مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۱، ص ۹۷–۱۰۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸–۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2021.34670.1848

بررسی مسایل مقدار مرزی و اولیه شامل معادلات انتگرو دیفرانسیل کسری با هسته‌های تکینی

محمدحسین درخشان [۱] ×، محمد جهانشاهی [۲]، همدم کاظمی‌دمنه [۳]

(۱) گروه مهندسی صنایع، موسسه آموزش عالی آپادانا، شیراز، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذر بایجان، تبریز، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذر بایجان، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۱
دبیر مسئول: جلیل رشیدی نیا

چکیده: در این مقاله مسایل مقدار اولیه و مرزی که شامل معادلات انتگرو دیفرانسیل غیرعادی کسری است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشتق کسری که در این مقاله درنظر گرفته شده است، مشتق کسری کپوتو است. معادلات انتگرالی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند یا بدون هرگونه تکینی‌اند و یا شامل هسته‌های تکینی‌اند که این تکینی می‌تواند ضعیف یا قوی باشد. به‌علاوه در این مقاله به بررسی و مطالعه رفع تکینی و منظم‌سازی این نوع از معادلات انتگرالی پرداخته می‌شود. هم‌چنین معادلات انتگرالی داده‌شده در قالب مسایل مقدار مرزی و اولیه بوده که در این مسایل از نظر تعداد و چگونگی شرایط مرزی مورد بحث قرار می‌گیرند. در پایان برای صحت و کارایی روش، بعضی مثال‌ها ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرو دیفرانسیل کسری، تکینی، تکینی ضعیف.

رده‌بندی ریاضی: 26A33; 34A08

۱ مقدمه

به‌طورکلی مدل‌سازی ریاضی از مسئله‌های دنیای واقعی در معادلات بنیادی و اساسی به‌وجود می‌آید، به‌عنوان مثال، می‌توان معادلات انتگرالی، معادلات انتگرال–دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی و سایر موارد اشاره کرد . مطالعه معادلات انتگرال–دیفرانسیل کلاسیک سابقه طولانی دارد. تحقیقات و مطالعات در زمینه نظری و عددی در دهه‌های اخیر شاهد تحولات زیادی بوده است [۱۸–۲۰، ۲۲] . بیش‌تر فرمول‌بندی‌های ریاضی از پدیده‌های فیزیکی شامل معادلات انتگرال– دیفرانسیل است که در خاصیت ویسکوالاستیسیته [۴] ، مدل‌های مدیریت ریسک [۱۳] ، بیولوژیک [۵] و فیزیک کیهان‌شناسی به‌وجود می‌آیند. در چند دهه اخیر با جستجو در مقالات چاپ‌شده در زمینه‌های علوم ریاضی و مهندسی، کم و بیش با موضوعات حسابان کسری، معادلات انتگرال– دیفرانسیل از مرتبه کسری، معادلات دیفرانسیل با مشتقات

×نویسنده مسئول مقاله M.H.Derakhshan.20@gmail.com (M.H.Derakhshan)
رایانامه: jahanshahi@azauniv.edu (M. Jahanshahi) kazemi.hamdam@azauniv.ac.ir (H. Kazemi)

کسری و مفاهیمی مشابهی از این نوع موضوعات در حساب کسری برخورد کرده‌ایم [۳] . این مقالات و کتاب‌ها هم در زمینه نظری و هم در زمینه کاربردی وجود دارند و سهم قابل توجهی از پژوهش‌ها را به خود تخصیص داده‌اند. برخی از نویسندگان مشتق و انتگرال کسری را به‌عنوان تعمیمی از مفاهیم و موضوعات کلاسیک معرفی کردند و سعی کرده‌اند ادعای خود را به اثبات برسانند. همه این موارد بیانگر این است که این موضوعات در علوم ریاضی، فیزیک ریاضی و حتی مهندسی از جایگاه خوبی برخوردار است. در سال‌های اخیر حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در زمینه‌های نظری و کاربردی پیشرفت زیادی کسب کرده است که باعث برطرف کردن نقایص حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه عدد صحیح شده است. از کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری می‌توان به بررسی جریان سیال مواد پرمنفذ، نظریهٔ انتشار غیر عادی، انتشار موج صوتی در مواد کشدار و چسبناک، مکانیک حرکت اجسام در ساختار مشابه، پردازش سیگنال، نظریه مالی و میزان رسانایی الکتریکی در دستگاه‌های زیستی اشاره کرد. مشتقات کسری چندین تعریف مختلف دارند که دو تا از مهم‌ترین آن‌ها مشتق کسری ریمان–لیو ویل و مشتق کسری کاپوتو است. رابطه‌ی نزدیکی بین مشتق کسری ریمان–لیوویل و مشتق کسری کپوتو وجود دارد به این صورت که می‌توان مشتق کسری ریمان–لیوویل را تحت برخی فرضیات تابع به مشتق کسری کپوتو تبدیل کرد. در معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی، مشتقات زمانی کسری به‌طور معمول با استفاده از مشتقات کپوتو تعریف می‌شوند. این به آن دلیل است که در تعریف مشتق کسری ریمان –لیوویل به شرایط اولیه با مقادیر حدی مشتق کسری ریمان لیوویل در مبدأ زمان نیاز است که معانی فیزیکی زیاد روشنی ندارد در حالی که شرایط اولیه در مورد مشتق کسری کاپوتو همانند شرایط اولیه برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی صحیح است.

