مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۲، ص ۲۴۱-۲۵۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2021.35004.1870

زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی $C(X)$

سمیه سلطانپور [۱] [×]

[۱] گروه علوم پایه، دانشکده نفت اهواز، دانشگاه صنعت نفت، اهواز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۸/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۳
دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

چکیده: نقش مفید زیرجبر شماراتابعی $C_c(X)$ در مطالعه‌ی $C(X)$، انگیزه‌بخش معرفی و مطالعه‌ی زیرحلقه‌ی $C_{cd}(Y)$ از $C(X)$ است که آن‌را زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی می‌نامیم. گیریم Y یک زیرمجموعه‌ی چگال X باشد، در این صورت $C_{cd}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0\}$. آشکارا $C(X) \subseteq C_{cd}(Y) \subseteq C(X)$، می‌بینیم که $C_{cd}(Y)$ در بسیاری خواص همانند $C(X)$ و $C_c(X)$ رفتار می‌کند. ارتباط خواص جبری $C_{cd}(Y)$ و خواص توپولوژیکی X را بررسی نموده، به‌ویژه فضاهای توپولوژیکی X را جست‌وجو می‌کنیم که برای آن‌ها $C_{cd}(X) = C_c(Y)$ یا $C_{cd}(Y) = C(X)$ که در حالت اخیر X را فضای تفکیک‌پذیر تابعی می‌نامیم. مشاهده می‌کنیم که هرگاه X یک فضای شماراتابعی یا تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه X فضای تفکیک‌پذیر تابعی است. اگر فضای X شبه‌فشرده و βX تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا است. به‌عکس، اگر هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا و هر G_δ-مجموعه دارای درون ناتهی باشد، آن‌گاه $C(X) = C_c(X)$. زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی موضعی $C(X)$ را به‌صورت $C_{cod}(X) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0, X$ از Y برای یک زیرمجموعه‌ی چگال باز$\}$ تعریف می‌کنیم، در این صورت $C_{cod}(X) \subseteq L_c(X)$. ثابت می‌کنیم که برای یک فضای فشرده موضعی و شبه‌فشرده‌ی X، $C_{cod}(X) = C(X)$ اگر و تنها اگر $C_{cod}(\beta X) = C(\beta X)$. در ادامه z_{cod}-ایدال‌ها در $C_{cod}(X)$ را معرفی کرده و می‌بینیم که بیشتر قضایای راجع به z-ایدال‌ها را می‌توان برای z_{cod}-ایدال‌ها هم بیان نمود.

واژه‌های کلیدی: شماراتابعی، تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیری تابعی، تفکیک‌پذیری تابعی موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 54C30; 54C40

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: s.soltanpour@put.ac.ir (S. Soltanpour)

