مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۱، ص ۴۰-۴۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2020.32050.1788

توابع موضعاً ثابت و فضاهای oc-پارافشرده

رستم محمدیان [×]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۶/۲۱
دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

چکیده: در این مقاله به بررسی و مطالعه حلقه $LC(X)$، متشکل از تمام توابع موضعاً ثابت حقیقی‌مقدار، روی فضای توپولوژی X می‌پردازیم. نشان می‌دهیم X یک فضای همبند است اگر و تنها اگر $LC(X) = \mathbb{R}$. در صورتی‌که فضای X هاسدورف و کاملاً منظم باشد، نشان می‌دهیم حلقه $LC(X)$ همواره منظم فون‌نویمان است و ثابت می‌کنیم $LC(X) = \bigcap_{x\in N} (\mathbb{R} + O_x)$ که در آن N مجموعه نقاط نامنفرد فضای X است. همچنین نشان می‌دهیم X یک P-فضا است اگر و تنها اگر $LC(X) = C(X)$، که در آن $C(X)$ نشان‌دهنده‌ی حلقه تمام توابع پیوسته حقیقی‌مقدار روی فضای X است. با فرض آن‌که $C^F(X)$ نشان‌دهنده‌ی حلقه توابع پیوسته حقیقی‌مقدار با برد متناهی روی فضای X باشد، نشان می‌دهیم X یک فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده است اگر و تنها اگر $LC(X) = C^F(X)$. ثابت می‌کنیم که اگر X یک فضای لیندلف باشد، آن‌گاه X یک CP-فضا است اگر و تنها اگر $LC(X) = C_c(X)$، که در آن $C_c(X)$ نشان‌دهنده‌ی حلقه توابع پیوسته حقیقی‌مقدار با برد شمارا روی فضای X است. مفهوم فضاهای oc-پارافشرده را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم فضای oc-پارافشرده‌ی X، فشرده است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف شبه‌فشرده باشد. سرانجام نشان می‌دهیم فضای صفربعدی و شمارای نوع دوم X نیز، فشرده است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف شبه‌فشرده باشد.

واژه‌های کلیدی: تابع موضعاً ثابت، P-فضا، فضای oc-پارافشرده، فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده.

رده‌بندی ریاضی: $54C40; 54D20; 54A05$

۱ مقدمه

در منابع [۷] و [۱۰]، مجموعه توابع موضعاً ثابت از فضای هاسدورف و فشرده‌ی X به فضای متری M با $E_\circ(X, M)$ و در حالتی که $M = \mathbb{R}$ با $E_\circ(X)$ نمایش داده شده است. تابع موضعاً ثابت f در این منابع به این معنا است که به‌ازای هر x در یک زیرمجموعه چگال X، مجموعه باز U شامل x موجود باشد که f روی U ثابت است. مجموعه همه توابع پیوسته از فضای هاسدورف و فشرده‌ی X به فضای متری M با $C(X, M)$ و در حالتی که $M = \mathbb{R}$ با $C(X)$ نشان داده شده است. آشکار است که $E_\circ(X, M) \subseteq C(X, M)$

[×] نویسنده مسئول مقاله، رایانامه: mohamadian_r@scu.ac.ir (R. Mohamadian)

و دسته‌ای از فضاها در این منابع معرفی می‌شوند که به‌ازای آن‌ها تساوی $E_\circ(X,M)=C(X,M)$ برقرار است. در این منابع وقتی M فضای باناخ باشد، ویژگی‌های متعدد $E_\circ(X,M)$ به‌عنوان فضای خطی نرم‌دار نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در منبع [۱۰] دو سوال مطرح شده است. سوال اول این‌که آیا $E_\circ(X)$ همیشه نقاط X را جدا می‌کند؟ و سوال دوم این‌که آیا $E_\circ(X)$ همواره دارای یک تابع غیرثابت است؟ هدف مقاله [۱۰] در واقع این بوده است که نشان دهد پاسخ هر دو پرسش منفی است. ما با الهام از مجموعه $E_\circ(X)$، مجموعه توابع موضعاً ثابت را روی یک فضای توپولوژی معرفی کرده و به مطالعه آن می‌پردازیم. این مجموعه در واقع یک حلقه است که ابتدا آن را به‌صورت اشتراکی از حلقه‌های شناخته شده نمایش می‌دهیم و سپس بسیاری از فضاهای توپولوژی را با کمک برابری این حلقه با حلقه‌های شناخته شده دیگر شناسایی می‌کنیم.