معادلات انتگرو دیفرانسیل کسری، بسیاری از مسایل علوم مهندسی مانند مهندسی زلزله، مهندسی پزشکی و مکانیک سیالات را می‌توانند مدل‌سازی کنند. این معادلات می‌توانند از سه دیدگاه مورد توجه قرار بگیرند، اول از جهت رفع تکینی‌ها و منظم‌سازی آن‌ها [۸، ۱۷] ، دوم روش‌هایی تحلیلی و تقریبی برای حل آن‌ها [۹، ۱۴، ۱۵، ۲۱] و سوم از لحاظ مدل‌سازی مسایل مختلف مهندسی و علوم [۱۰] . برای مثال چو و رگان [†] [۲] به مطالعه کاربرد معادلات انتگرال منفرد در مسایل مقدار مرزی مزدوج غیرخطی پرداخته‌اند و لئونارد و مولیکین [‡] [۱۲] به کاربرد معادلات انتگرال منفرد در دینامیک سیالات پرداخته‌اند. هدف ما در این مقاله ابتدا رفع تکینی‌های موجود در هسته‌های معادلات انتگرو دیفرانسیل غیرعادی کسری و سپس تبدیل آن‌ها به معادلات انتگرو دیفرانسیل عادی است که بعد از رفع تکینی‌ها و منظم‌سازی آن‌ها به صورت معادلات انتگرال عادی درمی‌آیند که می‌توانند با روش‌های تحلیلی و تقریبی موجود مورد بررسی قرار بگیرند [۱، ۱۶] .

۲ تعاریف و پیش‌نیازها

در این قسمت تعاریف انتگرال و مشتق کسری ریمان–لیوویل ، مشتق کسری کپوتو و بعضی از ویژگی‌های آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ و $f \in AC\left([a, b]\right)$ باشد. در این‌صورت منظور از انتگرال ریمان–لیوویل چپ و راست از مرتبه α به ترتیب عبارت‌اند از [۶]:

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a, \alpha \in \mathbb{C}, \\ \left(I_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b, \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

تعریف ۲.۲ (خاصیت جابه‌جایی عملگرهای انتگرال کسری). فرض کنیم $\alpha, \beta > 0$ و $f \in L_1[a, b]$ باشد، در این‌صورت داریم [۱۱]:

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f = I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f.$$

تعریف ۳.۲ (مشتقات کسری ریمان–لیوویل). فرض کنیم $\alpha \geq 0$ و $m = [\alpha] + 1$ باشد. در این‌صورت مشتقات کسری ریمان–لیوویل چپ و راست به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱] :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(I_{a,+}^{m-\alpha} f\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a, \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

[†] Chu and ORegan
[‡] Mullikin

$$\left(\mathrm{D}_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{m}\left(I_{b,-}^{m-\alpha} f\right)(x)$$
$$= \frac{۱}{\Gamma(m-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{m}\int_{x}^{b}(t-x)^{m-\alpha-۱} f(t)dt, \quad x<b.$$

همچنین وقتی $۰ < \alpha < ۱$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، مشتق ریمان-لیوویل چپ و راست از مرتبه α به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := D\left(I_{a+}^{۱-\alpha} f\right)(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha} f(t)dt, \quad x>a,$$
$$\left(\mathrm{D}_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := -D\left(I_{b-}^{۱-\alpha} f\right)(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int_{x}^{b}(t-x)^{-\alpha} f(t)dt, \quad x<b.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنیم $\alpha \geq ۰$ ، $m = [\alpha]+۱$ و $f \in AC^{m}([a,b])$ باشد. در این‌صورت مشتقات کپوتو چپ و راست به‌ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱]:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) := \left(I_{a+}^{m-\alpha} D^{m} f\right)(x)$$
$$= \frac{۱}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{m-\alpha-۱} f^{(m)}(t)dt,$$
$$D_{b-}^{\alpha} f(x) := (-۱)^{m}\left(I_{b-}^{m-\alpha} D^{m} f\right)(x)$$
$$= \frac{(-۱)^{m}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{m-\alpha-۱} f^{(m)}(t)dt,$$

در حالت خاص اگر $۰ < \alpha < ۱$ و $f(x) \in AC[a,b]$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha} f'(t)dt := \left(I_{a+}^{۱-\alpha} Df\right)(x),$$

و

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{-\alpha} f'(t)dt := -\left(I_{b-}^{۱-\alpha} Df\right)(x).$$

برای مشتق کسری کپوتو داریم [۱۱] :

$$\mathrm{D}^{\alpha} x^{m} = \begin{cases} ۰, & m < \lceil \alpha \rceil, \\ \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m+۱-\alpha)} x^{m-\alpha}, & m \geq \lceil \alpha \rceil. \end{cases} \tag{۳.۲}$$

اگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل توسط I_{a+}^{α} و مشتق کسری کپوتو توسط D_{a+}^{α} علامت‌گذاری شود، آن‌گاه رابطه بین آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

$$I^{\alpha}\left(D^{\alpha} g\right) = g(x) - \sum_{j=۰}^{\lceil \alpha \rceil}\frac{x^{j}}{j!} g^{(j)}(۰), \tag{۴.۲}$$

که $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

۳ دسته‌بندی تکینی‌ها در معادلات انتگرالی

یک معادله انتگرال فردهلم از نوع دوم به‌صورت

$$y(x) = \int_{a}^{b}\frac{k(x,t)\, y(t)}{|x-t|^{\alpha}} dt, \tag{۱.۳}$$

معرفی می‌شود [۸] ، که در آن $k(x,t)$ یک تابع پیوسته در $[a,b] \times [a,b]$ است. با توجه به رابطه (۱.۳) داریم:

۱. اگر $\alpha \in (۰,۱)$ باشد، دراین‌صورت تکینی معادله انتگرال ضعیف است،

۲. اگر $\alpha > ۱$ باشد، دراین‌صورت تکینی معادله انتگرال قوی است،

۳. اگر $\alpha = ۱$ باشد، آن‌گاه معادله انتگرال کوشی است،

۴. اگر $\alpha < ۰$ باشد، دراین‌صورت معادله انتگرال بدون هر گونه تکینی است و هسته انتگرال، یک تابع پیوسته است.