۱ مقدمه

یکی از اهداف مهم تحقیق در زمینه‌ی $C(X)$، یعنی حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی–مقدار روی فضای توپولوژی X، تعیین توپولوژی روی فضای X بر اساس ویژگی‌های جبری $C(X)$ یا یک زیرجبر خاص $C(X)$ می‌باشد. تا قبل از سال ۲۰۱۱، زیرجبر $C^*(X)$ از $C(X)$، متشکل از توابع کران‌دار، تنها زیرجبری بود که به موازات $C(X)$ نقش عمده‌ای در رسیدن به هدف فوق را داشت. در مقالاتی مانند [۱، ۵، ۱۲، ۲۰] به مطالعه‌ی زیرحلقه‌هایی از $C(X)$ پرداخته شده که همگی شامل زیرحلقه‌ی $C^*(X)$ هستند. در توپولوژی، فضاهای بااهمیتی وجود دارند که اگر چه ناشمارا هستند، ولی هر تابع پیوسته حقیقی روی آن‌ها دارای برد شمارا است، این فضاها را شماراتابعی می‌نامند. قضیه‌ی معروف رودین، پلزینسکی و سمدنی در [۱۸، ۲۲] که به‌طور خلاصه آن را قضیه‌ی RPS می‌نامیم، بیان می‌کند که یک فضای هاسدورف و فشرده‌ی X، شماراتابعی است اگر و تنها اگر X پراکنده باشد. در [۹]، قضیه‌ی اخیر برای فضاهای فشرده و a–پراکنده تعمیم و نشان داده شده است که تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی روی فضای هاسدورف، فشرده و a–پراکنده که $a \leq \aleph_1$، دارای برد شمارا هستند. همچنین هگر در [۱۲] نشان داده است که هرگاه X یک P–فضا باشد، آن‌گاه X شبه $\aleph_1$–فشرده است اگر و تنها اگر X شماراتابعی باشد. در عین حال فضاهای توپولوژیکی وجود دارند که چنین نیستند. در نتیجه طبیعی خواهد بود که مجموعه‌ی تمام توابعی که روی فضای توپولوژی دلخواه X دارای برد شمارایند، بررسی شوند. هرگاه X یک فضای توپولوژی دلخواه و نه لزوماً فشرده باشد، زیرمجموعه‌ی $C(X)$، متشکل از توابع با برد شمارا، یک $\mathbb{R}$–زیرجبر $C(X)$ است و آن را با $C_c(X)$ نمایش می‌دهیم. گیریم $C_c(X) = \{f \in C(X) : |f(X)| \leq \aleph_0\}$ و $C^F(X) = \{f \in C(X) : |f(X)| < \infty\}$. این زیرجبر برای اولین بار توسط کرمزاده، نامداری و قادرمرزی در [۷، ۸] معرفی و مطالعه شده است. می‌بینیم که $C_c(X)$ همانند $C^*(X)$ یک همراه خوب برای $C(X)$ است. اما در مقابل $C^*(X)$، برخی خواص جبری $C(X)$ هستند که برای $C_c(X)$ برقرارند، اما به‌طور معمول برای $C^*(X)$ برقرار نیستند، مگر X متناهی باشد. علاوه بر این ما نباید $C^*(X)$ را موجود متفاوتی از $C(X)$ در نظر بگیریم، زیرا یک نوع C یا در واقع همان $C(\beta X)$ است. در نتیجه وقتی که خواص جبری $C(X)$ را مطالعه می‌کنیم و آن‌را در ارتباط با X در نظر می‌گیریم بدون هیچ کم و کاستی این موضوع در رابطه با $C(\beta X)$ و βX برقرار است. از طرفی برخی ویژگی‌های جبری مثل منظم بودن $C(X)$، توسط $C^*(X)$ به ارث برده نمی‌شود، مگر این‌که X متناهی باشد، لذا $C(\beta X)$ کمک چندانی در زمینه‌ی مطالعه‌ی $C(X)$ به ما نمی‌کند. بنابراین با معرفی زیرحلقه‌ی $C_c(X)$ برای اولین بار، زیرحلقه‌ای از $C(X)$ که رفتاری مشابه $C(X)$ دارد اما در حالت کلی از آن نوع نیست و این توانایی را دارد که در خصوص ساختار X نقش داشته باشد، بررسی شده است و همچنان می‌توان ویژگی‌های بیشتری از X را توسط $C_c(X)$ ارزیابی کرد، [۴، ۷، ۸، ۱۶، ۱۷] دیده شود. از آن‌جا که $C_c(X)$ بزرگ‌ترین زیرحلقه‌ی $C(X)$ است که تصویر عناصرش شمارا است، به‌طور طبیعی انگیزه‌ی معرفی زیرحلقه‌ای از $C(X)$، یعنی $L_c(X)$، که بین $C_c(X)$ و $C(X)$ واقع است، ایجاد می‌شود. یادآور می‌شویم $L_c(X) = \{f \in C(X) : \overline{C_f} = X\}$ که در آن C_f اجتماع مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ که $|f(U)| \leq \aleph_0$. $L_c(X)$ که زیرجبر به‌طور موضعی شمارا تابعی $C(X)$ گفته می‌شود، در [۱۳] معرفی و مطالعه شده است. یادآور می‌شویم که فضای توپولوژی X را تفکیک‌پذیر (جدایی‌پذیر) می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارا باشد. حال این سوال که کدام فضاها دارای یک زیرفضای چگال شماراتابعی هستند، مطرح می‌گردد. لوی و متوی با معرفی فضاهای تفکیک‌پذیر تابعی به این پرسش در [۱۴] پاسخ دادند. خاطر نشان می‌سازیم که فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول می‌نامیم، هرگاه X دارای یک زیرفضای چگال شماراتابعی باشد. هرگاه X شامل یک زیرفضای چگال $Y \subset X$ باشد به‌طوری که برای هر تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(Y)| \leq \aleph_0$، آن‌گاه فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع دوم می‌نامیم. همچنین فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم می‌نامیم، هرگاه برای هر تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{R}$ یک زیرفضای چگال $Y \subset X$ موجود باشد که $|f(Y)| \leq \aleph_0$. در [۱۴]، لوی و متوی با ارائه‌ی مثال‌های متنوع، تمایز این فضاها را نشان دادند و ثابت کردند که حاصل‌ضرب فضاهای تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر نوع اول می‌باشد. همچنین هرگاه X یک فضای شبه‌فشرده و βX تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه X تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم خواهد بود. به‌علاوه، حاصل‌ضرب P–فضاهایی که لیندلوف نیز هستند، تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم است. همچنین نشان دادند که هرگاه X شبه‌فشرده باشد، آن‌گاه X تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم است اگر و تنها اگر βX تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم باشد. اگر X یک P'–فضا باشد، آن‌گاه X شماراتابعی است، [۱۴] دیده شود. به‌علاوه در [۱۵]، متوی شرایط معادل فرض پیوستار را به کمک مفهوم تفکیک‌پذیر تابعی بیان نموده است. در بخش اول این مقاله تا حد امکان به بیان ساده‌تری از مفاهیم تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول، دوم و سوم خواهیم پرداخت. سپس برای $Y \subseteq X$ زیرجبرهای $C_c(Y) \subseteq C_c(X)$ و $C^F(Y) \subseteq C^F(X)$ را معرفی و در ادامه مباحث از آن استفاده خواهیم نمود. در بخش دوم به معرفی زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی و بررسی برخی ویژگی‌های آن می‌پردازیم. هرگاه Y یک زیرمجموعه‌ی چگال X باشد، در این صورت $C_{cd}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0\}$. می‌بینیم که $C_c(X) \subseteq C_{cd}(Y) \subseteq C(X)$. ارتباط خواص جبری $C_{cd}(Y)$ و خواص توپولوژیکی X را بررسی نموده، به‌ویژه فضاهای توپولوژیکی X را جست‌وجو می‌کنیم که برای آن‌ها تساوی در رابطه فوق برقرار باشد. در حالتی که $C_{cd}(Y) = C(X)$، فضای X را فضای تفکیک‌پذیر تابعی می‌نامیم. برای مثال اگر X یک فضای شماراتابعی یا تفکیک‌پذیر (با زیرمجموعه چگال شمارای Y) باشد، آن‌گاه X فضای تفکیک‌پذیر تابعی است. در بخش سوم، زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی موضعی را به‌صورت $C_{cod}(X) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0, X$ از Y برای یک زیرمجموعه‌ی چگال باز$\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $C_c(X) \subseteq C_{cod}(X) \subseteq L_c(X)$. نشان می‌دهیم که اگر فضای X شبه‌فشرده و βX تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا است. به‌عکس، اگر هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از

X شمارا باشد و هر G_δ–مجموعه دارای درون ناتهی باشد، آن‌گاه $C(X) = C_c(X)$. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر X یک فضای فشرده موضعی و شبه‌فشرده باشد، آن‌گاه $C_{cod}(X) = C(X)$ اگر و تنها اگر $C_{cod}(\beta X) = C(\beta X)$. در پایان z_{cod}–ایدال‌ها را معرفی و مطالعه می‌کنیم. به این ترتیب زیرجبر $C_{cod}(X)$ شامل $C_c(X)$ است و در بسیاری خواص رفتاری شبیه $C(X)$ و $C_c(X)$ دارد و امید است که در تحقیقات بعدی ارتباط بیشتری از این زیرجبر با ویژگی‌های توپولوژیکی X آشکار شود. همه‌ی فضاهای توپولوژیکی در این مقاله هاسدورف، کاملاً منظم و نامتناهی هستند، مگر این‌که خلاف آن ذکر شود. خواننده می‌تواند برای آشنایی بیشتر با مفاهیم و نمادهای جدید به [۶، ۱۰] مراجعه نماید.