در مقاله حاضر X یک فضای توپولوژی است که هاسدورف و کاملاً منظم در نظر گرفته می‌شود. $\mathbb{R}^X$ بیانگر مجموعه تمام توابع حقیقی‌مقدار روی فضای توپولوژی X است. $C(X)$ نشان‌دهنده‌ی حلقه تمام توابع حقیقی‌مقدار پیوسته، روی فضای توپولوژی X است. همچنین نمادهای $C^*(X)$، $C^F(X)$ و $C_c(X)$ را به‌ترتیب برای زیرحلقه‌های $C(X)$، شامل توابع پیوسته کران‌دار، توابع پیوسته با برد متناهی و توابع پیوسته با برد شمارا روی فضای X به‌کار می‌بریم. اگر $A\subseteq X$، آن‌گاه مجموعه نقاط حدی، بستاری و درونی A را به‌ترتیب با A'، $\bar{A}$ و A° نشان می‌دهیم. برای هر $f\in C(X)$، مجموعه $Z(f)=\{x\in X:f(x)=\circ\}$ را صفرمجموعه‌ی f می‌نامیم. این مجموعه بسته است و متمم آن را با $coz(f)$ نشان می‌دهیم. به‌جای $(Z(f))^\circ$ می‌نویسیم $Z^\circ(f)$. همچنین برای هر $x\in X$، مجموعه‌های $M_x=\{f\in C(X):x\in Z(f)\}$ و $O_x=\{f\in C(X):x\in Z^\circ(f)\}$ دو ایدآل حلقه $C(X)$ هستند. البته M_x ایدآل ماکسیمال حلقه $C(X)$ و به‌وضوح شامل O_x است. فضای X را یک P-فضا می‌گوییم، هرگاه هر $Z(f)$، یک مجموعه باز باشد یا به‌طور معادل برای هر $x\in X$، داشته باشیم $M_x=O_x$.
برای اطلاعات بیش‌تر درباره‌ی حلقه $C(X)$ و P-فضاها، به مرجع [۶] و سایر حلقه‌های فوق به منابع [۴]، [۵]، [۸] و [۹] رجوع شود. همچنین برای جزئیات بیش‌تر درباره‌ی فضاهای توپولوژی به [۳] و [۱۱] مراجعه شود. نمادهای اصلی برگرفته از منبع [۶] هستند.

۲ توابع موضعاً ثابت

در این بخش به برخی از خواص توابع موضعاً ثابت می‌پردازیم. برای اطلاعات تکمیلی مراجع [۷] و [۱۰] ملاحظه شوند. با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد، تابع $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را موضعاً ثابت می‌گوییم اگر برای هر $x\in X$، مجموعه باز G در X شامل x موجود باشد به‌طوری که f روی G ثابت باشد، به‌عبارت دیگر تحدید f روی G که با $f|_G$ نشان داده می‌شود، ثابت باشد.

مجموعه توابع موضعاً ثابت روی فضای توپولوژی X را با $LC(X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین تابع f روی G ثابت است، اگر و تنها اگر روی $\overline{G}$ ثابت باشد و بنابراین اگر G در X چگال باشد، یعنی $\overline{G}=X$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که f تابعی ثابت است.

نکته ۲.۲. هر تابع موضعاً ثابت $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$، پیوسته است. برای این منظور فرض کنیم $V\subseteq\mathbb{R}$ باز باشد، باید نشان دهیم $f^{-1}(V)$ در X باز است. گیریم $x_\circ\in f^{-1}(V)$ بنابراین $f(x_\circ)=r\in V$. در این‌صورت مجموعه باز G در X شامل $x_\circ$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x\in G$ داریم $f(x)=r$. در نتیجه $x_\circ\in G\subseteq f^{-1}(V)$، پس مجموعه $f^{-1}(V)$ در X باز است. بنابراین $LC(X)\subseteq C(X)$.

در ادامه چند معادل برای توابع موضعاً ثابت بیان می‌کنیم. پیش از آن تعریف حلقه منظم فون‌نویمان را می‌آوریم. فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد. عضو $a\in\mathbb{R}$ را منظم فون‌نویمان می‌گوییم، هرگاه $b\in\mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که $a=a^2b$. حلقه را منظم فون‌نویمان می‌گوییم، هرگاه هر عضو آن منظم فون‌نویمان باشد. ثابت شده است $f\in C(X)$ منظم فون‌نویمان است اگر و تنها اگر $Z(f)=Z^\circ(f)$. در واقع حلقه $C(X)$ منظم فون‌نویمان است اگر و تنها اگر فضای X یک P-فضا باشد.

گزاره ۳.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{X}}$. در این‌صورت احکام زیر معادل‌اند:
(الف) f تابعی موضعاً ثابت است.
(ب) $f^{-1}(\{r\})$، برای هر $r\in\mathbb{R}$ در X باز است.
(پ) برای هر $A\subseteq\mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}(A)$ باز است.
(ت) برای هر $A\subseteq\mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}(A)$ بسته است.
(ث) برای هر $x_\circ\in X$، صفرمجموعه $Z(f-f(x_\circ))$ در X باز است.
(ج) برای هر $x_\circ\in X$، عنصر $f-f(x_\circ)$ در $C(X)$ منظم فون نویمان است.

اثبات. (ت $\Longleftarrow$ الف) گیریم $x \in X$ و $f(x) = r$. قرار می‌دهیم $A = \mathbb{R} - \{r\}$، در این‌صورت $f^{-1}(A)$ هم باز و هم بسته است، پس $f^{-1}(A) = Z(e)$، که در آن $e \in C(X)$ یک خودتوان است. اکنون با فرض $G = coz(e)$ داریم $x \in G$ و f روی G به‌وضوح ثابت است. بنابراین f تابعی موضعاً ثابت است.