بنابراین، اگر $m \in \mathbb{N}$ ،$\alpha \in (۰,m)$ باشد، آن‌گاه تکینی معادله انتگرال ضعیف، اگر $\alpha > m$، آن‌گاه تکینی معادله انتگرال قوی و اگر $\alpha = m$ باشد، آن‌گاه انتگرال به معنای کوشی موجود است.

۴ معادله انتگرو دیفرانسیل کسری غیرعادی ولترا

معادله انتگرو دیفرانسیل کسری ولترا را که شامل تکینی در هسته است، به‌صورت

$$D^{\alpha} y(x) = \int_a^x \frac{k_۱(x,\xi)}{|x-\xi|^{\beta}} y(\xi)\, d\xi,\ ۰<\alpha<۱,\ x\in(a,b),\ ۰<x<b, \tag{۱.۴}$$

درنظر می‌گیریم، که در آن D^{α} مشتق کسری کپوتو از مرتبه α، β مرتبه تکینی عبارت انتگرالی و $k_۱(x,\xi)$ یک تابع پیوسته در بازه $[a,b]\times[a,b]$ است. با استفاده از رابطه (۴.۲) از معادله (۱.۴) انتگرال‌گیری می‌کنیم، پس داریم:

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-۱}}{(\alpha-۱)!} d\eta \int_a^{\eta} \frac{k_۱(\eta,\xi)}{(\eta-\xi)^{\beta}} d\xi. \tag{۲.۴}$$

با تعویض انتگرالگیری در معادله (۲.۴) داریم:

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{۱}{(\alpha-۱)!} \int_a^x y(\xi)\, d\xi \int_{\xi}^x \frac{k_۱(\eta,\xi)}{|x-\xi|^{۱-\alpha} |\eta-\xi|^{\beta}}, \tag{۳.۴}$$

که $\varphi(x)$ جواب قسمت همگن معادله انتگرال کسری $D^{\alpha} y(x) = ۰$ است که به‌صورت چندجمله‌ای خواهد بود. اکنون می‌توان تکینی را با توجه به معلوم بودن هسته $k_۱(\eta,\xi)$ در معادله (۳.۴) رفع و یا ضعیف نمود. بنابراین معادله انتگرال دیفرانسیل کسری غیر عادی (۱.۴) تبدیل به یک معادله انتگرال (غیرکسری) عادی (۳.۴) می‌شود، چون تابع مجهول بدون علامت مشتق کسری در طرف راست ظاهر شده است. معادله (۳.۴) صرفا یک معادله انتگرال معمولی با هسته معلوم و تابع مجهول $y(x)$ است.

تعمیم اول: برای رفع تکینی یا ضعیف کردن آن در حالتی که معادله انتگرو دیفرانسیل کسری ولترا با α و β های اختیاری که α مرتبه مشتق کسری و β مرتبه تکینی است ، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^x \frac{k_۱(x,\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}} d\xi \int_a^{\xi} \frac{k_۲(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^{\beta}} y(\eta)\, d\eta = \int_a^x y(\eta)\, d\eta \int_{\eta}^x \frac{k_۱(x,\xi)\, k_۲(\xi,\eta)}{(x-\xi)^{\alpha}(\xi-\eta)^{\beta}} d\xi, \tag{۴.۴}$$

که درآن $k_۱(x,\xi)$ و $k_۲(\xi,\eta)$ تابع‌های پیوسته در بازه $[a,b]$ هستند، تکینی در انتگرال اول در $\xi = x$ و در انتگرال دوم $\xi = \eta$ است. بنابراین برای رفع تکینی از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$t = \frac{\xi-\eta}{x-\eta},\ \xi = (x-\eta)\, t + \eta. \tag{۵.۴}$$

بنابراین داریم:

$$\int_a^x \frac{k_۱(x,\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}} d\xi \int_a^{\xi} \frac{k_۲(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^{\beta}} y(\eta)\, d\eta = \int_a^x y(\eta)\, d\eta \int_۰^۱ \frac{k_۱(x,\xi) k_۲(\xi,\eta)}{(x-\eta)^{\alpha+\beta-۱}(۱-t)^{\alpha} t^{\beta}} dt. \tag{۶.۴}$$

با توجه به این‌که عبارت $(x-\eta)^{\alpha+\beta-1}$ مستقل از t بوده به عنوان ثابت، بیرون از انتگرال دوم نوشته می‌شود ولی برای انتگرال بیرونی تکینی ایجاد می‌کند، پس داریم:

$$\int_a^x \frac{k_1(x,\xi)}{(x-\xi)^\alpha}d\xi \int_a^\xi \frac{k_2(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^\beta}y(\eta)\,d\eta = \int_a^x \frac{y(\eta)\,d\eta}{(x-\eta)^{\alpha+\beta-1}}d\eta \int_0^1 \frac{k_1(x,\xi)k_2(\xi,\eta)}{(1-t)^\alpha t^\beta}dt. \tag{۷.۴}$$

با جمع‌بندی مطالب بالا قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۴. برای معادله انتگرال (۱.۳) داریم:

۱. اگر $\alpha+\beta-1\in(0,1)$ یا به‌طور معادل $\alpha+\beta-1\in(1,2)$ باشد، آن‌گاه تکینی انتگرال ضعیف است،

۲. اگر $\alpha+\beta-1>1$ ، آن‌گاه تکینی انتگرال قوی است،

۳. اگر $\alpha+\beta-1=1$ ، آن‌گاه انتگرال به معنای کوشی موجود است،

۴. اگر $\alpha+\beta-1=0$ ، آن‌گاه معادله انتگرال بدون هرگونه تکینی است و هسته انتگرال یک تابع پیوسته است.

