مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۱، ص ۸۲-۹۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2021.34612.1843

نتایج وجودی و یکتایی برای مسائل مقدار مرزی کسری دارای شرط ضربه‌ای در فضاهای باناخ

شاهین مرادی، قاسم علیزاده افروزی [×]

بابلسر، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۵/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۵
دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

چکیده: در این مقاله چندین شرط کافی برای وجود حداقل جواب ضعیف برای مسئله مقدار مرزی کسری با شرط ضربه در نظر گرفته شده است. روش مورد استفاده ما مبتنی بر روش‌های تغییراتی است. برخی از نتایج اخیر گسترش و بهبود یافته‌اند. علاوه بر این، یک مثال برای تفهیم بیش‌تر نتایج به‌دست‌آمده، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری، جواب یکتا ، شرط ضربه، روش تغییراتی .

رده‌بندی ریاضی: 35A09; 35D30

۱ مقدمه

در این مقاله با اضافه کردن شرط ضربه که تاثیر عوامل خارجی بر حرکت آلاینده در سیال را نشان می‌دهد به مدل واقعی‌تر زیر دست یافتیم

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u(t)\right)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t)), \quad t\neq t_j,\ a.e.\ t\in[\circ,T],\\ \Delta\left({}_tD_T^{\alpha-۱}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u\right)\right)(t_j)=I_j(u(t_j)), \quad j=۱,\dots n,\\ u(\circ)=u(T)=\circ, \end{cases} \tag{P_λ^f}$$

که در آن $\alpha\in(\frac{۱}{۲},۱]$، $a\in C([\circ,T])$ به‌طوری‌که $a_\circ,a_۱>\circ$ وجود دارند که $\circ<a_\circ\leq a(t)\leq a_۱$، $\lambda>\circ$، $f:[\circ,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $L^۱$-کاراتئودوری است، $\circ=t_\circ<t_۱<\dots<t_n<t_{n+۱}=T$، $\Delta({}_tD_T^{\alpha}({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u(t)))(t_j)={}_tD_T^{\alpha}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u(t)\right)(t_j^+)-{}_tD_T^{\alpha}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u(t)\right)(t_j^-)$ و $I_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای $j=۱,\cdots,n$ توابعی پیوسته لیپشیتز با ثابت لیپشیتز $L_j>\circ$ هستند بدین معنا که

$$|I_j(x_۲)-I_j(x_۱)|\leq L_j|x_۲-x_۱|$$

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: sh.moradi@umz.ac.ir (Sh. Morad)، afrouzi@umz.ac.ir (G. Alizadeh Afrouzi)

برای هر $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ و داریم $I_j(0) = 0$. این مسئله را مسئله (P_λ^f) می‌نامیم.

در این مقاله به بررسی وجود جواب برای مسئله (P_λ^f) می‌پردازیم. در [۲۹] ، ریسکن معادله انتشار را برای توصیف حرکت براون ذرات معرفی کرد

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \left[-v\frac{\partial}{\partial x} + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] C(x,t),$$

که در آن $C(x,t)$ یک میدان غلظت متغیر فضای x در زمان t است، $D > 0$ ضریب انتشار و $v > 0$ ضریب رانش است.

بسیاری از داده‌های آزمایشگاهی [۴، ۵] و آزمایش‌های عددی [۱۱] نشان می‌دهند که املاح درحال‌حرکت از طریق سفره‌ای بسیار ناهمگن، فرضیات اساسی نظریه‌های مرتبه دوم محلی را نقض می‌کنند، زیرا دلیل بزرگی انحراف ایجاد شده از روند تصادفی حرکت براون است. با توجه به [۴]

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + Dj\frac{\partial^\gamma C(x,t)}{\partial x^\gamma} + D(1-j)\frac{\partial^\gamma C(x,t)}{\partial(-x)^\gamma}, \tag{1.1}$$

که در آن C ترتیب عملگرهای دیفرانسیل کسری چپ و راست است (برای جزئیات بیش‌تر در مورد عملگرهای دیفرانسیل کسری چپ و راست به مرجع [۴] مراجعه شود). مخصوصاً، اگر $\gamma = 2$ اپراتور پراکندگی به عملگر کلاسیک انتقال انرژی تقلیل می‌یابد و (۱.۱) معادله کلاسیک پیوستگی پراکندگی می‌شود. از طرف دیگر، اگر $j = \frac{1}{2}$ باشد معادله (۱.۱) انتقال‌های متقارن را توصیف می‌کند.

معادلات دیفرانسیل کسری (FDE) اخیراً مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. این معادلات به‌دلیل توسعه فشرده تئوری محاسبات کسری و هم در کاربردشان در علوم مختلف مانند فیزیک، مکانیک، شیمی، مهندسی، احتمال، شبکه‌های برقی و غیره اهمیت زیادی در پژوهش‌های اخیر پیدا کردند. برای جزئیات بیش‌تر مقالات [۹، ۲۲، ۲۴، ۲۷] و منابع موجود در آن‌ها دیده شود. اخیراً، وجود جواب‌هایی برای مسائل مقدار مرزی برای FDEها در بسیاری از مقالات مورد مطالعه قرار گرفته است در این راستا خواننده را به مقالات [۸، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۲۵] و منابع موجود در آن‌ها ارجاع می‌دهیم . به عنوان مثال، در [۸] چن و تنگ وجود و چندگانگی جواب‌ها را برای مسائل مقدار مرزی کسری زیر بررسی کردند:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}{}_0D_t^{-\beta}(u'(t)) + \frac{1}{2}{}_tD_T^{-\beta}(u'(t))\right) + \lambda\nabla F(t,u(t)) = 0, \ a.e.\ t\in[0,T], \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

که در آن $F : [0,T]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است.