(الف $\Longleftarrow$ ت) گیریم $x_\circ \in \overline{f^{-1}(A)}$. از طرفی مجموعه باز G شامل $x_\circ$ وجود دارد که برای هر $x \in G$ داریم $f(x) = f(x_\circ)$. اکنون فرض کنیم $t \in G \cap f^{-1}(A)$، پس $f(t) = f(x_\circ) \in A$، در نتیجه $x_\circ \in f^{-1}(A)$. بنابراین $f^{-1}(A)$ بسته است.
بقیه قسمت‌ها سرراست هستند. □

گزاره ۴.۲. فضای X گسسته است اگر و تنها اگر هر تابع حقیقی‌مقدار روی X، تابعی موضعاً ثابت باشد، به‌عبارت دیگر داشته باشیم $LC(X) = \mathbb{R}^X$.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنیم $f \in \mathbb{R}^X$ و $x_\circ \in X$ طبق فرض $G = \{x_\circ\}$ باز شامل $x_\circ$ و f روی آن ثابت است، پس $f \in LC(X)$.

($\Longrightarrow$) گیریم $x_\circ \in X$ دلخواه باشد. اکنون تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(t) = \begin{cases} ۱ & , \quad t \neq x_\circ \\ \circ & , \quad t = x_\circ \end{cases}$، طبق فرض موضعاً ثابت است. آشکار است که مجموعه $\{x_\circ\} = f^{-1}(\{\circ\})$ باز است و در نتیجه فضای X گسسته است. □

فضای توپولوژی X را همبند می‌گوییم، هرگاه نتوان آن را به‌صورت اجتماع دو زیرمجموعه باز، ناتهی و مجزا نوشت. هر تابع ثابت، تابعی موضعاً ثابت است و درستی عکس آن، معادل است با این‌که فضای X همبند باشد. این حکم را در گزاره زیر ثابت می‌کنیم.

گزاره ۵.۲. فضای ناتهی X همبند است اگر و تنها اگر هر تابع موضعاً ثابت، تابعی ثابت باشد. به‌عبارت دیگر داشته باشیم $LC(X) = \mathbb{R}$.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنیم فضای ناتهی X همبند و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ موضعاً ثابت باشد و $f(x_\circ) = r$ که در آن $x_\circ \in X$. پس $f^{-1}(\{r\}) \neq \phi$ در X هم باز و هم بسته است. بنابراین همبندی X نتیجه می‌دهد که $f^{-1}(\{r\}) = X$ و این یعنی f ثابت است.

($\Longrightarrow$) به‌فرض خلاف که X ناهمبند باشد. پس مجموعه‌های باز، ناتهی و مجزای G, H وجود دارند که $X = G \cup H$. حال تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad x \in G \\ \circ & , \quad x \in H \end{cases}$ موضعاً ثابت است، اما ثابت نیست و این تناقض است. □

۳ حلقه $LC(X)$

دیدیم که هر تابع موضعاً ثابت، پیوسته است. به‌علاوه مجموعه $LC(X)$، تحت اعمال جمع و ضرب بسته است، پس یک زیرحلقه $C(X)$ می‌شود که به‌وضوح شامل توابع ثابت، یعنی $\mathbb{R}$ است، بنابراین $\mathbb{R} \subseteq LC(X) \subseteq C(X)$. در واقع $LC(X)$ یک زیرجبر $C(X)$ است. خاطر نشان کنیم که اگر I یک ایدآل حلقه $C(X)$ باشد، آنگاه $\mathbb{R} + I$ یک زیرحلقه $C(X)$ است. آشکار است که اگر M ایدآل ماکسیمال حلقه $C(X)$ باشد، آنگاه $\mathbb{R} + M = C(X)$. برای اطلاعات بیش‌تر در این خصوص، می‌توان مرجع [۲] را دید.

گزاره ۱.۳. $LC(X) = \bigcap_{x \in X} (\mathbb{R} + O_x)$.

اثبات. فرض کنیم $f \in LC(X)$ و $x_\circ \in X$ دلخواه باشد. پس مجموعه باز G شامل $x_\circ$ وجود دارد که برای هر $x \in G$ داریم $f(x) = f(x_\circ)$. قرار می‌دهیم $g = f - f(x_\circ)$. در این‌صورت واضح است که $g \in C(X)$ و $x_\circ \in G \subseteq Z(g)$. بنابراین $x_\circ \in Z^\circ(g)$، پس $g \in O_{x_\circ}$. با فرض $f(x_\circ) = r \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌شود $f = r + g \in \mathbb{R} + O_{x_\circ}$، به این ترتیب داریم $f \in \bigcap_{x \in X} (\mathbb{R} + O_x)$. به‌عکس فرض کنیم $f \in \bigcap_{x \in X} (\mathbb{R} + O_x)$ و $x_\circ \in X$ دلخواه باشد. پس $f \in \mathbb{R} + O_{x_\circ}$ و بنابراین $f = r + g$ که $g \in O_{x_\circ}$ و $r \in \mathbb{R}$. اکنون با فرض $G = Z^\circ(g)$ داریم $x_\circ \in G$ و برای هر $t \in G$ واضح است که $f(t) = r$. به این ترتیب خواهیم داشت $f \in LC(X)$. □