تعمیم دوم: معادله (۱.۳) می‌تواند فرم پیچیده‌تر از این نیز داشته باشد (شامل دو جمله در طرف راست):

$$D^\alpha y + cy(x) = \int_1^x \frac{k_1(x,\xi)}{x-\xi}y(\xi)\,d\xi,\ \alpha \nleq 0,\ x\in(1,2). \tag{۸.۴}$$

با یک روش مشابه مانند معادله (۲.۴) برای معادله (۱.۳) می‌توان آن را به یک معادله انتگرالی‌با تکینی ضعیف تبدیل کرد. برای این منظور با انتگرالگیری کسری از مرتبه α از طرفین رابطه (۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= \varphi(x) + \int_1^x \frac{(x-\eta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}d\eta \int_1^\eta \frac{k_1(x,\xi)}{x-\xi}y(\xi)\,d\xi \\ &\quad - c\int_1^x \frac{(x-\eta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}y(\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

که با تعویض ترتیب انتگرال در معادله (۹.۴) داریم:

$$y(x) = \varphi(x) + \int_1^x \frac{(x-\eta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}[c + \int_\xi^\eta \frac{k_1(\eta,\xi)}{\eta-\xi}d\eta]y(\xi)\,d\xi. \tag{۱۰.۴}$$

توجه شود که جمله انتگرال یگانه بدون تکینی است، زیرا $(x-\eta)^{\alpha-1}$ و وقتی عبارت به مخرج منتقل شود به‌صورت $\frac{1}{(x-\eta)^{\alpha-1}}$ در می‌آید، که به اندازه α واحد کم می‌شود و تکینی ضعیف می‌شود، بنابراین در هسته این معادله انتگرالی، تکینی قوی وجود ندارد.

تعمیم سوم: صورت کلی‌تر معادله انتگرال دیفرانسیل کسری را که در معادله (۸.۴) داده شده است، می‌توان به صورت زیر درنظرگرفت:

$$\begin{aligned} & y^{(\frac{3}{2})}(x) + ay^{(1)}(x) + by^{(\frac{1}{2})}(x) + cy(x) \\ &\quad = \int_1^x \frac{k_1(x,\xi)}{|x-\xi|}y(\xi)\,d\xi,\ x\in(a,b),\ a>0, \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

که در آن $\alpha=\frac{3}{2}$ بالاترین مرتبه مشتق کسری معادله و مراتب پایین مشتق به اندازه $\frac{1}{2}$ کم می‌شود. در بخش آخر صورت کلی مرتبه n این معادله را بررسی خواهیم کرد.

۵ مسئله مقدار اولیه شامل معادله انتگرو دیفرانسیل کسری ولترا

در این بخش مسایل مقدار اولیه را که می‌توانند با معادلات انتگرو دیفرانسیل کسری داده شوند، مطالعه می‌کنیم. برای اولین مثال معادله (۱.۳) می‌تواند با در نظرگرفتن $\alpha = \frac{۳}{۲}$ به‌عنوان یک معادله مرتبه سوم در نظر گرفته شود که مرتبه جملات به اندازه $\alpha = \frac{۱}{۲}$ کم می‌شود و در نتیجه می‌توان برای معادله فوق سه تا شرط اولیه داد. توجه شود که وقتی از جملات مراتب پایین‌تر $y^{(۱)}(x)$، $by^{(\frac{۱}{۲})}(x)$ و $cy(x)$ انتگرال کسری از مرتبه $\frac{۳}{۲}$ می‌گیریم، به‌دلیلی که در بالا بیان گردید تکینی در این‌ها وجود نخواهد داشت و فقط تکینی در انتگرالگیری کسری در جمله اول از مرتبه $\frac{-۱}{۲}$ به‌وجود خواهد آمد. معادله همگن نظیر معادله (۱.۳)، $D^{\alpha}y(x) = ۰$ است که می‌تواند جواب عمومی به‌شکل زیر داشته باشد:

$$\varphi(x) = c_۱\frac{x^{\frac{-۱}{۲}}}{(\frac{-۱}{۲})!} + c_۲\frac{x^{۰}}{۰!} + c_۳\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{(\frac{۱}{۲})!}. \tag{۱.۵}$$

با توجه به ظاهر شدن ثابت‌های اختیاری $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ معادله، فوق می‌تواند با سه شرط اولیه به‌صورت زیر داده شود:

$$\begin{aligned} y(x_۰) &= \alpha_۰, \\ y^{\frac{۱}{۲}}(x_۰) &= \alpha_۰, \\ y'(x_۰) &= \alpha_۰. \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

تذکر: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل عادی از مرتبه n به صورت

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(x) = ۰, \\ &\quad y(x) = c_۱ + c_۲x + c_۳x^۲ + \ldots + c_nx^{n-۱}, \end{aligned} \tag{۳.۵}$$

محاسبه می‌شود.

با توجه به تذکر بیان‌شده، در اینجا نیز طبق (۱.۵) از توان‌های x با طول گام α با علامت منفی شروع می‌کنیم و پیش می‌رویم. در هر بار، مشتق جمله اول صفر می‌شود و در مشتق دوم، جمله دوم صفر می‌شود و بالاخره در مشتق nام، جمله $c_nx^{n-۱}$ صفر می‌شود، بنابراین در مورد جواب عمومی (۳.۵) قسمت همگن معادله (۱.۴) محاسبات زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} D^{\frac{۱}{۲}}\left[c_۱\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{(-\frac{۱}{۲})!}\right] &= ۰, \\ D^{\frac{۲}{۲}}\left[c_۲\frac{x^{۰}}{۰!}\right] &= ۰, \\ D^{\frac{۳}{۲}}\left[c_۳\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{(\frac{۱}{۲})!}\right] &= ۰, \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