۲ تعاریف و مقدمات

یادآور می‌شویم که فضای توپولوژی X را تفکیک‌پذیر (جدایی‌پذیر) می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارا باشد. همچنین توابع پیوسته‌ی حقیقی–مقدار با تصویر شمارا با $C_c(X)$ نمایش داده می‌شود. فضای توپولوژی X را شماراتابعی می‌نامیم، هرگاه هر تابع پیوسته‌ی حقیقی روی X دارای تصویر شمارا باشد، یعنی $C(X) = C_c(X)$.
خانواده‌ی توابع پیوسته با برد شمارا در شاخه‌های مختلف ریاضی از جمله نظریه‌ی حلقه‌های توابع پیوسته حقیقی نقش بااهمیتی دارد. برای مطالعه بیشتر مراجع [۲، ۳، ۷، ۸، ۱۱، ۱۸، ۱۹] را ببینید. اکنون به‌طور طبیعی این پرسش که کدام فضاها دارای یک زیرفضای چگال شماراتابعی هستند، مطرح می‌گردد. لوی و متوی به این پرسش در [۱۴] پاسخ داده و فضاهای تفکیک‌پذیر تابعی را معرفی نمودند، همچنین با ارائه‌ی مثال‌های متنوع، تمایز این فضاها را نشان دادند، علاوه بر این برخی فضاهای شماراتابعی را هم مشخص نموده‌اند. در این قسمت فضاهای تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول، دوم و سوم را با کمک مفاهیم و نمادهای مربوط به فضای شماراتابعی به زبانی ساده‌تر مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت

(۱) فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول می‌نامیم، هرگاه X دارای یک زیرفضای چگال شماراتابعی باشد؛

(۲) اگر X شامل یک زیرفضای چگال $Y \subset X$ باشد که برای هر تابع پیوسته $f : X \to \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(Y)| \leq \aleph_0$، آن‌گاه فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع دوم می‌نامیم؛

(۳) فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم می‌نامیم، هرگاه برای هر تابع پیوسته $f : X \to \mathbb{R}$ یک زیرفضای چگال $Y \subset X$ موجود باشد که $|f(Y)| \leq \aleph_0$.

به‌طور خلاصه ویژگی تفکیک‌پذیر تابعی را با FS نمایش داده و مفاهیم تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول، دوم و سوم را به ترتیب با $۱ - FS$، $۲ - FS$ و $۳ - FS$ نشان می‌دهیم. ارتباط بین فضاهای مطرح شده در نمودار زیر خلاصه می‌شود:

$$FC \longrightarrow ۱ - FS \longrightarrow ۲ - Fs \longrightarrow ۳ - FS$$

لم ۲.۲. گیریم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند؛

(۱) فضای X شماراتابعی (FC) است اگر و تنها اگر $C(X) = C_c(X)$.

(۲) فضای X تفکیک‌پذیر (S) است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ی چگال شمارای Y از X موجود باشد، یعنی $\bar{Y} = X$ و $|Y| \leq \aleph_0$ (در این صورت $C(Y) = C_c(Y)$).

(۳) فضای X تفکیک‌پذیر تابعی نوع اول است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ی چگال Y از X موجود باشد که $C(Y) = C_c(Y)$.

(۴) فضای X تفکیک‌پذیر تابعی نوع دوم است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ی چگال Y از X موجود باشد که برای هر $f \in C(X)$، $f|_Y \in C_c(Y)$.

(۵) فضای X را تفکیک‌پذیر تابعی نوع سوم می‌نامیم اگر و تنها اگر

$$\{f \in C(X) : \exists \ \bar{Y} = X \quad s.t \ |f(Y)| \leq \aleph_0\} = C(X).$$

به‌وضوح، اگر Y یک زیرمجموعه‌ی X باشد به‌طوری که برای هر $f \in C(X)$، $f|_Y$ ثابت باشد، آن‌گاه Y باید تک نقطه‌ای باشد. زیرا هرگاه $y_1, y_2 \in Y$ و $y_1 \neq y_2$، آن‌گاه چون X کاملاً منظم است، تابع $f \in C(X)$ به‌طوری که $f(y_1) \neq f(y_2)$ وجود دارد. در این‌جا یک تعریف از [۱۳] می‌آوریم و در ادامه‌ی مباحث از آن استفاده خواهیم نمود.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم Y یک زیرمجموعه‌ی فضای X باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f \in C(X)$ به‌طوری که $f|_Y$ ثابت است یک زیرجبر $C(X)$ می‌باشد و با $C_1(Y)$ نمایش داده می‌شود. به‌طور طبیعی، Y را یک زیرمجموعه‌ی ثابت نسبت به زیرحلقه‌ی A از $C(X)$ می‌نامیم، هرگاه $A \subseteq C_1(Y)$.

توجه کنیم که برای هر فضای کاملاً منظم X، $C_1(X) = C(X)$ اگر و تنها اگر X تک نقطه‌ای باشد. هرگاه Y یک زیرمجموعه‌ی بستباز از X باشد، آن‌گاه $\mathbb{R} \subsetneq C_1(Y)$.

گزاره ۴.۲. هرگاه X یک فضای توپولوژی و Y یک زیرمجموعه‌ی همبند X باشد، آن‌گاه $C_c(X) \subseteq C_1(Y)$. به ویژه، هرگاه $X \setminus Y$ شمارا باشد، آن‌گاه $A \subseteq C_1(Y)$ اگر و تنها اگر $A \subseteq C_c(X)$.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم Y یک زیرمجموعه‌ی فضای X باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f \in C(X)$ که $f|_Y$ شمارا (متناهی) است یک زیرجبر $C(X)$ است و با $C_c(Y)$ ($C^F(Y)$) نمایش داده می‌شود. به‌طور طبیعی، Y را یک زیرمجموعه‌ی شمارا (متناهی) تابعی نسبت به زیرحلقه‌ی A از $C(X)$ می‌نامیم، هرگاه $A \subseteq C_c(Y)$ ($A \subseteq C^F(Y)$).

گیریم $Y \subseteq X$ باشد و

$$C_1(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| = 1\},$$
$$C^F(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| < \aleph_0\},$$
$$C_c(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0\}.$$

در این صورت

$$C_1(Y) \subseteq C^F(Y) \subseteq C_c(Y) \subseteq C_c(X) \subseteq C(X).$$

این بخش را با نتیجه‌ای که بر اساس کاملاً منظم بودن X به آسانی ثابت می‌شود، پایان می‌دهیم.

نتیجه ۶.۲. برای یک زیرفضای Y از X، داریم $\mathbb{R} \subseteq C_1(Y) \subseteq C(X)$. به علاوه $C_1(Y) = \mathbb{R}$ اگر و تنها اگر Y در X چگال باشد.