فرض کنیم $x_\circ \in X$ نقطه منفرد، $f \in C(X)$ دلخواه باشد و $f(x_\circ) = r$، آن‌گاه $x_\circ \in Z^\circ(f - r)$، پس $f - r \in O_{x_\circ}$. از طرف دیگر واضح است که $f = (f - r) + r \in \mathbb{R} + O_{x_\circ}$، در نتیجه $\mathbb{R} + O_{x_\circ} = C(X)$. به این ترتیب می‌توان اشتراک فوق را فقط به نقاط نامنفرد تقلیل داد. اگر مجموعه تمام نقاط نامنفرد فضای X را با N نشان دهیم، آن‌گاه نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲.۳. $LC(X) = \bigcap_{x \in N} (\mathbb{R} + O_x)$.

مثال ۳.۳. الف) فرض کنیم X فضای فشرده‌ساخت تک‌نقطه‌ای یک فضای گسسته و تنها نقطه نامنفرد آن σ باشد. در این‌صورت $LC(X) = \mathbb{R} + O_\sigma$.

ب) فرض کنیم W فضای اوردینال‌های شمارش‌پذیر باشد، در این صورت $LC(W) = \bigcap_{x\in N} (\mathbb{R} + O_x)$، که در آن N مجموعه اوردینال‌های حدی در W است.

۴ ارتباط زیرحلقه $LC(X)$ با زیرحلقه‌های دیگر $C(X)$

در گزاره‌های ۴.۲ و ۵.۲ در بخش‌های قبل به برخی روابط میان حلقه $LC(X)$ با دیگر حلقه‌ها اشاره کردیم. اکنون گزاره‌های دیگری در این خصوص ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱.۴. فضای X یک P-فضا است اگر و تنها اگر هر تابع پیوسته حقیقی‌مقدار روی X، تابعی موضعاً ثابت باشد. به‌عبارت دیگر داشته باشیم $LC(X) = C(X)$.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ برای هر $X \in x$ داریم $M_x = O_x$، بنابراین $\mathbb{R} + O_x = \mathbb{R} + M_x$. در نتیجه طبق گزاره ۱.۳ داریم $LC(X) = C(X)$.

$(\Longrightarrow)$ گیریم $f \in C(X) = LC(X)$ دلخواه باشد. چون $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$، پس $Z(f)$ باز است، در نتیجه یک P-فضا است. □

فضای X را شبه‌فشرده می‌گوییم، هرگاه هر تابع پیوسته روی آن، کران‌دار باشد؛ به‌عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم $C(X) = C^*(X)$. با توجه به گزاره ۱.۴، وقتی P-فضای X شبه‌فشرده باشد، آن‌گاه فضا متناهی است و به‌وضوح $LC(X) = C^*(X)$. در مثال بعد نشان می‌دهیم که در حالت کلی، ممکن است تساوی برقرار نباشد.

مثال ۲.۴. ابتدا فرض کنیم $X = \mathbb{R}$، در این‌صورت چون $\mathbb{R}$ همبند است، طبق گزاره ۵.۲، نتیجه می‌شود $LC(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. اگر تعریف کنیم $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$، برای هر $x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه به‌وضوح $f \in C^*(\mathbb{R})$، اما $f \notin LC(\mathbb{R})$. اکنون فرض کنیم $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n, 2n+1)$، در این صورت اگر تابع f را با ضابطه $f(x) = [x]$ در نظر بگیریم، آن‌گاه بدیهی است که $f \in LC(X)$، اما $f \notin C^*(X)$.

ملاحظه ۳.۴. برای هر فضای X همواره داریم $C^F(X) \subseteq LC(X)$. زیرا اگر $f \in C^F(X)$ و $x_0 \in X$ دلخواه باشند، آن‌گاه چون $f(X)$ متناهی است، با فرض $f(X) = \{r_1, \dots, r_n\}$ واضح است که $f(X)$ زیرفضای گسسته $\mathbb{R}$ است. بنابراین $1 \le i \le n$ وجود دارد که $x_0 \in f^{-1}(\{r_i\})$ و چون $f^{-1}(\{r_i\})$ باز است، پس $f \in LC(X)$.

تعریف ۴.۴. فضای X را یک CP-فضا می‌نامیم، هرگاه برای هر $f \in C_c(X)$ ، صفرمجموعه $Z(f)$ باز باشد.

برای اطلاعات بیش‌تر درباره CP- فضاها، مراجع [۱]، [۴] و [۵] دیده شود.

گزاره ۵.۴. فضای X یک CP-فضا است اگر و تنها اگر هر تابع پیوسته حقیقی‌مقدار با برد شمارا روی X، تابعی موضعاً ثابت باشد. به‌عبارت دیگر داشته باشیم $C_c(X) \subseteq LC(X)$.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنیم $f \in C_c(X)$ و $x_0 \in X$. قرار می‌دهیم $g = f - f(x_0)$. در این‌صورت $g \in C_c(X)$ و $g(x_0) = 0$. اکنون مجموعه $G = Z(f) = Z^\circ(f)$ باز و شامل x_0 است که f روی آن ثابت است، در نتیجه $f \in LC(X)$.