که نتایج رابطه (۴.۵) از فرمول (۳.۲) که در آن $\alpha < \lceil\beta\rceil < ۰$ است، به‌دست می‌آید . برای مثال

$$D^{\frac{۱}{۲}}\left[\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{(-\frac{۱}{۲})!}\right] = \frac{x^{-۱}}{(-۱)!} = \frac{۱}{x(-۱)!} = ۰,$$

$$D^{۱}\left[\frac{x^{۰}}{(۰)!}\right] = \frac{x^{-۱}}{(-۱)!} = \frac{۱}{x(-۱)!} = ۰, \tag{۵.۵}$$

$$D^{\frac{۳}{۲}}\left[\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{(\frac{۱}{۲})!}\right] = \frac{x^{-۱}}{(-۱)!} = \frac{۱}{x(-۱)!} = ۰. \tag{۶.۵}$$

چون $(-۱)! = \infty$ و x غیر صفر است، جملات رابطه (۵.۵) صفر می‌شوند.

۶ معادله انتگرو دیفرانسیل کسری غیر عادی فردهلم نوع دوم

در این بخش معادله انتگرو دیفرانسیل کسری از مرتبه α که در طرف راست آن انتگرال غیرعادی فردهلم دارد، بررسی می‌کنیم [۷] :

$$D^{\alpha}y\left(x\right)=\int_{a}^{b}\frac{k\left(x,\xi\right)}{\left|x-\xi\right|}y\left(\xi\right)d\xi,\ \alpha\in(۰,۱),\ x,\ \xi\in(a,b),\ ۰<a<b. \tag{۱.۶}$$

چنان‌چه در بخش قبل مطرح شد با انتگرال‌گیری کسری از مرتبه α خواهیم داشت:

$$y\left(x\right)=\varphi\left(x\right)+\int_{a}^{x}\frac{\left(x-\eta\right)^{\alpha-۱}}{\left(\alpha-۱\right)!}d\eta\int_{a}^{b}\frac{k\left(\eta,\xi\right)}{\left|\eta-\xi\right|}y\left(\xi\right)d\xi, \tag{۲.۶}$$

که $\varphi\left(x\right)$ جواب قسمت همگن معادله کسری است و جمله دوم که به شکل انتگرال است، جواب قسمت ناهمگن معادله است. اکنون به رفع تکینی قسمت انتگرال فردهلم معادله (۲.۶) می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}y\left(x\right)&=\varphi\left(x\right)+\int_{a}^{b}y\left(\xi\right)d\xi\int_{a}^{x}\frac{k\left(\eta,\xi\right)}{\eta-\xi}\frac{\left(x-\eta\right)^{\alpha-۱}}{\left(\alpha-۱\right)!}d\eta\\&=\varphi\left(x\right)+\int_{a}^{x}y\left(\xi\right)d\xi\int_{a}^{x}\frac{k\left(\eta,\xi\right)}{\eta-\xi}\frac{\left(x-\eta\right)^{\alpha-۱}}{\left(\alpha-۱\right)!}d\eta\\&+\int_{x}^{b}y\left(\xi\right)d\xi\int_{a}^{x}\frac{k\left(\eta,\xi\right)}{\eta-\xi}\frac{\left(x-\eta\right)^{\alpha-۱}}{\left(\alpha-۱\right)!}d\eta.\end{aligned} \tag{۳.۶}$$

در معادله (۳.۶) انتگرال بیرونی که در بازه $[a,b]$ است را به صورت مجموع دو انتگرال در بازه‌های $[x,b]$ و $[a,x]$ نوشتیم . با توجه به تغییرات η و ξ که η از a تا x و ξ از x تا b تغییر می‌کند، از این‌رو، تفاضل عبارت $\xi-\eta$ امکان ندارد صفر شود. بنابراین در معادله انتگرالی (۳.۶) جمله دوم تکینی نخواهیم داشت ولی در عبارت انتگرالی اول تکینی وجود دارد که انتگرال آن به معنای کوشی وجود خواهد داشت.

۱.۶ مسئله مقدار مرزی شامل معادله انتگرو دیفرانسیل کسری فردهلم نوع دوم

معادله (۱.۶) می‌تواند با شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی در نظر گرفته شود، اگر یک شرط مرزی موضعی داشته باشیم، می‌تواند شبیه شرط اولیه در بخش ۶ مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به تعداد شرایط مرزی مساله می‌توانیم مرتبه معادله را با انتخاب طول گام α ضابطه $\varphi\left(x\right)$ را تعیین کنیم که امکان اعمال شرایط مرزی مورد نظر را داشته باشیم. به عنوان مثال اگر یک شرط مرزی غیرموضعی داده شود ضابطه $\varphi_{۱}\left(x\right)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi_{۱}\left(x\right)=c\frac{x^{-۱+\alpha}}{\left(-۱+\alpha\right)!}, \tag{۴.۶}$$

و اگر با دو شرط مرزی داده شود، $\varphi_{۲}\left(x\right)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi_{۲}\left(x\right)=c_{۱}\frac{x^{-۱+\frac{\alpha}{۲}}}{\left(-۱+\frac{\alpha}{۲}\right)!}+c_{۲}\frac{x^{-۱+\alpha}}{\left(-۱+\alpha\right)!}, \tag{۵.۶}$$

و اگر سه شرط مرزی داده شود، $\varphi_{۳}\left(x\right)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi_{۳}\left(x\right)=c_{۱}\frac{x^{-۱+\frac{\alpha}{۳}}}{\left(-۱+\frac{\alpha}{۳}\right)!}+c_{۲}\frac{x^{-۱+\frac{۲\alpha}{۳}}}{\left(-۱+\frac{۲\alpha}{۳}\right)!}+c_{۳}\frac{x^{-۱+\frac{۳\alpha}{۳}}}{\left(-۱+\frac{۳\alpha}{۳}\right)!}. \tag{۶.۶}$$