در سال‌های اخیر به‌علت اهمیت و کاربرد مسائل مقدار مرزی $(IBVPs)$ در شیمی درمانی، پویایی جمعیت، کنترل بهینه، اکولوژی، روباتیک صنعتی و فیزیک تحقیقات زیادی برای وجود جواب برای این مسائل انجام شده است. برای مطالعه جامع معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای، خواننده را به خواندن مرجع [۲۶] ارجاع می‌دهیم. همچنین می‌توانیم برخی از مقالات اخیر در مورد تئوری معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای را در مقالات [۱۷، ۱۹، ۳۲] مشاهده کنیم.

اخیراً، وجود جواب‌های FDEهای ضربه‌ای نیز با استفاده از قضایای نقطه ثابت و تئوری نقطه بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است، برای مطالعه بیش‌تر در این زمینه به مقالات [۲، ۳، ۱۲، ۱۴، ۲۰، ۲۱، ۳۳] و منابع موجود در آن‌ها مراجعه شود. به‌عنوان مثال بای در [۳] وجود جواب برای معادله کسری ضربه‌ای با شرایط مرزی غیرتناوبی را مورد مطالعه قرار داد. گائو و همکاران در [۱۴] با استفاده از قضیه نقطه ثابت، شرایط کافی برای وجود و یکتایی جواب‌ها برای یک دسته از معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای شامل انتگرال‌های کسری را ایجاد کردند.

با توجه به اهمیت موضوع و در راستای تحقیقات بالا، در مقاله حاضر، وجود حداقل جواب یکتا ضعیف نابدیهی برای مسئله (P_λ^f) را بررسی می‌کنیم، به قضیه ۱.۳ مراجعه شود. مثال ۲.۳ را ارائه می‌دهیم که در آن شرایط قضیه ۱.۳ برآورده می‌شود. در پایان کار، قضیه ۵.۴ را به‌عنوان کاربردی از قضیه ۱.۳ وقتی f مستقل از t است ارائه می‌دهیم.

مقاله حاضر به این شرح تنظیم شده است. در بخش ۲ برخی از تعاریف اساسی و نتایج اولیه را به‌یاد می‌آوریم، در حالی که بخش ۳ به وجود جواب یکتا کلاسیک برای مسئله (P_λ^f) اختصاص داده شده است.

۲ تعاریف و مقدمات

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها و قضایای مورد نیاز برای به‌دست‌آوردن نتایج اصلی این فصل را ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱.۲. [۲۴، ۳۱] انتگرال‌های کسری داری خاصیت زیر هستند:

$$\int_a^b [{}_aD_t^{-\gamma} f(t)]g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b [{}_tD_b^{-\gamma} g(t)]f(t)\mathrm{d}t, \quad \gamma > 0,$$

که در آن $f \in \mathrm{L}^p([a,b],\mathbb{R}^N)$، $g \in \mathrm{L}^q([a,b],\mathbb{R}^N)$ و $p \geq ۱$، $q \geq ۱$، $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q} \leq ۱+\gamma$ یا $p \neq ۱$، $q \neq ۱$، $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q} = ۱+\gamma$.

حال برای به‌دست‌آوردن نتایج وجودی مسئله (P_λ^f)، باید فضای جواب‌های این مسئله را معرفی کنیم، برای این منظور فرض می‌کنیم $۰ < \alpha \leq ۱$، $۱ < p < \infty$ و $\mathrm{E}_\circ^{\alpha,p}(۰,T)$ یک فضای باناخ است که بستار فضای $\mathrm{C}_\circ^\infty([۰,T])$ نسبت به نرم

$$\|u\|^p_{\mathrm{E}_\circ^{\alpha,p}(۰,T)} = \|{}_a^cD_t^\alpha u(t)\|^p_{\mathrm{L}^p(۰,T)} + \|u\|^p_{\mathrm{L}^p(۰,T)},$$

است. فضای $\mathrm{E}_\circ^{\alpha,p}(۰,T)$ یک فضای باناخ جدایی پذیر بازتابی است (مرجع [۲۳] دیده شود). در ادامه این فصل برای اختصار قرار می‌دهیم: $\mathrm{E}^\alpha = \mathrm{E}_{\circ,T}^{\alpha,۲}$ و فرض کنیم $\|.\|$ و $\|.\|_\infty$ به ترتیب نشان دهنده‌ی نرم فضاهای $\mathrm{L}^۲(۰,T)$ و $\mathrm{C}([۰,T])$ هستند که به‌صورت زیر

$$\|u\|^۲ = \int_۰^T |u(t)|^۲\,\mathrm{d}t, \quad u \in \mathrm{L}^۲(۰,T),$$

و

$$\|u\|_\infty = \max_{t\in[۰,T]} |u(t)|, \quad u \in \mathrm{C}([۰,T])$$

تعریف می‌شوند. E^α با ضرب داخلی و نرم زیر

$$(u,v)_\alpha = \int_۰^T ({}_۰^cD_t^\alpha u(t)\,{}_۰^cD_t^\alpha v(t) + u(t)v(t))\mathrm{d}t$$

و

$$\|u\|^۲_\alpha = \int_۰^T \left(|{}_۰^cD_t^\alpha u(t)|^۲ + |u(t)|^۲\right)\mathrm{d}t$$

یک فضای هیلبرت است. توجه داریم که اگر $۰ < a_۱ \leq a(t) \leq a_۲$، این نرم با نرم زیر

$$\|u\|^۲_{a,\alpha} = \int_۰^T \left(|{}_۰^cD_t^\alpha u(t)|^۲\mathrm{d}t + a(t)|u(t)|^۲\right)\mathrm{d}t,$$

معادل است.