$(\Longrightarrow)$ بدیهی است. □

هر P-فضای فشرده متناهی است، اما برای CP-فضاها چنین نیست. به‌عنوان نمونه فضای $X = [0, 1] \cup \{2\}$ به‌عنوان زیرفضای $\mathbb{R}$ یک CP-فضای فشرده و نامتناهی است. از طرف دیگر ثابت شده است که اگر فضای توپولوژی X پراکنده (فضای X را پراکنده گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی آن دارای نقطه منفرد باشد) و فشرده باشد، آن‌گاه $C_c(X) = C(X)$. از این رو دو گزاره ۱.۴ و ۵.۴ با هم نتیجه می‌دهند که هر CP-فضای فشرده و پراکنده، یک P-فضا و در نتیجه متناهی است.

گزاره ۶.۴. اگر X یک فضای لیندلف باشد، آن‌گاه $LC(X) \subseteq C_c(X)$.

اثبات. فرض کنیم $f \in LC(X)$ دلخواه باشد. برای هر $x \in X$ فرض کنیم G_x مجموعه باز شامل x در X باشد به‌طوری که برای هر $t \in G_x$ داشته باشیم $f(t) = f(x)$. چون $X = \bigcup_{x\in X} G_x$ و X لیندلف است، پس $x_۱, x_۲, \ldots \in X$ وجود دارند آن چنان‌که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} G_{x_n}$. اکنون بدیهی است که $f(X) \subseteq \{f(x_۱), f(x_۲), \ldots\}$. در نتیجه $f \in C_c(X)$. □

دو گزاره ۵.۴ و ۶.۴ با هم نتیجه می‌دهند که فضای لیندلف X، یک CP–فضا است اگر و تنها اگر داشته باشیم $LC(X) = C_c(X)$.

گزاره ۷.۴. فرض کنیم $f \in C(X)$. در این‌صورت:

(الف) اگر $f(X) \cap (f(X))' = \phi$، به‌عبارت دیگر اگر $f(X)$ گسسته باشد، آن‌گاه $f \in LC(X)$. بنابراین اگر $(f(X))' = \phi$، آن‌گاه $f \in LC(X)$، اما عکس آن در حالت کلی درست نیست. برای نمونه فرض کنیم $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty}[۲n-۱, ۲n)$ و تابع $f \in C(X)$ با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{[x]}$ باشد. در این صورت $f \in LC(X)$، در حالی که $۰ \in (f(X))'$.

(ب) $f \notin LC(X)$ اگر و تنها اگر $x_۰ \in X$ موجود باشد به‌طوری که $x_۰ \in (f^{-۱}(f(X) - \{f(x_۰)\}))'$.

(پ) اگر f تابعی باز باشد، یعنی تصویر هر بازی در X یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $f \notin LC(X)$.

مثال ۸.۴. در گزاره ۶.۴ ممکن است تساوی برقرار نباشد. به‌عنوان نمونه فرض کنیم $X = \{۰, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots\}$ زیرفضای $\mathbb{R}$ باشد و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت $f(x) = x$ تعریف شود. در این‌صورت آشکارا X لیندلف است و $f \in C_c(X)$، در حالی‌که $f \notin LC(X)$؛ چرا که هیچ مجموعه باز شامل $x_۰ = ۰$ وجود ندارد که f روی آن ثابت باشد.

در اثبات لم بعد از لم چسب استفاده می‌کنیم که برای یادآوری ابتدا صورت آن را می‌آوریم. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی، $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و A و B دو زیرفضای X باشند که $A \cup B = X$. اگر تحدیدهای f به A و B هر دو پیوسته و A و B هر دو در X باز و یا هر دو بسته باشند، آن‌گاه f نیز پیوسته خواهد بود.

لم ۹.۴. اگر $f, g \in LC(X)$ و $Z(g) \subseteq Z(f)$، آن‌گاه $h \in LC(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f = gh$.

اثبات. تابع $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت
$$h(x) = \begin{cases} ۰ & , \quad x \in Z(f) \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} & , \quad x \in coz(f) \end{cases}$$
تعریف می‌کنیم. با توجه به این که مجموعه $Z(f) = f^{-۱}(\{۰\})$ باز است، پس $coz(f)$ بسته است و ازاین‌رو تابع h، طبق لم چسب پیوسته است. از طرفی واضح است که $f = gh$. کافی است نشان دهیم $h \in LC(X)$. گیریم $x_۰ \in X$ دلخواه باشد. پس مجموعه‌های باز G و H شامل $x_۰$ وجود دارند به‌طوری که $f|_G = f(x_۰)$ و $g|_H = g(x_۰)$، در این‌صورت دو حالت پیش می‌آید، اگر $x_۰ \in Z(f)$، آن‌گاه $G \subseteq Z(f) \subseteq Z(h)$، پس $h|_G = h(x_۰) = ۰$ و اگر $x_۰ \in coz(f)$، آن‌گاه $h|_{G\cap H} = \frac{f(x_۰)}{g(x_۰)} = h(x_۰)$. مجموعه $G \cap H$ باز و شامل $x_۰$ است و این اثبات را تمام می‌کند. □

نتیجه ۱۰.۴. $LC(X)$ یک حلقه منظم فون‌نویمان است.