اثبات. برای اثبات قسمت آخر توجه می‌کنیم که اگر $x \notin \overline{Y}$، آن‌گاه تابع $f \in C(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f(x) = 0$ و $f(\overline{Y}) = 1$. یعنی، $C_1(Y) \neq \mathbb{R}$. این نتیجه می‌دهد که $\overline{Y} = X$. به‌عکس، هرگاه $\overline{Y} = X$ و $f \in C_1(Y)$ باشد، آن‌گاه $f(Y) = c$ که در آن $c \in \mathbb{R}$. درنتیجه $f = c$ و اثبات تمام است. $\square$

مفاهیم مطرح شده تا این جا، ما را به سمت معرفی زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی سوق می‌دهد که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۳ زیرجبر $C_{cd}(Y)$ از $C(X)$

در این بخش، به معرفی و مطالعه‌ی زیرجبر $C_{cd}(Y)$ از $C(X)$ می‌پردازیم و برخی قضایا و نتایج مهم درباره $C_{cd}(Y)$ را به‌دست می‌آوریم. همچنین به بررسی ارتباط خواص جبری $C_{cd}(Y)$ و خواص توپولوژیکی X می‌پردازیم، به‌ویژه فضاهای توپولوژیکی X را جست‌وجو می‌کنیم که برای آن‌ها $C_c(X) = C_{cd}(Y)$ یا $C_{cd}(Y) = C(X)$.

تعریف ۱.۳. گیریم Y یک زیرمجموعه‌ی چگال فضای X باشد، تعریف می‌کنیم:

$$C_{cd}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0\}$$

به‌راحتی ثابت می‌شود که $C_{cd}(X)$ یک زیرمشبکه‌ی $C(X)$ شامل $C_c(X)$ می‌باشد و ما آن‌را زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی $C(X)$ می‌نامیم. هرگاه $C_{cd}(Y) = C(X)$، آن‌گاه X را فضای تفکیک‌پذیر تابعی می‌نامیم.

آشکار است که $C_c(X) \subseteq C_{cd}(Y) \subseteq C(X)$، تساوی بین این زیرجبرها ممکن است برقرار نباشد.

مثال ۲.۳. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی معمولی در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathbb{R} = C_c(\mathbb{R}) \subsetneq C_{cd}(Q) = C(\mathbb{R})$، زیرا تابع همانی $i \in C_{cd}(Q) \setminus C_c(\mathbb{R})$. همچنین $\mathbb{R} = C_c(\mathbb{R}) \subseteq C_{cd}(Q^c) \subsetneq C(\mathbb{R})$، زیرا تابع همانی $i \in C(\mathbb{R}) \setminus C_{cd}(Q^c)$.

برای زیرمجموعه چگال $Y \subseteq X$ قرار می‌دهیم:

$$C_{Fd}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| < \aleph_0\},$$

بنابر نتیجه ۶.۲ داریم:

$$C_{1d}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| = 1\} = \mathbb{R}.$$

گزاره ۳.۳. $C_{cd}(Y)$ یک زیرمشبکه‌ی $C(X)$ است.

ما در پی یافتن فضاهای توپولوژیکی X هستیم که تساوی در رابطه‌ی $C_c(X) \subseteq C_{cd}(Y) \subseteq C(X)$ برقرار باشد.

گزاره ۴.۳. اگر X یک فضای شماراتابعی و Y یک زیرمجموعه‌ی چگال فضای X باشد، آن‌گاه $C_c(X) = C_{cd}(X) = C(X)$.

گزاره ۵.۳. اگر X یک فضای تفکیک‌پذیر با زیرمجموعه چگال شمارای Y باشد، آن‌گاه $C_c(X) = C_{cd}(X) = C(X)$.

تعریف ۶.۳. زیر فضای $Y \subseteq X$ را در X، C-نشانده (F-نشانده) گوییم، هرگاه هر $f \in C(Y)$ ($f \in C^F(Y)$) یک توسیع در $C(X)$ ($C^F(X)$) داشته باشد. [۷] دیده شود.

گزاره ۷.۳. اگر Y یک زیرمجموعه‌ی چگال X باشد که $C_c(Y) \subseteq C(Y)$، آن‌گاه $C_{cd}(Y) = C(X)$. به‌عکس، اگر Y یک زیرمجموعه چگال و C-نشانده در X باشد که $C_{cd}(Y) = C(X)$، آن‌گاه $C_c(Y) = C(Y)$.

گزاره ۸.۳. هرگاه Y یک زیرمجموعه‌ی چگال X باشد به‌طوری‌که $C^F(Y) \subseteq C(X)$، آن‌گاه $C_{Fd}(X) = C(X)$. به‌عکس، هرگاه Y یک زیرمجموعه چگال و F-نشانده در X باشد که $C_{Fd}(Y) = C(X)$، آن‌گاه $C^F(Y) = C(Y)$.

تعریف ۹.۳. گیریم X یک فضای توپولوژیکی باشد، آن‌گاه زیرجبر تفکیک‌پذیر تابعی موضعی از $C(X)$ را با $C_{cod}(X)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C_{cod}(X) = \{f \in C(X) : |f(D)| \leq \aleph_0 \,, \quad \text{برای یک زیرمجموعه‌ی چگال باز } D \text{ از } X\}.$$

گزاره ۱۰.۳. اگر فضای X شبه‌فشرده و βX تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا است. به‌عکس، اگر هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا باشد و هر G_δ-مجموعه دارای درون ناتهی باشد، آن‌گاه $C(X) = C_c(X)$.

اثبات. فرض کنیم $C(X) = C^*(X)$ و βX تفکیک‌پذیر باشد. اگر $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، پس f کران‌دار است و بنابراین به یک تابع پیوسته $f^\beta : \beta X \to \mathbb{R}$ توسعه می‌یابد. گیریم C یک زیرفضای چگال شمارا از βX باشد. قرار می‌دهیم $D = (f^\beta)^{-1}(f^\beta(C)) \cap X$. در این صورت $D \subseteq X$ و $f(D)$ حداکثر شمارا است. چون X شبه‌فشرده و در βX چگال است و $f^\beta : \beta X \to \mathbb{R}$ پیوسته است، پس برای هر $c \in C$ داریم $c \in cl_X((f^\beta)^{-1}(f^\beta(C)) \cap X) = cl_X D$، یعنی D در X چگال است. اکنون فرض کنیم که همه‌ی G_δ-مجموعه‌های در X دارای درون ناتهی باشند. بنابراین هر زیرمجموعه‌ی چگال $D \subseteq X$ همه مجموعه‌های $f^{-1}(d)$ که $d \in D$ را قطع می‌کند و چون هر $f \in C(X)$ روی یک زیرمجموعه چگال از X شمارا است، پس $f(X)$ شمارا است. بنابراین $C(X) = C_c(X)$. □

از اثبات گزاره‌ی قبل و [۱۴]، نتیجه ۶.۳ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۱.۳. فرض کنیم که X یک فضای فشرده موضعی و شبه‌فشرده باشد، آن‌گاه $C_{cod}(X) = C(X)$ اگر و تنها اگر $C_{cod}(\beta X) = C(\beta X)$.