گزاره ۲.۲. [۲۳] فرض کنیم $۰ < \alpha \leq ۱$. آنگاه برای هر $u \in \mathrm{E}^\alpha$، داریم

$$\|u\| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+۱)}\|{}_۰^cD_t^\alpha u\|. \tag{۱.۲}$$

علاوه‌براین برای هر $\frac{۱}{۲} < \alpha \leq ۱$،

$$\|u\|_\infty \leq \frac{T^{\alpha-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma(\alpha)(۲\alpha-۱)^{\frac{۱}{۲}}}\|{}_۰^cD_t^\alpha u\|.$$

با توجه به گزاره فوق می‌توانیم E^α را با نرم زیر

$$\|u\|_{۰,\alpha} = \left(\int_۰^T |{}_۰^cD_t^\alpha u(t)|^۲\mathrm{d}t\right)^{\frac{۱}{۲}} = \|{}_۰^cD_t^\alpha u\|, \quad \forall u \in \mathrm{E}^\alpha,$$

در نظر بگیریم. همچنین با توجه به گزاره ۲.۲ هنگامی‌که $\alpha > \frac{۱}{۲}$ برای هر $u \in \mathrm{E}^\alpha$، داریم

$$\|u\|_\infty \leq k\left(\int_۰^T |{}_۰^cD_t^\alpha u(t)|^۲\mathrm{d}t\right)^{\frac{۱}{۲}} = k\|u\|_{۰,\alpha} < k\|u\|_{a,\alpha}, \tag{۲.۲}$$

که در آن

$$k=\frac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\alpha-1}}. \tag{۳.۲}$$

حال با در نظر گرفتن $L:=\sum_{i=1}^{n}L_j$، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{1}{2}(1-LTk^2),\\ C_2 &:= \frac{1}{2}(1+LTk^2). \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

اکنون فرض کنیم که ثابت لیپشیتز $L>0$ از تابع h در نامساوی $LTk^2<1$ صدق کند.
در اینجا تعریف جواب‌های ضعیف و جواب‌های کلاسیک معادله (P_λ^f) را در زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. تابع $u\in \mathrm{E}^\alpha$ را جواب ضعیف مسئله (P_λ^f) گوییم هرگاه برای هر $v\in \mathrm{E}^\alpha$ داشته باشیم

$$\int_0^T [({}_0^cD_t^\alpha u(t))({}_0^cD_t^\alpha v(t))+a(t)u(t)v(t)]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}I_j(u(t_j))v(t_j) \\ -\lambda\int_0^T f(t,u(t))\,v(t)\mathrm{d}t=0.$$

تعریف ۴.۲. تابع

$$u\in\left\{u\in \mathrm{AC}([0,T])\ :\ \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(|{}_0^cD_t^\alpha u(t)|^2+|u(t)|^2\right)\,\mathrm{d}t<\infty,\ j=0,\dots n\right\}$$

را جواب کلاسیک مسئله (P_λ^f) گوییم هرگاه

$${}_tD_T^\alpha\left({}_0^cD_t^\alpha u(t)\right)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t)),\quad a.e.\ \ t\in[0,T]\backslash\{t_1,\dots,t_n\},$$

حدود ${}_tD_T^{\alpha-1}\left({}_0^cD_t^\alpha u\right)(t_j^+)$ و ${}_tD_T^{\alpha-1}\left({}_0^cD_t^\alpha u\right)(t_j^-)$ موجود باشند، $\Delta\left({}_tD_T^{\alpha-1}\left({}_0^cD_t^\alpha u\right)\right)(t_j)=I_j(u(t_j))$
و $u(0)=u(T)=0$.

لم ۵.۲. [۷، لم ۲.۱] تابع $u\in\mathrm{E}^\alpha$ جواب ضعیف برای مسئله (P_λ^f) است اگروفقط اگر جواب کلاسیک آن باشد.

تعریف ۶.۲. [۱۰] فرض کنیم که X یک فضای هیلبرت باشد. تابع

$$F:X\to\mathbb{R}$$

را بازدارنده گویند هرگاه

$$\lim_{\|u\|\to\infty}F(u)=\infty,$$

(در بسیاری از مراجع این تعریف را بازدارنده یا کرسیو می‌خوانند).

می‌خواهیم وجود حداقل جواب یکتا ضعیف نابدیهی برای مسئله (P_λ^f) را اثبات کنیم. استدلال مبتنی بر نسخه زیر از اصل تغییراتی ریچری [۲۸، قضیه ۵.۲] است که توسط بنانو و مولیکا بیشی در [۶] آورده شده است.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی بازتابی باشد و $\Phi, \Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گتو باشند به‌طوری‌که Φ نیم‌پیوسته پایین ضعیف دنباله‌ای، پیوسته قوی و بازدارنده (کرسیو) در X و Ψ نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای باشد. فرض کنیم I_λ تابعکی باشد که به‌صورت $I_\lambda := \Phi - \lambda\Psi$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، و برای هر $r > \inf_X \Phi$، فرض کنیم φ تابعی باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi(r) := \inf_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r)} \frac{\sup_{v\in\Phi^{-1}(-\infty,r)} \Psi(v) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)}.$$

آنگاه برای هر $r > \inf_X \Phi$ و هر $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\varphi(r)}\right)$، تحدید تابعک I_λ روی $\Phi^{-1}(-\infty, r)$ یک مینیمم سراسری می‌پذیرد که یک نقطه بحرانی (مینیمم نسبی) از I_λ در X است.

خواننده علاقه‌مند را به مقالات [۱، ۱۳، ۱۷، ۱۸] ارجاع می‌دهیم که در این مقالات قضیه ۷.۲ با موفقیت به کار گرفته شده است تا وجود حداقل جواب یکتا غیربدیهی برای مسائل مقدار مرزی را اثبات کند.

اکنون متناظر به توابع f و I_j برای $j = 1 \dots, n$ به‌ترتیب توابع $F : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $J_j : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $j = 1, \dots, n$ را به‌صورت زیر

$$F(t, \xi) := \int_0^\xi f(t, x)\mathrm{d}x, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R},$$

و

$$J_j(x) = \int_0^x I_j(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad j = 1, \dots, n, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

تعریف می‌کنیم .

در این مقاله شرط زیر را روی قسمت‌های ضربه‌ای در نظر می‌گیریم:

$(\mathcal{H})$ فرض کنیم $I_j \geq 0$ برای هر $j = 1, \dots, n$.