اثبات. فرض کنیم $f \in LC(X)$ دلخواه باشد. چون $Z(f^۲) = Z(f)$، با توجه به لم ۹.۴ $h \in LC(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f = f^۲h$. □

۵ فضاهای oc–پارافشرده

خانواده $\{A_s | s \in S\}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X را یک پوشش برای X می‌گوییم هرگاه داشته باشیم $X = \bigcup_{s\in S} A_s$؛ و گوییم این خانواده موضعاً متناهی است اگر برای هر نقطه $x \in X$، یک همسایگی از x موجود باشد به‌طوری که این همسایگی، فقط تعداد متناهی از اعضای خانواده فوق را قطع کند. همچنین اگر $A = \{A_s : s \in S\}$ و $B = \{B_t : t \in T\}$ دو پوشش برای فضای X باشند، گوییم B یک تظریف A است، هرگاه برای هر $t \in T$ یک $s \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری که داشته باشیم

$B_t \subseteq A_s$. فضای توپولوژی X را پارافشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن، دارای یک تظریف موضعاً متناهی از بازها باشد. مفهوم فضاهای پارافشرده در مبحث توپولوژی پیشرفته، بسیار مهم است. برای اطلاعات کافی و سایر جزئیات، مراجع [۳] و [۱۱] ملاحظه شود. در این بخش مفهوم جدید فضای oc– پارافشرده را معرفی کرده و برخی ارتباط‌های آن را با سایر مفاهیم مهم توپولوژی، از جمله فشردگی بررسی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که به‌واسطه فضاهای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده به حلقه توابع موضعاً ثابت نیز ارتباط پیدا می‌کند.

تعریف ۱.۵. فضای X را oc –پارافشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن، یک تظریف موضعاً متناهی از مجموعه‌های باز و بسته داشته باشد.

مثال ۲.۵. (الف) هر فضای oc–پارافشرده، پارافشرده است.
(ب) هر فضای گسسته و ناشمارا oc–پارافشرده است، اما فشرده نیست.
(پ) هر فضای oc–پارافشرده با حداقل دو عضو، ناهمبند است.
(ت) فضای $\mathbb{R}$ پارافشرده است، اما oc–پارافشرده نیست.
(ث) فضای فشرده‌ی $X = \left\{ ۰, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \dots \right\}$، به‌عنوان زیرفضای $\mathbb{R}$، یک فضای oc–پارافشرده است.

مورد (ث) را مستدل می‌کنیم، استدلال بقیه موارد سرراست هستند. برای این منظور، فرض کنیم $X = \bigcup_{n=۰}^{\infty} G_n$ که G_nها در X باز باشند. البته چون X شماراست می‌توان پوشش را شمارا در نظر گرفت. بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض کنیم مثلاً $۰ \in G_۰$، چون $G_۰$ در X باز و شامل ۰ است، پس $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $G_۰ = \left\{ ۰, \frac{۱}{n_۰}, \frac{۱}{n_۰ + ۱}, .. \right\}$. قرار می‌دهیم $H_{t_۰} = G_۰$ و $H_{t_n} = \left\{ \frac{۱}{n} \right\}$ برای هر $n < n_۰$. اکنون آشکار است که $X = H_{t_۰} \cup H_{t_۱} \cup \ldots \cup H_{t_{n_۰-۱}}$ و $H_{t_۰}, H_{t_۱}, \ldots, H_{t_{n_۰-۱}}$ باز و بسته هستند و افزون بر این برای هر n یک t_n وجود دارد که $H_{t_n} \subseteq G_n$. این یعنی X یک فضای oc–پارافشرده است.

فضای توپولوژی X را صفربعدی می‌گوییم، هرگاه دارای یک پایه از زیرمجموعه‌های باز و بسته باشد.

گزاره ۳.۵. (الف) هر فضای oc–پارافشرده و شبه‌فشرده، یک فضای فشرده است.
(ب) هر فضای صفربعدی و فشرده، oc–پارافشرده است.
(پ) هر فضای صفربعدی و پارافشرده، oc–پارافشرده است.
(ت) تصویر پیوسته، بسته و باز هر فضای oc –پارافشرده، oc–پارافشرده است.
(ث) هر زیرفضای بسته و باز یک فضای oc–پارافشرده، oc–پارافشرده است.