قرار می‌دهیم:

$$C_{Fod}(X) = \{f \in C(X) : |f(D)| < \aleph_0 \,, \quad \text{برای یک زیرمجموعه‌ی چگال باز } D \text{ از } X\}.$$

آشکار است که $C_{Fod}(X) \subseteq C_{cod}(X)$، همچنین $C_{Fod}(X) \subseteq C^F(X)$. درادامه تعریف زیرجبر به‌طور موضعی شمارا (متناهی) تابعی $C(X)$ از [۱۳] را بیان کرده و نشان می‌دهیم که $C_{cod}(X) \subseteq L_c(X)$ و $C_{Fod}(X) \subseteq L_F(X)$.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم $f \in C(X)$ و C_f (C_f^F) اجتماع مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ باشد به‌طوری‌که $f(U)$ شمارا (متناهی) است. $L_c(X)$ ($L_F(X)$) را مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f \in C(X)$ به‌طوری‌که C_f (C_f^F) در X چگال باشد، تعریف می‌کنیم و آن را زیرجبر به‌طور موضعی شمارا (متناهی) تابعی $C(X)$ می‌گوییم. آشکارا، $L_c(X)$ ($L_F(X)$) یک زیرجبر $C(X)$ شامل $C_c(X)$ ($C^F(X)$) است.

گزاره ۱۳.۳. هرگاه X یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه $C_{cod}(X) \subseteq L_c(X)$. به‌علاوه، هرگاه X شمارای نوع دوم باشد، آن‌گاه $C_{cod}(X) = L_c(X)$.

اثبات. فرض کنیم $f \in C_{cod}(X)$، پس زیر مجموعه چگال و باز Y از X وجود دارد که $|f(Y)| \leq \aleph_\circ$. در این صورت $Y \subseteq C_f$، پس $f \in L_c(X)$. اگر $f \in L_c(X)$، پس $C_f = \cup\{U : |f(U)| < \aleph_\circ\ ,\ U \subseteq^{\text{باز}} X\}$. از این‌که X شمارای نوع دوم است، نتیجه می‌گیریم که $f(C_f) = \cup\{f(U_i) : i \in \mathbb{N}, |f(U)| \leq \aleph_\circ\}$ شمارا است. بنابراین $f \in C_{cod}(X)$. □

ملاحظه ۱۴.۳. هرگاه $\varphi : C(X) \to C(Y)$ یک همریختی غیرصفر باشد که $\varphi(۱) = ۱$، آن‌گاه برای هر $f \in C(X)$ داریم $Im(\varphi(f)) \subseteq Im(f)$. بنابراین $\varphi(C_{cod}(X)) \subseteq C_{cod}(Y)$ و $\varphi(C_{Fod}(X)) \subseteq C_{Fod}(Y)$. بنابراین اگر $C(X) \cong C(Y)$، آن‌گاه $C_{cod}(X) \cong C_{cod}(Y)$ و $C_{Fod}(X) \cong C_{Fod}(Y)$ (برای مثال، هرگاه Y زیرمجموعه چگال و C-نشانده در X باشد). به‌ویژه، $C_{cod}(X) \cong C_{cod}(\nu X)$ و $C_{Fod}(X) \cong C_{Fod}(\nu X)$.

۴ z_{cod}-ایدآل‌ها

در این بخش، به جهت مطالعه بیشتر $C_{cod}(X)$، قضایای در زمینه‌ی حلقه‌ی توابع پیوسته را که برای $C_c(X)$ مانند $C_{cod}(X)$ برقرارند، ثابت می‌کنیم و یادآور می‌شویم که اثبات هر کدام، مشابه اثبات نظیرشان، در $C(X)$ است.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم $C^*_{cod}(X) = C_{cod}(X) \cap C^*(X)$. فضای توپولوژی X را تفکیک‌پذیر تابعی موضعی شبه فشرده می‌نامیم، هرگاه $C^*_{cod}(X) = C_{cod}(X)$.

در ادامه، حقایقی را، مشابه آن‌چه برای $C(X)$ و $C_c(X)$ برقرار است، در مورد $C_{cod}(X)$، بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۴. هر همریختی حلقه‌ای φ از $C_{cod}(X)$ یا $C^*_{cod}(X)$ به $C_{cod}(Y)$ حافظ ترتیب و همریختی مشبکه‌ای است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $\circ \leq f \in C_{cod}(X)$ آن‌گاه $\circ \leq \varphi(f)$. $g \in C_{cod}(X)$ وجود دارد که $f = g^۲$. در نتیجه

$$\varphi(f) = \varphi(g^۲) = \varphi(g)\varphi(g) = (\varphi(g))^۲ \geq \circ,$$

پس φ توابع نامنفی را به توابع نامنفی می‌برد. حال اگر $f \in C_{cod}(X)$،

$$(\varphi(|f|))^۲ = \varphi(|f|)\varphi(|f|) = \varphi(|f|^۲) = \varphi(f^۲) = (\varphi(f))^۲,$$

پس $\varphi(|f|) = \pm|\varphi(f)|$. اما $|f| \geq \circ$، لذا $\varphi(|f|) \geq \circ$، پس $\varphi(|f|) = |\varphi(f)|$. بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi(f \vee g) + \varphi(f \vee g) &= \varphi(f) + \varphi(g) + \varphi(|f - g|)\\ &= \varphi(f) + \varphi(g) + |\varphi(f) - \varphi(g)|\\ &= (\varphi(f) \vee \varphi(g)) + (\varphi(f) \vee \varphi(g)),\end{aligned}$$

در نتیجه $\varphi(f \vee g) = \varphi(f) \vee \varphi(g)$. به طریق مشابه $\varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \wedge \varphi(g)$. پس φ یک همریختی مشبکه‌ای است. □

قضیه ۳.۴. هر همریختی حلقه‌ای φ از $C_{cod}(X)$ یا $C^*_{cod}(X)$ به $C_{cod}(Y)$ توابع کران‌دار را به توابع کران‌دار تصویر می‌کند.