۳ نتایج اصلی

در این بخش، نتایج اصلی خود را در مورد وجود حداقل جواب یکتا ضعیف برای مسئله (P_λ^f) ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم

$$\sup_{\gamma>0} \frac{\gamma^2}{\int_0^T \sup_{|\xi|\leq\gamma} F(t, \xi)\mathrm{d}t} > \frac{k^2}{C_1}, \tag{D_F}$$

که در آن k همان ثابتی است که در (۳.۲) تعریف شده است و مجموعه‌های باز ناتهی $D \subseteq [0, T]$ و $B \subset D$ با اندازه لبگ مثبت وجود دارند به‌طوری‌که

$$\limsup_{\xi\to 0^+} \frac{ess\inf_{t\in B} F(t, \xi)}{|\xi|^2} = +\infty, \tag{۱.۳}$$

و

$$\liminf_{\xi\to 0^+} \frac{ess\inf_{t\in D} F(t, \xi)}{|\xi|^2} > -\infty. \tag{۲.۳}$$

آنگاه برای هر

$$\lambda \in \left(0, \frac{C_1}{k^2} \sup_{\gamma>0} \frac{\gamma^2}{\int_0^T \sup_{|\xi|\leq\gamma} F(t, \xi)\mathrm{d}t}\right),$$

مسئله (P_λ^f) حداقل جواب یکتا کلاسیک غیربدیهی $u_\lambda \in \mathrm{E}^\alpha$ می‌پذیرد. همچنین می‌توانیم داشته باشیم

$$\lim_{\lambda\to \circ^+} \|u\|_{a,\alpha} = \circ,$$

و تابع حقیقی

$$\lambda \to \frac{۱}{۲}\|u\|_{a,\alpha}^{۲} + \sum_{j=۱}^{n} J_j(u(t_j)) - \lambda \int_\circ^T F(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

منفی و اکیداً نزولی در

$$\left(\circ, \frac{C_۱}{k^۲} \sup_{\gamma>\circ} \frac{\gamma^۲}{\displaystyle\int_\circ^T \sup_{|\xi|\le\gamma} F(t,\xi)\mathrm{d}t} \right),$$

است.

اثبات. می‌خواهیم از قضیه ۷.۲ استفاده کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم $E^\alpha = X$ و تابعک‌های $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر

$$\Phi(u) := \frac{۱}{۲}\|u\|_{a,\alpha}^{۲} + \sum_{j=۱}^{n} J_j(u(t_j)), \tag{۳.۳}$$

و

$$\Psi(u) := \int_\circ^T F(t,u(t))\mathrm{d}t, \tag{۴.۳}$$

تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم Φ و Ψ شرایط لازم قضیه ۷.۲ را دارند. حال با توجه به‌این‌که برای هر $\xi \in \mathbb{R}$ و $j = ۱, \ldots, n$ نامساوی

$$-L_j|\xi| \le I_j(\xi) \le L_j|\xi|,$$

را داریم و با در نظر گرفتن روابط (۲.۲) و (۴.۲) برای هر $u \in X$ می‌توانیم به دست بیاوریم

$$C_۱\|u\|_{a,\alpha}^{۲} \le \Phi(u) \le C_۲\|u\|_{a,\alpha}^{۲}. \tag{۵.۳}$$

بنابراین تابعک $\Phi : X \to \mathbb{R}$ بازدارنده (کرسیو) است و همچنین Φ نیم‌پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای می‌باشد. از طرفی مشابه اثبات‌هایی که در [۳۰] آمده، دو تابعک Φ و Ψ به طور پیوسته مشتق پذیر گتو هستند و برای هر $u, v \in X$ داریم

$$\Phi'(u)(v) = \int_\circ^T \left[({}_\circ^c D_t^\alpha u(t))({}_\circ^c D_t^\alpha v(t)) + a(t)u(t)v(t)\right] \mathrm{d}t + \sum_{j=۱}^{n} I_j(u(t_j))v(t_j),$$

و

$$\Psi'(u)(v) = \int_\circ^T f(t,u(t))v(t)\mathrm{d}t.$$

Ψ نیم‌پیوسته ضعیف بالایی دنباله‌ای است. بنابراین Φ و Ψ، شرایط لازم برای استفاده از قضیه ۷.۲ را دارند. تابع $u \in X$ یک نقطه بحرانی تابعک $I_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda\Psi(u)$ است هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم

$$\Phi'(u)(v) - \lambda\Psi'(u)(v) = \circ.$$

بنابراین نقاط بحرانی تابعک همان جواب‌های ضعیف (کلاسیک) مسئله (P_λ^f) هستند. پس به‌دنبال نقاط بحرانی مسئله (P_λ^f) هستیم. با در نظر گرفتن شرط (D_F)، $\bar{\gamma} > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{\int_0^T \sup_{|\xi| \leq \bar{\gamma}} F(t,\xi) \mathrm{d}t} > \frac{k^2}{C_1}. \tag{۶.۳}$$

قرار می‌دهیم

$$r = \frac{C_1}{k^2} \bar{\gamma}^2.$$

از تعریف ۳.۳ و در نظر گرفتن معادلات (۲.۲)، (۳.۳) و (۵.۳) برای هر $r > 0$ داریم

$$\Phi^{-1}(-\infty, r) = \{u \in X; \Phi(u) < r\} \subseteq \{u \in X; |u| \leq \bar{\gamma}\}.$$

با محاسبات ساده و با توجه به تعریف $\varphi(r)$ و از طرفی چون $0 \in \Phi^{-1}(-\infty, r)$ و $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$، داریم

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \inf_{u \in \Phi^{-1}(-\infty,r)} \frac{(\sup_{v \in \Phi^{-1}(-\infty,r)} \Psi(v)) - \Psi(u)}{r - \Phi(u)} \leq \frac{\sup_{u \in \Phi^{-1}(-\infty,r)} \Psi(u)}{r} \\ &\leq \frac{\int_0^T \sup_{|\xi| \leq \bar{\gamma}} F(t,\xi) \mathrm{d}t}{\frac{C_1}{k^2} \bar{\gamma}^2}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\lambda^* = \frac{C_1}{k^2} \sup_{\gamma > 0} \frac{\gamma^2}{\int_0^T \sup_{|\xi| \leq \gamma} F(t,\xi) \mathrm{d}t}.$$