اثبات. فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم بقیه موارد سرراست هستند. فرض کنیم $X = \bigcup_{\alpha \in S} G_\alpha$، که G_αها در X باز باشند. چون فضا oc–پارافشرده است، پس $X = \bigcup_{t \in T} H_t$ که $\{H_t : t \in T\}$ یک تظریف موضعاً متناهی از باز و بسته‌هاست. چون فضا شبه‌فشرده است، بنا بر قضیه ۳.۱۰.۲۲ از مرجع [۳]، این پوشش متناهی است. بنابراین $X = \bigcup_{k=۱}^{n} H_{t_k}$. چون برای هر $\alpha_k \in S$ یک $t_k \in T$ وجود دارد که $H_{t_k} \subseteq G_{\alpha_k}$، نتیجه می‌شود که $X = \bigcup_{k=۱}^{n} G_{\alpha_k}$، بنابراین X فشرده است. □

تعریف ۴.۵. (الف) فضای X را به‌طور ضعیف شبه‌فشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته، متناهی باشد.
(ب) فضای X را به‌طور ضعیف شبه‌لیندلف می‌گوییم، هرگاه هر پوشش موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته، شمارا باشد.

گزاره ۵.۵. فرض کنیم X فضایی oc–پارافشرده باشد. در این‌صورت:
(الف) X فشرده است اگر وتنها اگر به‌طور ضعیف شبه‌فشرده باشد.
(ب) X لیندلف است اگر وتنها اگر به‌طور ضعیف شبه لیندلف باشد.

اثبات. اثبات (الف) مشابه با اثبات (الف) گزاره ۳.۵ است و اثبات قسمت(ب) مشابه با اثبات قسمت (الف) است. □

لم ۶.۵. گیریم X یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت احکام زیر معادل‌اند:
(الف) X یک فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده است.
(ب) هر خانواده موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته، متناهی است.
(پ) هر پوشش شمارای موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته، متناهی است.
(ت) هر خانواده شمارای موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته، متناهی است.

اثبات. (الف $\Longleftarrow$ ب) گیریم $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ یک خانواده موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته X باشد. قرار می‌دهیم $W = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$. واضح است که W باز و چون خانواده فوق، موضعاً متناهی است، بسته هم می‌باشد. بنابراین این خانواده همراه با $X \setminus W$ یک پوشش موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته و در نتیجه متناهی است. پس حتماً خانواده $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ نیز متناهی است.
(ب $\Longleftarrow$ پ) بدیهی است.
(پ $\Longleftarrow$ ت) مشابه اثبات (الف $\Longleftarrow$ ب) است.
(ت $\Longleftarrow$ الف) بدیهی است. □

نتیجه ۷.۵. احکام زیر برای فضای توپولوژی X معادل‌اند:
(الف) X یک فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده است.
(ب) X نمی‌تواند اجتماع شمارایی از زیرمجموعه‌های باز و بسته دوبه‌دو مجزا باشد.
(پ) هیچ خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های باز و بسته دوبه‌دو مجزای X وجود ندارد.

اکنون به اثبات قضیه اصلی این بخش می‌پردازیم.

قضیه ۸.۵. X یک فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده باشد، اگر و تنها اگر $LC(X) = C^F(X)$.

اثبات. شمول $C^F(X) \subseteq LC(X)$ طبق تذکر ۳.۴ همواره برقرار است. فرض کنیم X یک فضای به‌طور ضعیف شبه‌فشرده باشد و $f \in LC(X)$. واضح است که $\{f^{-1}(\{r\}) : r \in f(X)\}$ یک پوشش موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های باز و بسته برای X است. بنابراین این پوشش متناهی است و از این هم نتیجه می‌شود که $f(X)$ متناهی است، در نتیجه $f \in C^F(X)$. بنابراین $C^F(X) = LC(X)$. اکنون فرض کنیم $LC(X) = C^F(X)$، و به‌فرض خلاف که X به‌طور ضعیف شبه‌فشرده نباشد. پس بنا بر نتیجه قبل یک خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های باز و بسته‌ی و دوبه‌دو مجزای X مانند $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد به‌طوری که $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. در این‌صورت تابع $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت $h(x) = n$ برای هر $x \in U_n$ تعریف می‌کنیم. واضح است که h خوش‌تعریف است و $h \in LC(X) \setminus C^F(X)$ و این تناقض است. □

گزاره ۹.۵. با توجه به قضیه ۸.۵، اگر X فضایی شبه‌فشرده باشد، آن‌گاه $LC(X) = C^F(X)$. اما عکس آن در حالت کلی درست نیست. به‌عنوان نمونه اگر $X = \mathbb{R}$، آن‌گاه $LC(X) = C^F(X) = \mathbb{R}$، در حالی‌که $\mathbb{R}$ شبه‌فشرده نیست.

مقاله را با گزاره بعد که درباره‌ی فضاهای صفربعدی و شمارای نوع دوم است به‌پایان می‌بریم. فضای توپولوژی X را شمارای نوع دوم می‌گوییم، هرگاه دارای یک پایه شمارا باشد.

گزاره ۱۰.۵. فرض کنیم X صفربعدی و شمارای نوع دوم باشد. در این‌صورت:
(الف) X فشرده است اگر وتنها اگر $LC(X) = C^F(X)$.
(ب) X لیندلف است اگر وتنها اگر $LC(X) \subseteq C_c(X)$.