اثبات. فرض کنیم $\varphi : C_{cod}(X) \to C_{cod}(Y)$ یک همریختی حلقه‌ای است و $f \in C_{cod}(X)$ کران‌دار است، پس $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $|f| \leq n$. از طرفی داریم؛

$$\varphi(۱) = \varphi(۱ \times ۱) = \varphi(۱)\varphi(۱) = (\varphi(۱))^۲,$$

بنابراین $\varphi(۱)$ در $C_{cod}(Y)$ یک خودتوان است. پس مقادیر تابع $\varphi(۱)$ فقط ۰ و ۱ می‌تواند باشد. یعنی $|\varphi(۱)| \leq ۱$. پس

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| = \varphi(|f|) \leq \varphi(n) \leq |\varphi(n)| &= |\varphi(۱) + \ldots + \varphi(۱)| \\ &\leq |\varphi(۱)| + \ldots + |\varphi(۱)| \leq ۱ + \ldots + ۱ = n, \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(f) \in C^*_{cod}(Y)$ کران‌دار است. □

اگر X موضعاً شمارا شبه‌فشرده نباشد، $C_{cod}(X)$ و $C^*_{cod}(Y)$ یکریخت نیستند. در حالت خاص $C_{cod}(X)$ و $C^*_{cod}(X)$ یکریخت نیستند؛ اگر $\varphi : C_{cod}(X) \to C_{cod}(Y)$ همریختی باشد، آن‌گاه $\varphi\big(C^*_{cod}(X)\big) \subseteq C^*_{cod}(Y)$.

قضیه ۴.۴. اگر φ یک همریختی از $C_{cod}(X)$ به $C_{cod}(Y)$ باشد که تصویرش شامل $C^*_{cod}(Y)$ باشد، آن‌گاه φ، $C^*_{cod}(X)$ را به روی $C^*_{cod}(Y)$ می‌نگارد.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $\varphi(۱) = ۱$. فرض کنیم $h \in C_{cod}(X)$ و $\varphi(h) = ۱$. در این صورت

$$\varphi(۱) = \varphi(۱)\varphi(h) = \varphi(۱h) = \varphi(h) = ۱.$$

پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\varphi(n) = n$. اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $g \in C^*_{cod}(Y)$ تابع $f \in C^*_{cod}(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\varphi(f) = g$. چون $\varphi\big(C^*_{cod}(X)\big) \subseteq \varphi\big(C_{cod}(X)\big)$، پس $h \in C_{cod}(X)$ موجود است که $\varphi(h) = g$. گیریم $|g| \leq n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $f = -n \vee h \wedge n$. پس $|f| \leq n$، از این رو $f \in C^*_{cod}(X)$. کافی است نشان دهیم $\varphi(f) = g$. اما

$$\varphi(f) = \varphi(-n \vee h \wedge n) = \varphi(-n) \vee \varphi(h) \wedge \varphi(n) = -n \vee g \wedge n = g$$

و اثبات تمام است. □

اگر $f \in C_{cod}(X)$ و $f \geq ۰$، برای هر $۰ \leq r \in \mathbb{R}$، f دارای یک توان rام است که $f^r(x) = (f(x))^r$، و اگر n فرد باشد و $f \in C_{cod}(X)$، آن‌گاه $f^{۱/n} \in C_{cod}(X)$ و $f^{۱/n}(x) = (f(x))^{۱/n}$.

نتیجه ۵.۴. اگر Y یک فضای fs–شبه فشرده نباشد، آن‌گاه $C_{cod}(Y)$ نمی‌تواند تصویر همریختی $C^*_{cod}(X)$ باشد.

نتیجه ۶.۴. گیریم φ یک همسان‌ریختی از $C_{cod}(X)$ به توی $C_{cod}(Y)$ باشد به‌طوری‌که تصویرش شامل $C^*_{cod}(Y)$ باشد، آن‌گاه $\varphi\big(C^*_{cod}(X)\big) = C^*_{cod}(Y)$.

اگر $f \in C_{cod}(X)$ و $f > ۰$، آن‌گاه $g \in C_{cod}(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f = g^۲$. همچنین توجه کنیم که هرگاه $f \in C_{cod}(X)$ و $f^r \in C(X)$ که در آن $r \in \mathbb{R}$، آن‌گاه $f^r \in C_{cod}(X)$. متذکر می‌شویم که همه‌ی یکال‌های مثبت در $C_{cod}(X)$ دارای یک تعداد ریشه‌ی مربعی هستند، $۱B(۱)$ در [۱۰] دیده شود. گزاره‌ی بعد مشابه $۱D(۱)$ در [۱۰] و لم ۲.۴ در [۷] برای $C_{cod}(X)$ هم برقرار است.

گزاره ۷.۴. هرگاه $f, g \in C_{cod}(X)$ و $Z(f)$ یک همسایگی از $Z(g)$ باشد، آن‌گاه $h \in C_{cod}(X)$ وجود دارد که $f = gh$.

اثبات. داریم $z_{cod}(g) \subseteq intz_{cod}(f)$. قرار می‌دهیم:

$$h(x) = \begin{cases} ۰ & , \quad x \in z_{cod}(f) \\ \frac{f(x)}{g(x)} & , \quad x \notin intz_{cod}(f) \end{cases}$$

بنابراین $h \in C(X)$ و برای هر $Y \subseteq X$، $|h(Y)| \leq |f(Y)| \leq \aleph_۰$. پس $h \in C_{cod}(X)$ و $f = gh$. □

نتیجه ۸.۴. هرگاه $f, g \in C_{cod}(X)$ و برای $r > ۱$، $|f| \leq |g|^r$ آن‌گاه $h \in C_{cod}(X)$ وجود دارد که $f = gh$. به ویژه، هرگاه $|g| \leq |f|$ و f^r برای $r > ۱$ تعریف شده باشد، آن‌گاه f^r یک مضرب g است.

اثبات. گیریم

$$h(x) = \begin{cases} ۰ & , \quad x \in z_{cod}(g) \\ \frac{f(x)}{g(x)} & , \quad x \notin z_{cod}(g) \end{cases}$$

آن‌گاه $h \in C(X)$ و برای هر $Y \subseteq X$، $|h(Y)| \leq |\frac{f(Y)}{g(Y)}|$. بنابراین $h \in C_{cod}(X)$ و $f = gh$. □

گزاره ۹.۴. گیریم $f \in C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه عنصر یکه مثبت $u \in C_{cod}(X)$ موجود است به‌طوری‌که $uf = (-۱ \vee f) \wedge ۱$.

اثبات. قرار می‌دهیم:

$$u(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad -۱ \le f(x) \le ۱ \\ \frac{۱}{|f(x)|} & , \quad ۱ \le |f(x)| \end{cases}$$

آشکار است که $|u| = |f|$، پس $u \in C_{cod}(X)$ و $uf = (-۱ \vee f) \wedge ۱$. بنابراین هرگاه $f \in C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه f و $(-۱ \vee f) \wedge ۱$ به یک ایدآل در $C_{cod}(X)$ تعلق دارند. □

ملاحظه ۱۰.۴. نتایج قبل با جای‌گزاری $C_{cod}(X)$ با $C_{Fod}(X)$ برای این حلقه هم برقرار می‌مانند.