بنابراین قضیه ۷.۲ تضمین می‌کند که برای هر $\lambda \in (0, \lambda^*) \subseteq \left(0, \frac{1}{\varphi(r)}\right)$، تابعک I_λ حداقل یک نقطه بحرانی (مینیمم موضعی) $u_\lambda \in \Phi^{-1}(-\infty, r)$ می‌پذیرد. می‌خواهیم نشان دهیم که u_λ نمی‌تواند بدیهی باشد. برای این کار باید نشان دهیم که

$$\limsup_{\|u\| \to 0^+} \frac{\Psi(u)}{\Phi(u)} = +\infty. \tag{۷.۳}$$

با توجه به فرضیات (۱.۳) و (۲.۳) دنباله $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^+$ همگرا به صفر و ثابت‌های σ و κ (با $\sigma > 0$) در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{ess \inf_{t \in B} F(t,\xi_n)}{|\xi_n|^2} = +\infty,$$

و

$$ess \inf_{t \in D} F(t,\xi) \geq \kappa |\xi|^2,$$

برای هر $\xi \in [0, \sigma]$. مجموعه $\mathcal{G} \subset B$ با اندازه لبگ مثبت و تابع $v \in X$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که

(k_1) $v(t) \in [0, T]$ برای هر $t \in [0, 1]$،

(k_2) $v(t) = 1$ برای هر $t \in \mathcal{G}$،

(k_3) $v(t) = 0$ برای هر $t \in [0, T] \setminus D$.

از این رو، $M>0$ را ثابت در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که η یک عدد حقیقی مثبت با شرط زیر باشد:

$$M<\frac{\eta\,\mathrm{meas}(\mathcal{G})+\kappa\displaystyle\int_{D\setminus\mathcal{G}}|v(t)|^{2}\mathrm{d}t}{C_{2}\|u\|_{a,\alpha}^{2}}.$$

آنگاه وجود دارد $n_0\in\mathbb{N}$ به‌طوری‌که $\xi_n<\sigma$ و

$$ess\inf_{t\in B}F(t,\xi_n)\geq\eta|\xi_n|^{2},$$

برای هر $n>n_0$. الان برای هر $n>n_0$، با در نظر گرفتن ویژگی‌های تابع v (برای n به اندازه کافی بزرگ داریم $0\leq\xi_n v(x)<\sigma$)، آنگاه می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\Psi(\xi_n v)}{\Phi(\xi_n v)}\geq&\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{G}}F(t,\xi_n)\mathrm{d}t+\int_{D\setminus\mathcal{G}}F(t,\xi_n v(t))\mathrm{d}t}{\Phi(\xi_n v)}\\>&\frac{\eta\,\mathrm{meas}(\mathcal{G})+\kappa\displaystyle\int_{D\setminus\mathcal{G}}|v(t)|^{2}\mathrm{d}t}{C_{2}\|u\|_{a,\alpha}^{2}}>M.\end{aligned}$$

چون M می‌تواند به اندازه کافی بزرگ باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\xi_n v)}{\Phi(\xi_n v)}=+\infty,$$

و رابطه

$$\limsup_{\|u\|\to0^{+}}\frac{\Psi(u)}{\Phi(u)}=+\infty,$$

به راحتی نتیجه می‌شود. پس یک دنباله $\{w_n\}\subset X$ به‌طور قوی همگرا به صفر وجود دارد به‌طوری‌که برای n به اندازه کافی بزرگ، $w_n\in\Phi^{-1}(-\infty,r)$ و

$$I_\lambda(w_n)=\Phi(w_n)-\lambda\Psi(w_n)<0.$$

چون u_λ یک مینیمم کلی از تحدید I_λ به $\Phi^{-1}(-\infty,r)$ است به‌دست می‌آوریم

$$I_\lambda(u_\lambda)<0,\tag{۸.۳}$$

بنابراین u_λ نابدیهی است. به‌راحتی مشاهده می‌کنیم که نگاشت

$$(0,\lambda^{*})\ni\lambda\mapsto I_\lambda(u_\lambda),\tag{۹.۳}$$

منفی است. از طرفی می‌توانیم داشته باشیم

$$\lim_{\lambda\to0^{+}}\|u_\lambda\|_{a,\alpha}=0.$$

برای درستی این رابطه یادآوری می‌کنیم که Φ بازدارنده (کرسیو) است و برای هر $\lambda\in(0,\lambda^{*})$ جواب $u_\lambda\in\Phi^{-1}(-\infty,r)$ است و می‌دانیم ثابت مثبت L وجود دارد به‌طوری‌که $\|u_\lambda\|_{a,\alpha}\leq L$ برای هر $\lambda\in(0,\lambda^{*})$. آنگاه به آسانی می‌توان مشاهده کرد که ثابت مثبت N وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left|\int_{0}^{T}f(t,u_\lambda(t))u_\lambda(t)\mathrm{d}t\right|\leq N\|u_\lambda\|_{a,\alpha}\leq NL,\tag{۱۰.۳}$$

برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda^*)$. چون u_λ یک نقطه بحرانی از I_λ، داریم $I'_\lambda(u_\lambda)(v) = \circ$ برای هر $v \in X$ و برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda^*)$. به ویژه $I'_\lambda(u_\lambda)(u_\lambda) = \circ$ نتیجه می‌دهد

$$\Phi'(u_\lambda)(u_\lambda) = \lambda \int_\circ^1 f(t, u_\lambda(t))u_\lambda(t)\mathrm{d}t, \tag{۱۱.۳}$$

برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda^*)$. داریم

$$\circ \leq 2C_1 \|u_\lambda\|^2_{a,\alpha} \leq \Phi'(u_\lambda)(u_\lambda),$$

از رابطه (۱۱.۳) نتیجه می‌شود

$$\circ \leq \|u_\lambda\|^2_{a,\alpha} \leq \lambda \int_\circ^T f(t, u_\lambda(t))u_\lambda(t)\mathrm{d}t, \tag{۱۲.۳}$$

برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda^*)$. با در نظر گرفتن $\lambda \to \circ^+$ و به‌کارگیری رابطه‌های (۱۲.۳) و (۱۰.۳)، به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{\lambda \to \circ^+} \|u_\lambda\|_{a,\alpha} = \circ.$$

سپس به نتیجه دلخواه می‌رسیم. در پایان می‌خواهیم نشان دهیم که نگاشت

$$\lambda \mapsto I_\lambda(u_\lambda),$$

در $(\circ, \lambda^*)$ اکیداً نزولی است. برای رسیدن به این هدف می‌توانیم برای هر $u \in X$ داشته باشیم

$$I_\lambda(u) = \lambda \left(\frac{\Phi(u)}{\lambda} - \Psi(u) \right). \tag{۱۳.۳}$$

در نظر می‌گیریم $\circ < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda^*$ و فرض کنیم که u_{λ_i} یک مینیمم کلی از تحدید تابعک I_{λ_i} به $\Phi(-\infty, r)$ برای $i = 1, 2$ است. همچنین قرار دهیم

$$m_{\lambda_i} = \left(\frac{\Phi(u_{\lambda_i})}{\lambda_i} - \Psi(u_{\lambda_i}) \right) = \inf_{v \in \Phi^{-1}(-\infty, r)} \left(\frac{\Phi(v)}{\lambda_i} - \Psi(v) \right),$$

برای $i = 1, 2$. به‌طور بدیهی رابطه‌های (۹.۳) و (۱۳.۳) با در نظر گرفتن مثبت بودن λ نتیجه می‌دهد

$$m_{\lambda_i} < \circ, \tag{۱۴.۳}$$

برای $i = 1, 2$. علاوه‌براین

$$m_{\lambda_2} \leq m_{\lambda_1}, \tag{۱۵.۳}$$

با در نظر گرفتن $\circ < \lambda_1 < \lambda_2$ و با استفاده از رابطه‌های (۱۳.۳) تا (۱۵.۳) و به‌کارگیری دوباره $\circ < \lambda_1 < \lambda_2$ به‌دست می‌آوریم

$$I_{\lambda_2}(u_{\lambda_2}) = \lambda_2 m_{\lambda_2} \leq \lambda_2 m_{\lambda_1} < \lambda_1 m_{\lambda_1} = I_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}),$$

و این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda \mapsto I_\lambda(u_\lambda)$ در $\lambda \in (\circ, \lambda^*)$ اکیداً نزولی است. برای هر ثابت دلخواه $\lambda < \lambda^*$ می‌توان نشان داد که $\lambda \mapsto I_\lambda(u_\lambda)$ در $(\circ, \lambda^*)$ اکیداً نزولی است و اثبات تمام است. □

مثال زیر به‌عنوان کاربردی از قضیه ۱.۳ آورده شده است.

مثال ۲.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} &{}_tD_T^{\frac{4}{5}}\left({}_0^cD_t^{\frac{4}{5}}u(t)\right)+u(t)=\lambda f(u), \quad t\neq\frac{1}{3},\ a.e.\ t\in[0,1],\\ &\Delta\left({}_tD_T^{-\frac{1}{5}}\left({}_0^cD_t^{\frac{4}{5}}u\right)\right)(\tfrac{1}{3})=\lambda\frac{3\Gamma^2(\frac{4}{5})}{10}\cos(u(\tfrac{1}{3})),\\ &u(0)=u(1)=0, \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

که در آن

$$f(\xi)=\frac{3\Gamma^2(\frac{4}{5})}{5}\left(2\xi+\sin 2(\xi)+\sinh(\xi)\right),$$

برای هر $\xi\in\mathbb{R}$. با توجه به تعریف f، می‌توانیم F را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$F(\xi)=\frac{3\Gamma^2(\frac{4}{5})}{500}\left(\xi^2+\sin^2(\xi)+\cosh(\xi)-1\right),$$

برای هر $\xi\in\mathbb{R}$ با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که $k=\frac{\sqrt{15}}{3\Gamma(\frac{4}{5})}$ و $C_1=\frac{1}{4}$. چون

$$\sup_{\gamma>0}\frac{\gamma^2}{F(\gamma)}>\frac{k^2}{C_1}=\frac{20\Gamma^2(\frac{4}{5})}{3},$$

ملاحظه می‌کنیم که تمام شرایط قضیه ۱.۳ برآورده شده است. بنابراین با استفاده از قضیه ۱.۳ برای هر $\lambda\in(0,25)$ مسئله (۱۶.۳) جواب یکتا کلاسیک نابدیهی در $u_\lambda\in E^\alpha$ می‌پذیرد. علاوه براین می‌توانیم داشته باشیم:

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|u\|_{1,\frac{4}{5}}=0,$$

و تابع حقیقی

$$\lambda\to\frac{1}{2}\|u\|^2_{1,\frac{4}{5}}+\frac{3\Gamma^2(\frac{4}{5})}{10}\cos(u(\tfrac{1}{3}))-\lambda\int_0^1 F(u(t))\mathrm{d}t,$$

منفی و اکیداً نزولی در $(0,25)$ می‌باشد.

۴ نتیجه گیری

در اینجا چند نتیجه از قضیه اصلی را ارائه می‌دهیم.