اثبات. قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. اثبات قسمت (ب) مشابه با اثبات قسمت (الف) است. اگر X فشرده باشد، آن‌گاه به‌طور ضعیف شبه‌فشرده است، پس طبق قضیه ۸.۵ داریم $LC(X) = C^F(X)$. برای اثبات عکس حکم، فرض کنیم $X = \bigcup\limits_{\alpha\in S} G_\alpha$ که G_αها در X باز باشند. طبق فرض داریم $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ که B_nها باز و بسته و پایه‌ای هستند و به‌علاوه برای هر $\alpha \in S$، یک $n_\alpha \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $B_{n_\alpha} \subseteq G_\alpha$. قرار می‌دهیم $H_1 = B_1$ و $H_k = B_k - \bigcup\limits_{i<k} B_i$، برای $k > 1$. در این‌صورت H_kها باز و بسته و دوبه‌دو مجزا هستند و به‌علاوه برای هر k داریم $H_k \subseteq B_k$ و $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. اکنون تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با

ضابطه $f(x) = r_k$ برای هر $x \in H_k$، تعریف می‌کنیم. واضح است که $f \in LC(X)$، بنابراین طبق فرض $f \in C^F(X)$، پس $f(X) = \{r_{n_1}, ..., r_{n_m}\}$ که r_{n_i} ها متمایز هستند. در نتیجه بدیهی است که $X = \bigcup_{i=1}^{m} H_{n_i}$، بنابراین خواهیم داشت $X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{n_i}$، پس $X = \bigcup_{\alpha \in A \subseteq S} G_\alpha$ که A متناهی است. در نتیجه X فشرده است. $\square$

سپاسگزاری

نویسنده وظیفه اخلاقی خود می‌داند تا از داوران محترم این مقاله، به‌خاطر نظرات و توصیه‌های تخصصی و سازنده‌اشان که در غنی‌تر شدن محتوای مقاله نقشی شایسته داشت، تشکر و قدردانی نماید. همچنین بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه ($GN : SCU.MM$۹۹۰۶۴۸) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌گردد.

فهرست منابع

[1] F. Azarpanah and O.A.S. Karamzadeh and Z. Keshtkar and A.R. Olfati, On maximal ideals of $C_c(X)$ and the uniformity of its localizations, Rocky Mt. J. Math., **48** (2018) 345–384.

[2] F. Azarpanah and M. Namdari and A.R. Olfati, On Subrings of the form $I + \mathbb{R}$ of $C(X)$, Journal of Commutative Algebra, **11(4)** (2019) 479–509.

[3] R. Engelking, General Topology, Sigma Ser. Pure Math,Vol. 6, Heldermann, Berlin, 1989.

[4] M. Ghadermazi and O.A.S. Karamzadeh and M. Namdari, On the functionally countable subalgebra of $C(X)$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **129** (2013) 47–69.

[5] M. Ghadermazi and O.A.S. Karamzadeh and M. Namdari, $C(X)$ versus its functionally countable subalgebra, Bull. Iranian Math. Soc., **45** (2019) 173–187.

[6] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer-Verlag, New York,1976.

[7] J. Hart and K. Kunen, Locally constant functions, Fund. Math., 1976.150 (1996), 67– 96.

[8] O.A.S. Karamzadeh and M. Namdari and S. Soltanpour, On the locally functionally countable subalgebra of $C(X)$, Appl. Gen. Topol. **16 (2)** (2015) 183–207 .

[9] M. Namdari and A. Veisi, The subalgebra of $C_c(X)$ consisting of elements with countable image versus $C(X)$ with respect to their rings of quotients, Far East J. Math. Sci. (FJMS), **59** (2011) 201–212 .

[10] M.E Rudin and W. Rudin, Continuous Functions That Are Locally Constant on Dense Sets, J. Funct. Anal., **133** (1995), 129–137.

[11] S. Wilard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass., 1970.

Locally constant functions and oc-paracompact spaces

Rostam Mohamadian †

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 2019/12/25 Accepted: 2020/09/11

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: In this article we investigate and study the ring $LC(X)$ of all real-valued locally constant functions on a topological space X. We show that X is a connected space if and only if $LC(X) = \mathbb{R}$. If X is a compeletly regular and Hausdorff space, we show that $LC(X)$ is always Von Neumann regular ring and also we prove that $LC(X) = \bigcap_{x\in N}(\mathbb{R} + O_x)$, where N is the set of all non-isolated points of X. Also we show that X is a P-space if and only if $LC(X) = C(X)$. It is also shown that X is a weakly pseudocompact space if and only if $LC(X) = C^F(X)$, where $C^F(X)$ denotes the ring of all real-valued continuous functions with finite image. In case X is a Lindelöf space, we prove that it is a CP-space if and only if $LC(X) = C_C(X)$, where $C_C(X)$ denotes the ring of all real-valued continuous functions with countable image. We introduce the concept of "oc-paracompact" and we observe that an oc-paracompact space X is compact if and only if it is weakly pseudocompact. Finally, we show that if X is a zero dimensional and second countable space, then X is compact if and only if it is a weakly pseudocompact space.

Keywords: locally constant function, P-space, oc-paracompact space, weakly pseudocompact space.

Mathematics Subject Classification (2010): 54C40, 54D20, 54A05.

---

†Corresponding author, *E-mail addresses:* mohamadian_r@scu.ac.ir (R. Mohamadian)