می‌توان نشان داد:

$$D^{\alpha}\left(c_{۱}\frac{x^{-۱+\alpha}}{\left(-۱+\alpha\right)!}\right)=c\frac{x^{-۱+\alpha-\alpha}}{\left(-۱\right)!}=\frac{۱}{x\left(-۱\right)!}=۰. \tag{۷.۶}$$

به‌طور مشابه نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$D^{\frac{\alpha}{۲}}\left(c_۱\frac{x^{-۱+\frac{\alpha}{۲}}}{(-۱+\frac{\alpha}{۲})!}\right)=c_۱\frac{x^{-۱+\frac{\alpha}{۲}-\frac{\alpha}{۲}}}{(-۱)!}=\frac{۱}{x\,(-۱)!}=\frac{۱}{x}\frac{۱}{(-۱)!}=۰$$
$$D^{\alpha}\left(c_۲\frac{x^{-۱+\alpha}}{(-۱+\alpha)!}\right)=c_۲\frac{x^{-۱+\alpha-\alpha}}{(-۱)!}=\frac{۱}{x\,(-۱)!}=۰. \tag{۸.۶}$$

۷ معادله انتگرو دیفرانسیل کسری غیر عادی شامل جملات ولترا و فردهلم

در این بخش به بررسی معادله انتگرو دیفرانسیل کسری که شامل جمله ولترا و جمله فردهلم است، می‌پردازیم:

$$D^{\alpha}y\,(x)=\int_a^x\frac{k_۱\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi+\int_a^b\frac{k_۲\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi \qquad ۰<\alpha<۱,\ \ x,\xi\in(a,b) \tag{۱.۷}$$

مشابه بخش ۵ و ۶ می‌توان با انتگرال‌گیری کسری از مرتبه α معادله (۱.۷) را به یک معادله انتگرال بدون تکینی تبدیل کرد. جواب قسمت همگن $\varphi\,(x)$ همان بحث مربوط به تعداد شرایط مرزی و انتخاب طول گام α خواهد بود. فرم کلی‌تر معادله (۱.۷) را می‌توانیم به صورت معادله دیفرانسیل کسری زیر در نظر بگیریم:

$$D^{(۲\alpha)}y\,(x)+Ay^{(\alpha)}\,(x)+By\,(x)=\int_a^x\frac{k_۱\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi+\int_a^b\frac{k_۲\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi. \tag{۲.۷}$$

با انتخاب طول گام α می‌توان معادله را مرتبه دوم فرض کرد و دو تا شرط مرزی غیر موضعی برای آن درنظرگرفت یا می‌توان α را با $\frac{\alpha}{۲}$ جایگزینی کرد و برای معادله فوق چهار تا شرط مرزی غیرموضعی درنظرگرفت.

تعمیم چهارم: می‌توان معادله انتگرالی (۲.۷) را به شکل کلی

$$\begin{aligned}&y^{(n\alpha)}\,(x)+a_۱y^{((n-۱)\alpha)}\,(x)+\ldots+a_{n-۱}y^{(\alpha)}\,(x)+a_ny\,(x)\\&=\int_a^x\frac{k_۱\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi+\int_a^b\frac{k_۲\,(x,\xi)}{x-\xi}d\xi,\end{aligned} \tag{۳.۷}$$

شامل عبارت ولترا یا فردهلم با n شرط مرزی در نظر گرفت و جواب عمومی معادله همگن $\varphi\,(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi\,(x)=c_۱\frac{x^{-۱+\frac{\alpha}{n}}}{(-۱+\frac{\alpha}{n})!}+c_۲\frac{x^{-۱+\frac{۲\alpha}{n}}}{(-۱+\frac{۲\alpha}{n})!}+\ldots+c_n\frac{x^{-۱+\frac{n\alpha}{n}}}{(-۱+\frac{n\alpha}{n})!}. \tag{۴.۷}$$

با توجه به محاسبات مشابه حالت‌های قبل می‌توان نشان داد که $D^{\alpha}\varphi\,(x)=۰$. اکنون مسئله مقدار مرزی با یک شرط مرزی غیرموضعی به صورت زیر در نظر می‌گیریم که معادله کسری شامل عبارت انتگرال‌ولترای غیرعادی است.

$$\begin{cases}D^{\alpha}y\,(x)=\int_a^x\frac{k(x,\xi)}{x-\xi}y\,(\xi)\,d\xi,\\ \gamma_۱y_۱\,(a)+\gamma_۲y_۲\,(a)=\gamma.\end{cases} \tag{۵.۷}$$

مقادیر $y(a)$ و $y(b)$ را در معادله انتگرال که بعد از تعویض ترتیب انتگرال‌گیری به‌صورت معادله انتگرال بدون تکینی در آمده است حساب می‌کنیم و در شرط مرزی قرار می‌دهیم، یعنی ابتدا معادله بالا را به‌صورت معادله انتگرالی زیر می‌نویسیم:

$$y\,(x)=\varphi\,(x)+\int_a^x y\,(\xi)\,d\xi\int_\xi^x\frac{k(\eta,\xi)}{\eta-\xi}y\,(\eta)\,d\eta, \tag{۶.۷}$$

که ترتیب انتگرال‌گیری عوض شده است و مجهول معادله بیرون از قسمت تکینی است و $\varphi\left(x\right)=\frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}$ به‌عنوان جواب عمومی معادله همگن $D^{\alpha}y\left(x\right)=0$است. از شرط مرزی مساله داریم:

$$\gamma_1\left[c\frac{a^{-1+a^{\alpha}}}{(-1+a^{\alpha})!}+0\right]+\gamma_2\left[c\frac{b^{-1+a^{\alpha}}}{(-1+a^{\alpha})!}\right.$$
$$\left.+\int_a^b\frac{(b-\eta)^{\alpha-1}}{(-1+\alpha)!}d\eta+\int_a^b\frac{k(\eta,\xi)}{\eta-\xi}y\left(\xi\right)d\xi=\gamma,\right. \qquad (۷.۷)$$