ملاحظه ۱.۴. اگر f نامنفی باشد، آنگاه جواب کلاسیک به‌دست آمده در قضیه ۱.۳ نامنفی است. برای اثبات درستی این موضوع فرض کنیم u_0 جواب کلاسیک نابدیهی از مسئله (P_λ^f) باشد. حال از برهان خلف استفاده می‌کنیم فرض کنیم مجموعه $\mathcal{A}=\{t\in[0,T]:u_0(t)<0\}$ ناتهی و با اندازه مثبت است. در نظر بگیریم $\bar{v}(t)=\min\{0,u_0(t)\}$ برای هر $t\in[0,T]$ و $\bar{v}\in E^\alpha$، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \int_0^T[({}_0^cD_t^\alpha u_0(t))({}_0^cD_t^\alpha\bar{v}(t))+a(t)u_0(t)\bar{v}(t)]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^n I_j(u_0(t_j))\bar{v}(t_j)\\ -\lambda\int_0^T f(t,u_0(t))\bar{v}(t)\mathrm{d}t=0. \end{aligned}$$

با توجه به‌این‌که u_0 جواب ضعیف از مسئله (P_λ^f) است و با انتخاب $\bar{v} = u_0$ و چون f نامنفی است، برای هر $\lambda > 0$، داریم:

$$\begin{aligned} 0 \leq & 2C_1 \|u_0\|^2_{\mathrm{E}_0^{\alpha,p}(\mathcal{A})} \leq \int_0^T \left[({}_0^c D_t^\alpha u_0(t))^2 + a(t) u_0^2(t) \right] \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^n I_j(u_0(t_j)) u_0(t_j) \\ = & \lambda \int_{\mathcal{A}} f(t, u_0(t)) u_0(t) \mathrm{d}t \leq 0. \end{aligned}$$

سپس نتیجه می‌شود $\|u_0\|_{\mathrm{E}_0^{\alpha,p}(\mathcal{A})} = 0$ و این متناقض با این است که u_0 جواب ضعیف نابدیهی است، پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

ملاحظه ۲.۴. اگر در قضیه ۱.۳، تابع $f(t, x) \geq 0$ برای هر $t \in [0, T]$ و $x \in \mathbb{R}$، آنگاه شرط (D_F) را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر در نظر گرفت:

$$\sup_{\gamma > 0} \frac{\gamma^2}{\int_0^T F(t, \gamma) \mathrm{d}t} > \frac{k^2}{C_1}. \tag{D'_F}$$

علاوه براین اگر شرط زیر

$$\limsup_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma^2}{\int_0^T F(t, \gamma) \mathrm{d}t} > \frac{k^2}{C_1},$$

برقرار باشد آنگاه شرط (D'_F) به‌خودی‌خود برقرار است.

ملاحظه ۳.۴. فرض کنیم که $\bar{\gamma} > 0$ ثابت باشد و

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{\int_0^T \sup_{|\xi| \leq \bar{\gamma}} F(t, \xi) \mathrm{d}t} > \frac{k^2}{C_1}.$$

آنگاه نتایج قضیه ۱.۳ برای $\|u_\lambda\|_\infty \leq \bar{\gamma}$ برقرار است.

ملاحظه ۴.۴. در قضیه ۱.۳ یک نتیجه انشعابی وجود دارد در حالتی که زوج $(0, 0)$ متعلق به بستار مجموعه

$$\{(u_\lambda, \lambda) \in E^\alpha \times (0, +\infty)\},$$

در $E^\alpha \times \mathbb{R}$ و u_λ جواب کلاسیک نابدیهی مسئله (P_λ^f) است. در واقع با استفاده از قضیه ۱.۳ داریم

$$\|u_\lambda\|_\alpha \to 0,$$

هنگامی‌که $\lambda \to 0$. بنابراین دو دنباله $\{u_j\}$ در E^α و $\{\lambda_j\}$ در $\mathbb{R}^+$ $(u_j = u_{\lambda_j})$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\lambda_j \to 0^+$$

و

$$\|u_j\|_\alpha \to 0,$$

هنگامی‌که $j \to +\infty$. علاوه براین تاکید داریم به‌دلیل این‌که

$$(0, \lambda^*) \ni \lambda \mapsto I_\lambda(u_\lambda),$$

اکیداً نزولی است برای هر $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \lambda^*)$ با $\lambda_1 \neq \lambda_2$، جواب‌های u_{λ_1} و u_{λ_2} که در قضیه ۱.۳ به‌دست آمده‌اند متمایزند.

در اینجا نتیجه‌ای از قضیه ۱.۳، را وقتی f مستقل از t است را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم که $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته نامنفی باشد. قرار دهیم $F(\xi)=\int_{\circ}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$ برای هر $\xi\in\mathbb{R}$. فرض کنیم

$$\lim_{\xi\to\circ^{+}}\frac{F(\xi)}{|\xi|^{۲}}=+\infty.$$

آنگاه برای هر

$$\lambda\in\left(\circ,\frac{C_{۱}}{Tk^{۲}}\sup_{\gamma>\circ}\frac{\gamma^{۲}}{F(\gamma)}\right),$$

مسئله

$$\begin{gathered}{}_tD_T^{\alpha}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u(t)\right)+a(t)u(t)=\lambda f(u(t)),\quad t\neq t_j,\ a.e.\ t\in[\circ,T],\\ \Delta\left({}_tD_T^{\alpha-۱}\left({}_{\circ}^{c}D_t^{\alpha}u\right)\right)(t_j)=\lambda I_j(u(t_j)),\quad j=۱,\dots n,\\ u(\circ)=u(T)=\circ,\end{gathered}$$

حداقل جواب یکتا کلاسیک غیربدیهی $u_\lambda\in E^{\alpha}$ می‌پذیرد. همچنین می‌توانیم داشته باشیم:

$$\lim_{\lambda\to\circ^{+}}\|u\|_{a,\alpha}=\circ,$$

و تابع حقیقی

$$\lambda\to\frac{۱}{۲}\|u\|_{a,\alpha}^{۲}+\sum_{j=۱}^{n}J_j(u(t_j))-\lambda\int_{\circ}^{T}F(u(t))\mathrm{d}t,$$

منفی و اکیداً نزولی در

$$\left(\circ,\frac{C_{۱}}{Tk^{۲}}\sup_{\gamma>\circ}\frac{\gamma^{۲}}{F(\gamma)}\right),$$

است.

فهرست منابع

[1] Afrouzi, G.A., Hadjian, A. and Molica Bisci, G. (2013), Some remarks for one-dimensional mean curvature problems through a local minimization principle, Adv. Nonlinear Anal. **2**, 427-441.