قرارداد. فرض کنیم که X یک فضای توپولوژی باشد، قرار می‌دهیم:

$$Z_{cod}(X) = \{Z(f) : f \in C_{cod}(X)\},$$

$$Z_{Fod}(X) = \{Z(f) : f \in C_{Fod}(X)\}.$$

تعریف ۱۱.۴. دو زیرمجموعه‌ی A و B از یک فضای توپولوژیکی X را تفکیک‌پذیر تابعی مجزا (fs–مجزا) در X می‌نامیم، هرگاه $f \in C_{cod}(X)$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(A) = ۱$ و $f(B) = ۰$.

قضیه‌ی بعد، مشابه قضیه ۱.۱۵ در [۱۰] و قضیه ۲.۸ در [۷] است.

قضیه ۱۲.۴. دو زیرمجموعه‌ی A, B از یک فضای X، fs–مجزایند اگر و تنها اگر در دو صفر–مجموعه‌ی مجزای $Z_{cod}(X)$ باشند. به علاوه مجموعه‌های fs–مجزا دارای همسایگی‌های صفر–مجموعه‌ای مجزا در $Z_{cod}(X)$ هستند.

آشکار است که هرگاه $a < b$ و A و B دو زیرمجموعه‌ی X باشند و $f \in C_{cod}(X)$، به‌طوری‌که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $f(x) \le a$ و برای هر $x \in B$ داشته باشیم $f(x) \ge b$، آن‌گاه A و B در X، fs–مجزایند.

نتیجه ۱۳.۴. هرگاه A و B دو زیرمجموعه‌ی fs–مجزا باشند، آن‌گاه صفر–مجموعه‌های $Z_۱$ و $Z_۲$ در $Z_{cd}(X)$ موجودند به‌طوری‌که $A \subseteq X \setminus Z_۱ \subseteq Z_۲ \subseteq X \setminus B$.

تعریف ۱۴.۴. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq Z_{cod}(X)$ را Z_{cod}–پالایه روی X می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{F}$ در شرایط زیر صدق کند.

(۱) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(۲) هرگاه $Z_۱, Z_۲ \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $Z_۱ \cap Z_۲ \in \mathcal{F}$.

(۳) هرگاه $Z \in \mathcal{F}$ و $Z' \in Z_{cod}(X)$ باشد به‌طوری‌که $Z' \supseteq Z$، آن‌گاه $Z' \in \mathcal{F}$.

z_{cd}–پالایه اول و z_{cod}–فراپالایه مشابه معادل‌هایشان در [۱۰] تعریف می‌شوند. هرگاه I یک ایدآل از $C_{cd}(X)$ باشد، در این صورت $Z_{cod}[I] = \{Z(f) : f \in I\}$ یک z_{cod}–پالایه روی X است. به‌عکس، اگر $\mathcal{F}$ یک z_{cd}–پالایه روی X باشد، آن‌گاه $Z^{-۱}[\mathcal{F}] = \{f \in C_{cod}(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ یک ایدآل در $C_{cod}(X)$ است. به‌علاوه هر z_{cod}–پالایه $\mathcal{F}$ به‌صورت $\mathcal{F} = Z_{cod}[I]$ برای یک ایدآل I در $C_{cod}(X)$ است و هرگاه J یک ایدآل در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه $Z^{-۱}[Z_{cod}[J]]$ یک ایدآل در $C_{cod}(X)$ شامل J است.

تعریف ۱۵.۴. یک ایدآل I در $C_{cod}(X)$ را z_{cod}–ایدآل می‌نامیم، هرگاه $Z(f) \in Z_{cod}[I]$ و $f \in C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه $f \in I$. به‌طور مشابه z_{Fod}–ایدآل تعریف می‌شود.

آشکارا هر z_{cod}–ایدآل اشتراکی از ایدآل‌های اول در $C_{cod}(X)$ است. به‌طور مشابه هر z_{Fod}–ایدآل اشتراکی از ایدآل‌های اول است. اثبات نتایج بعد مشابه اثبات نظیرشان در مورد $C(X)$ و $C_c(X)$ است، بنابراین اثبات آن‌ها را تکرار نمی‌کنیم، با استفاده از همان روش‌ها به‌آسانی می‌توان این قضایا را از ابتدای گزاره ۲۷.۴ برای $C_{cod}(X)$ و $C_{Fod}(X)$ به‌دست آورد. قضیه‌ی بعد نظیر قضیه ۹.۲ در [۱۰] و همچنین قضیه ۲.۱۳ در [۷] است.

قضیه ۱۶.۴. گیریم P یک z_{cod}–ایدآل در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(۱) P یک ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ است.

(۲) P شامل یک ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ است.

(۳) برای هر $f,g \in C_{cod}(X)$، اگر $fg = 0$، آن‌گاه $f \in P$ یا $g \in P$.

(۴) برای هر $f \in C_{cod}(X)$، یک صفر–مجموعه در $Z_{cod}[P]$ موجود است که f روی آن تغییر علامت نمی‌دهد.

نتیجه ۱۷.۴. هر ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ مشمول در یک ایدآل ماکسیمال یکتا در $C_{cod}(X)$ است.

آشکار است که هرگاه P یک ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه $Z_{cod}[P]$ یک z_{cod}–پالایه اول است. هرگاه $\mathcal{F}$ یک z_{cod}–پالایه باشد، آن‌گاه $Z_{cod}^{-1}[\mathcal{F}]$ یک z_{cod}–ایدآل اول است. آشکار است که هر z_{cod}–پالایه اول مشمول در یک z_{cod}–فراپالایه یکتا است. خاطر نشان می‌سازیم که ایدال P از $C_{cod}(X)$ انقباض یک ایدال Q از $C(X)$ است، هرگاه $P = Q \cap C_{cod}(X)$.

گزاره ۱۸.۴. ایدال P در $C_{cod}(X)$ یک z_{cod}–ایدال (z_{cod}–ایدال اول) است اگر و تنها اگر P انقباض یک z–ایدال (z–ایدال اول) در $C(X)$ باشد.

لم بعد مشابه لم ۱.۳ در [۷] است، [۲۱] نیز دیده شود.

لم ۱۹.۴. گیریم $f,g,l \in C_{cod}(X)$ و $Z(f) \supseteq Z(g) \cap Z(l)$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in Z(g) \cap Z(l) \\ \frac{fg^2}{g^2+l^2} & , \quad x \notin Z(g) \cap Z(l) \end{cases} \quad , \quad k(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in Z(g) \cap Z(l) \\ \frac{fl^2}{g^2+l^2} & , \quad x \notin Z(g) \cap Z(l) \end{cases}$$

آن‌گاه شرایط زیر برقرار هستند.