که مقدار c از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c=\frac{\gamma-\gamma_2\int_a^b\frac{(b-\eta)^{\alpha-1}}{(-1+\alpha)!}d\eta+\int_a^b\frac{k(\eta,\xi)}{\eta-\xi}y\left(\xi\right)d\xi}{\gamma_1\left[c\frac{a^{-1+a^{\alpha}}}{(-1+a^{\alpha})!}\right]+\gamma_2\left[c\frac{b^{-1+a^{\alpha}}}{(-1+a^{\alpha})!}\right]}, \qquad (۸.۷)$$

با قرار دادن مقدار c در رابطه بالا و ساده کردن عبارت‌های انتگرالی به یک معادله انتگرال عادی می‌رسیم که می‌توانیم از روش تقریبات متوالی $y\left(x\right)$ را محاسبه کنیم. اگر دو شرط مرزی غیر موضعی داشته باشیم ، با قراردادن مقادیر $y(a)$ و $y(b)$ در شرایط مرزی یک دستگاه دو معادله دو مجهولی نسبت به c_1 و c_2 خواهیم داشت.

تعمیم پنجم: در حالت کلی برای انتگرال غیر عادی فردهلم زیر تکینی را به صورت زیر ضعیف می‌کنیم:

$$\int_a^b k\left(x,t\right)dt\int_a^b k\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau=\int_a^b y\left(\tau\right)d\tau\int_a^b k\left(\tau,t\right)k\left(x,t\right)dt, \qquad (۹.۷)$$

که در آن $k\left(t,\tau\right)=\frac{k_1(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}$ ، $k\left(x,t\right)=\frac{k_1(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}$ و همچنین $|k\left(x,t\right)|\leq c$. اکنون داریم:

$$\left|\int_a^b k\left(x,t\right)k\left(t,\tau\right)\,dt\right|\leq c^2\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\alpha}},\ \alpha\in(0,1), \qquad (۱۰.۷)$$

با تغییر متغیر $\xi=\frac{x-t}{x-\tau}$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi(x-\tau)&=x-t,\\-dt&=(x-\tau)d\xi,\\t-\tau&=(x-\tau)(1-\xi),\end{aligned} \qquad (۱۱.۷)$$

و در نتیجه داریم:

$$\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\alpha}}=\int_a^b\frac{|x-\tau|\,d\xi}{|x-\tau|^{\alpha}\,|\xi|^{\alpha}\,|x-\tau|^{\alpha}\,|1-\xi|^{\alpha}}. \qquad (۱۲.۷)$$

در نتیجه انتگرال (۱۲.۷) در $x=\tau$ تکینی دارد که برای از بین بردن آن باید داشته باشیم $2\alpha-1<0$ که

$$\int_a^b\frac{dt}{|x-t|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\alpha}}=\frac{1}{|x-\tau|^{2\alpha-1}}\int_a^b\frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha}\,|\xi|^{\alpha}}. \qquad (۱۳.۷)$$

توجه شود که انتگرال داخلی (۱۲.۷) در $\xi=0$ و $\xi=1$ ظاهرا تکینی دارد که این تکینی‌ها ضعیف‌اند و در نتیجه $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و تکینی ضعیف می‌شود. در حالتی که $\alpha\in\left(0,n\right)$ باشد می‌توان با تکرار n بار روش تقریبات متوالی به رابطه $n\alpha-(n-1)<0$ رسید که $n=\left[\frac{1}{1-\alpha}\right]+1$ مرتبه تکرار را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۷ معادله انتگرو دیفرانسیل کسری غیرعادی ولترا

$$D^{\alpha}y\left(x\right)=\int_0^x\frac{1}{|x-\xi|^{\frac{1}{2}}}y\left(\xi\right)d\xi,\ 0<\alpha<1,\ x\in(0,1), \qquad (۱۴.۷)$$

تحت شرایط اولیه

$$y(0) = 0, \tag{۱۵.۷}$$

در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش نمایش داده، در این مقاله این مسئله را حل می‌کنیم. بنابراین با انتگرالگیری ریمان لیوویل کسری از مرتبه α از طرفین رابطه (۱۴.۷) به معادله انتگرالی زیر می‌رسیم:

$$y(x) = \varphi(x) + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\eta \int_0^\eta \frac{1}{(\eta-\xi)^{\frac{1}{2}}} d\xi. \tag{۱۶.۷}$$

با تعویض انتگرالگیری داریم:

$$y\left(x\right) = \varphi\left(x\right) + \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^x y\left(\xi\right) d\xi \int_\xi^x \frac{1}{\left|x-\xi\right|^{1-\alpha} \left|\eta-\xi\right|^{\frac{1}{2}}}, \tag{۱۷.۷}$$

که $\varphi\left(x\right)$ جواب قسمت همگن معادله انتگرال کسری $D^\alpha y\left(x\right) = 0$ است که به‌صورت $\varphi\left(x\right) = c_1 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!}$ خواهد بود. بنابراین با استفاده از توضیحات تعمیم اول جواب این معادله به صورت

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \varphi\left(x\right) + \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^x y\left(\xi\right) d\xi \int_\xi^x \frac{1}{\left|x-\xi\right|^{1-\alpha} \left|\eta-\xi\right|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \varphi\left(x\right) + \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^x \frac{y\left(\eta\right) d\eta}{\left(x-\eta\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}} d\eta \int_0^1 \frac{1}{\left(1-t\right)^{1-\alpha} t^{\frac{1}{2}}} dt, \end{aligned} \tag{۱۸.۷}$$

به‌دست می‌آید که می‌توان با استفاده از تقریبات متوالی $y(x)$ را محاسبه کرد.