[2] Bai, C. (2011), Impulsive periodic boundary value problems for fractional differential equation involving Riemann-Liouville sequential fractional derivative, J. Math. Anal. Appl. **384**, 211-231.

[3] Bai, C. (2011), Solvability of multi-point boundary value problem of nonlinear impulsive fractional differential equation at resonance, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **89**, 1-19.

[4] Benson, D., Wheatcraft, S. and Meerschaert, M. (2000), Application of a fractional advection dispersion equation, Water Resour. Res. **36**, 1403-1412.

[5] Benson, D., Wheatcraft, S. and Meerschaert, M. (2000), The fractional-order governing equation of Lévy motion, Water Resour. Res. **36**, 1413-1423.

[6] Bonanno, G. and Molica Bisci, G. (2009), Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities, Bound. Value Probl. **2009**, 1-20.

[7] Bonanno, G., Rodríguez-López, R. and Tersian, S. (2014), Existence of solutions to boundary-value problem for impulsive fractional differential equations, Fract. Calc. Appl. Anal. **3**, 717-744.

[8] Chen, J. and Tang, X.H. (2012), Existence and multiplicity of solutions for some fractional boundary value problem via critical point theory, Abstr. Appl. Anal. **2012**, 1-12.

[9] Diethelm, K. (2010), The Analysis of Fractional Differential Equation, Springer, Heidelberg.

[10] Drábek, P. and Milota, J. (2007), Methods of Nonlinear Analisis; Applications to Differential equations, Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, Berlin.

[11] Eggleston, J. and Rojstaczer, S. (1998), Identification of large-scale hydraulic conductivity trends and the influence of trends on contaminant transport, Water Resources Researces, **34**, 2155-2168.

[12] Fečkan, M., Wang, M. and Zhou, Y. (2011), On the new concept of solutions and existence results for impulsive fractional evolution equations, Dyn. Partial Differ. Equ. **8**, 345-361.

[13] Galewski, G. and Molica Bisci, G. (2016), Existence results for one-dimensional fractional equations, Math. Meth. Appl. Sci. **39**, 1480-1492.

[14] Gao, Z., Yang, L. and Liu, G. (2013), Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional integro-differential equations with nonlocal conditions, Appl. Math. **4**, 859-863.

[15] Guo, L. and Zhang, X. (2014), Existence of positive solutions for the singular fractional differential equations, J. Appl. Math. Comput. **44**, 215-228.

[16] Heidarkhani, S. (2014), Multiple solutions for a nonlinear perturbed fractional boundary value problem, Dynamic. Sys. Appl. **23**, 317-331.

[17] Heidarkhani, S., Afrouzi, G.A., Ferrara, M., Caristi, G. and Moradi, S. (2018), Existence results for impulsive damped vibration systems, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **41**, 1409-1428.

[18] Heidarkhani, S., Afrouzi, G.A., Moradi, S., Caristi, G. and Ge, B. (2016), Existence of one weak solution for $p(x)$-biharmonic equations with Navier boundary conditions, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik, **67**, 73.

[19] Heidarkhani, S., Ferrara, M. and Salari, A. (2015), Infinitely many periodic solutions for a class of perturbed second-order differential equations with impulses, Acta. Appl. Math. **139**, 81-94.

[20] Heidarkhani, S. and Salari, A. (2020), Nontrivial solutions for impulsive fractional differential systems through variational methods, Math. Meth. Appl. Sci. **43**, 6529-6541.

[21] Heidarkhani, S., Zhao, Y., Caristi, G., Afrouzi, G.A. and Moradi, S. (2017), Infinitely many solutions for perturbed impulsive fractional differential systems, Appl. Anal. **96**, 1401-1424.

[22] Hilfer, R. (2020), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore.

[23] Jiao, F. and Zhou, Y. (2011), Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Comput. Math. Appl. **62**, 1181-1199.

[24] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006), Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam.

[25] Kong, L. (2013), Existence of solutions to boundary value problems arising from the fractional advection dispersion equation, Electron. J. Diff. Equ., Vol. **2013**, No. 106, pp. 1–15.

[26] Lakshmikantham, V., Baĭnov, D.D. and Simeonov, P.S. (1989), Theory of Impulsive Differential Equations, vol. 6 of Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific, Teaneck, NJ, USA.

[27] Oldham, K.B. and Spanier, J. (1974), The Fractional Calculus, Academic Press, New York.

[28] Ricceri, B. (2000), A general variational principle and some of its applications, J. Comput. Appl. Math. **113**, 401-410.

[29] Risken, H. (1998), The Fokker-Planck Equation, Springer, Berlin.

[30] Rodríguez-López, R. and Tersian, S. (2014), Multiple solutions to boundary value problem for impulsive fractional differential equations, Fract. Calc. Appl. Anal. **17**, 1016-1038.

[31] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, Q.A. (1993), Fractional Integral and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA.

[32] Sun, J. and Chen, H. (2009), Variational method to the impulsive equation with Neumann boundary conditions, Bound. Value Prob. **2009**, 316812.

[33] Wang, J., Li, X. and Wei, W. (2012), On the natural solution of an impulsive fractional differential equation of order $q \in (۱, ۲)$, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **17**, 4384-4394.

Existence and Uniqueness Results for Impulsive Fractional Boundary Value Problem in Banach Spaces

Shahin Moradi, Ghasem Alizadeh Afrouzi [†]

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Received: 2020/10/8 Accepted: 2021/12/5

Communicated by: Abdolrahman Razani

Abstract: This paper presents several sufficient conditions for the existence of at least one weak solution for the impulsive nonlinear fractional boundary value problem. Our technical approach is based on variational methods. Some recent results are extended and improved. Moreover, a concrete example of an application is presented.

Keywords: Fractional differential equations, One weak solution, Impulsive effect, Variational methods.

Mathematics Subject Classification (2020): 35A09, 35D30.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: sh.moradi@umz.ac.ir (Sh. Morad), afrouzi@umz.ac.ir (G. Alizadeh Afrouzi)