Soviet Math. Dokl. 4 (1963) 388-390.

[17] C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar, On the definition of a probabilistic normed space, Aequationes Math. 46 (1993) 91-98.

[18] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, NewYork, 1983.

[19] M. Eshaghi Gordji, M. B. Ghaemi, Y. J. Cho and H. Majani, A General System of Euler–Lagrange-Type Quadratic Functional Equations in Menger Probabilistic Non-Archimedean 2-Normed Spaces, Abs. Appl. Anal., Volume 2011, Article ID 208163, 21 pages.

[20] O. Hadzić , A fixed point theorem in Menger spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) T 20 (1979) 107-112.

[21] O. Hadzić, Fixed point theorems for multivalued mappings in probabilistic metric spaces, Fuzzy Set. Syst. 88 (1997) 219-226.

[22] S. M. Ulam, Problems in Modern Mathematics, Chapter VI, Science Editions, Wiley, New York, 1964.

[23] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Natl. Acad. Sci. 27 (1941) 222-224.

[24] T. Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan 2 (1950) 64-66.

[25] Th. M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978) 297-300.

[26] P. Găvruta, A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, J. Math. Anal. Appl. 184 (1994) 431-436.

[27] L. M. Arriola and W. A. Beyer, Stability of the Cauchy functional equation over p-adic fields, Real Anal. Exchange 31 (2005/2006), 125-132.

[28] M. Eshaghi Gordji, M. B. Ghaemi and H. Majani, Generalized Hyers-Ulam-Rassias Theorem in Menger Probabilistic Normed Spaces, Discrete Dyn. Nat. Soc., Volume 2010, Article ID 162371, 11 pages.

[29] M. Eshaghi Gordji, M. B. Ghaemi, H. Majani and C. Park, Generalized Ulam–Hyers Stability of Jensen Functional Equation in Serstnev PN Spaces, J. Ineq. Appl., Volume 2010, Article ID 868193, 14 pages.

[30] M. Eshaghi and H. Khodaei, Solution and stability of generalized mixed type cubic, quadratic and additive functional equation in quasi-Banach spaces, Nonlinear Anal. 71 (2009) 5629-5643.

[31] H. Khodaei, On the stability of additive, quadratic, cubic and quartic set-valued functional equations, Results Math. 68 (2015) 1-10.

[32] K. -W. Jun and H. -M. Kim, On the stability of Euler-Lagrange type cubic mappings in quasi-Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 1335-1350.

Stability of a System of Euler-Lagrange Type Cubic Functional Equations in non-Archimedean 2-Normed Spaces

Hamid Majan [†]

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 2019/2/6 Accepted: 2020/9/11

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: Freese and Cho have introduced the non-Archimedean 2-normed spaces and Eshaghi, et al. have introduced the Menger probabilistic non-Archimedean 2-normed spaces. In this paper, we prove the generalized Hyers-Ulam-Rassias stability for a system of Euler-Lagrange type cubic functional equations in the non-Archimedean 2-normed spaces. Also, we prove the generalized Hyers-Ulam-Rassias stability for this system in the Menger probabilistic non–Archimedean 2–normed spaces.

Keywords: Euler-Lagrange type cubic functional equations, Non-Archimedean 2-Normed spaces, Menger Probabilistic Non-Archimedean 2–Normed spaces, Generalized Hyers-Ulam-Rassias stability.

Mathematics Subject Classification (2010):39B72, 46S10, 54E70.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: h.majani@scu.ac.ir (H. Majani)