مثال ۲.۷. معادله انتگرو دیفرانسیل کسری

$$D^{(2\alpha)} y\left(x\right) + D^{(\alpha)} y\left(x\right) + y(x) = \int_0^x \frac{1}{\left|x-\xi\right|} d\xi + \int_0^1 \frac{e^{x+\xi}}{\left|x-\xi\right|} d\xi, \ 0 < \alpha < 1, \ x \in (0,1), \tag{۱۹.۷}$$

تحت شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \ y'(0) = 0, \tag{۲۰.۷}$$

در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $k_1(x,\xi) = 1$ و $k_2(x,\xi) = e^{x+\xi}$ در معادله (۲.۷) مسئله را با فرایند مشابه حل می‌کنیم.

فهرست منابع

*[1] Jahanshahi, M., Ahmadkhanlu, A. (2014). On Well-Posed of Boundary Value Problems Including Fractional Order Differential Equation, Asian. Bull. Math., **36**, 53-59.*

*[2] Chu, J., O'Regan, D. (2010). Singular integral equation and applications to conjugate problems, Taiwan. J. Math., **14**, 329-345.*

[3] Diethelm, K. (2010). The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type: Springer Science & Business Media, 2010.

*[4] Dehghan, M., Solution of a partial integro-differential equation arising from viscoelasticity, Inter. J. Comput. Math., **83**, 123-129.*

*[5] Hamlin, D., Leary, R. (1987). Methods for using an integro-differential equation as a model of tree height growth, Can. J. For. Res., **17**, 353-356.*

*[6] Kilbas, A. A., Saigo, M., Saxena, R. K. (2004). Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators, Integral. Transform. Spec. Funct., **15**, 31-49.*

*[7] Jahanshahi, S., Babolian, E., Torres, D. F., Vahidi, A. (2015). Solving Abel equations of kind first kind via fractional calculus, J. King. Saud. Univ. Sci., **27**, 161-167.*

[8] kondo, J. (1991). Integral Equations, Kodansha Tokyo, Clarendon Press Oxford.

*[9] Keshavarz, E., Ordokhani, Y. (2019). A fast numerical algorithm based on the Taylor wavelets for solving the fractional integro-differential equations with weakly singular kernels, Math. Methods. Appl. Sci., **42**, 4427-4443.*

[10] Kanwal, R. P. (2013). Linear integral equations, Springer Science & Business Media.

[11] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam.

*[12] Leonard, A., Mullikin, T. W. (1964). An application of singular integral equation theory to a linearized problem in couette flow, Ann. Phys., **30**, 235-248.*

*[13] Makroglou, A. (2003). Integral equations and actuarial risk management: Some models and numerics, Math. Modell. Anal. **8**, 143-54.*

*[14] Nemati, S., Lima, P. (2018). Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions, Appl. Math. Comput., **327**, 79-92.*

*[15] Nemati, S., Sedaghat, S., Mohammadi, I. (2016). A fast numerical algorithm based on the second kind Chebyshev polynomials for fractional integro-differential equations with weakly singular kernels, J. Comput. Appl. Math., **308**, 231-242.*

*[16] Susahab, D. N., Shahmorad, S., Jahanshahi, M. (2015). Efficient quadrature rules for solving nonlinear fractional integro-differential equations of the Hammerstein type, Appl. Math. Model. **39**, 5452-5458.*

[17] Peskin, E. N., Daniel, V.(1995). Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books Publishing, L.L.C.

*[18] Sabermahani, S., Ordokhani, Y. (2020). A new operational matrix of Müntz-Legendre polynomials and Petrov Galerkin method for solving fractional Volterra-Fredholm integrodifferential equations, Comput. Methods. . Differ. Equ. **8**, 408-423.*

*[19] Sabermahani, S., Ordokhani, Y., Yousefi, S. A. (2018). Numerical approach based on fractional-order Lagrange polynomials for solving a class of fractional differential equations, Comput. Appl. Math. **37**, 3846-3868.*

[20] Volterra, V. (1959). Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, Dover Publications.

*[21] Wang, Y., Zhu, L. (2016). SCW method for solving the fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel, Appl. Math. Comput. **275**, 72-80.*

[22] Zhao, X. Q. (2003). Dynamical systems in population biology: Springer.

Investigation the boundary and initial value problems including fractional integro-differential equations with singular kernels

Mohammadhossein Derakhshan[1, §] , ***Mohammad Jahanshahi***[2] , ***Hamdam Kazemi demneh*** [3]

(1) *Department of Industrial Engineering, Apadana Institute of Higher Education, Shiraz, Iran*
(2) *Faculty of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University Tabriz, Iran*
(3) *Faculty of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University Tabriz, Iran*

Received: 2020/8/16 *Accepted: 2021/1/21*

Communicated by: Jalil Rashidinia

Abstract: *In this paper, the initial and boundary value problems which includes singular fractional integro-differential equations, are investigated. The fractional derivative which is considered in this article, is the Caputo fractional derivative. The integral equations which are discussed in this paper either without any singularity or contain singular kernels that can be weak or strong. In addition to, in this paper to check and study the singularity and regularity of this type of integral equations are paid. Also, the given integral equations are in the form of initial and boundary value problems, which are discussed in terms of the number and manner of boundary conditions. Finally, some examples are provided for the accuracy and efficiency of the method.*

Keywords: *fractional integro-differential equation, singular, weak singularity.*

Mathematics Subject Classification (2020): *26A33; 34A08.*

[§] *Corresponding author.*
E-mail addresses: `M.H.Derakhshan.20@gmail.com` *(M.H. Derakhshan),* `jahanshahi@azauniv.edu` *(M. Jahanshahi),* `kazemi.hamdam@azauniv.ac.ir` *(H. Kazemi).*