(۱) $|k| \vee |h| \le |f|$.

(۲) $f = h + k$.

(۳) $fg^2 = h(g^2 + l^2)$ و $fl^2 = k(g^2 + l^2)$.

(۴) $h, k \in C_{cd}(X)$.

نتایج بعد مشابه نتیجه ۲.۳ تا نتیجه ۸.۳ در [۷] هستند.

لم ۲۰.۴. گیریم A, B دو z_{cod}–ایدآل در $C_{cod}(X)$ باشند. آن‌گاه $A + B = C_{cod}(X)$ یا $A + B$ یک z_{cod}–ایدآل است.

نتیجه ۲۱.۴. گیریم $F = \{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از z_{cod}–ایدآل‌ها در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه $\sum_{i\in I} A_i = C_{cod}(X)$ یا $\sum_{i\in I} A_i$ یک z_{cod}–ایدآل است.

گزاره ۲۲.۴. هر ایدآل اول مینیمال در $C_{cod}(X)$ یک z_{cod}–ایدآل است.

نتیجه ۲۳.۴. هرگاه $F = \{P_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از ایدآل‌های اول مینیمال در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه $\sum_{i\in I} P_i = C_{cod}(X)$ یا $P = \sum_{i\in I} P_i$ یک ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ است.

گزاره ۲۴.۴. هر ایدآل اول P در $C_{cod}(X)$ مطلقاً محدب است.

گزاره ۲۵.۴. مجموع یک خانواده از ایدآل‌های نیم اول در $C_{cod}(X)$ یک ایدآل نیم‌اول در $C_{cod}(X)$ یا کل حلقه‌ی $C_{cod}(X)$ است.

گزاره ۲۶.۴. گیریم P یک ایدآل اول در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $C_{cod}(X)/P$ کاملاً مرتب است و ایدآل‌های اولش مقایسه‌پذیرند.

گزاره بعدی از نتیجه ۲۳.۴ قوی‌تر است و اثبات آن مشابه نتیجه ۹.۳ در [۷] است.

گزاره ۲۷.۴. گیریم $\{P_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از ایدآل‌های نیم‌اول در $C_{cod}(X)$ باشد به‌طوری‌که دست کم یکی از P_iها اول باشد، آن‌گاه $\sum_{i\in I} P_i$ یک ایدآل اول است یا برابر با $C_{cod}(X)$ می‌باشد.

یادآور می‌شویم که نتایج ذکر شده از ابتدای قضیه ۱۶.۴ برای $C_{Fod}(X)$ نیز معتبرند. اثبات قضیه‌ی بعد مشابه قضیه ۱۰.۳ در [۷] است.

قضیه ۲۸.۴. گیریم I یک ایدآل در $C_{cod}(X)$ باشد، آن‌گاه I و $\sqrt{I}$ دارای z_{cod}–ایدآل یکسان‌اند.

تشابه رفتار زیرجبر $C_{cod}(X)$ با $C_c(X)$ و $C(X)$ این تصور را می‌سازد که این زیرجبر نیز به‌عنوان یک موجود مفید در مطالعه‌ی خواص جبری $C(X)$ در کنار $C_c(X)$ و $L_c(X)$ در تحقیقات آینده به‌کار خواهد رفت.

فهرست منابع

[1] Acharyya S. K, Chattopadhyay K. C. and Ghosh D. P., *On a class of subalgebra of $C(X)$ and the intersection of their maximal ideals*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 611–615.

[2] Barr M. and Burgess W. D. and Raphael R., *Ring epimorphisms and $C(X)$*, Theory Appl. Categ. 11, **12** (2003), 283–308.

[3] Burgess W. D, Raphael R., *Compactifications, $C(X)$ and ring epimorphisms*, Theory Appl. Categ. 16, **21** (2006), 558–584.

[4] Bhattacharjee P. Knox M. L. and Mcgovern W. M., *The classical ring of quotients of $C_c(X)$*, Appl. Ge Topol. 15, **2** (2014), 147–154.

[5] Dominguez J. M. and Goz-Perez J., *There do not exist minimal algebras between $C^*(X)$ and $C(X)$ with prescribed real maximal ideal space*, Acta. Math. Hungar. **94** (4) (2002), 351–355.

[6] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[7] Ghadermazi M. Karamzadeh O. A. S. and Namdari M., *On the functionally countable subalgebra of $C(X)$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **129** (2013), 47–69.

[8] Ghadermazi M. Karamzadeh O. A. S. and Namdari M., *$C(X)$ versus its functionally countable subalgebra*, submitted.

[9] Ghadermazi M. and Namdari M., *On α-scattered spaces*, Far East j. Math. Sci. (FJMS), **32** (2009), 267–274.

[10] Gillman L. and Jerison M., *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, 1976.

[11] Hrusak M, Raphael R. and Woods R.G.,*On a class of pseudocompact spaces derived from ring epimorphisms*, Topology Appl. **153** (2005), 541–556.

[12] Hager, A., *On inverse-closed subalgebras of $C(X)$*, Proc. London, Math. Soc. **19** (1969), 233–257.

[13] Karamzadeh O. A. S. Namdari M. and Siavoshi M. A., *A note on λ-compact spaces*, Math. Slovaca, **63** (2013), 1371–1380.

[14] Levy R. and Matveev M., *Functional separability*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **51** (2010), 705–711.

[15] Matveev M., *One more topological equivalent of CH*, Topology Appl. **157** (2010), 1211– 1214.

[16] Namdari M. and Veisi A., *The subalgebra of $C_c(X)$ consisting of elements with countable image versus $C(X)$ with respect to their rings of quotients*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), **59** (2011), 201–212.

[17] Namdari M. and Veisi A., *Rings of quotients of the subalgebra of $C(X)$ consisting of functions with countable image*, Inter. Math. Forum, **7** (2012), 561–571.

[18] Pelczynski A. and Semadeni Z., *Spaces of continuous functions (III)*, Studia Mathematica **18** (1959), 211–222.

[19] Raphael M. and Woods R. G., *The epimorphic hull of $C(X)$*, Topology Appl. **105** (2002), 65–88.

[20] Redlin L. and Watson S., *Maximal ideals in subalgebra of* $C(X)$, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 763–766.

[21] Rudd D., *On two sum theorems for ideals of* $C(X)$, Michigan. Math. J. **17** (1970), 139–141.

[22] Rudin W., *Continuous functions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. Amer. Math. **8** (1957), 39–42.

Functionally Separable Subalgebra of $C(X)$

S. Soltanpour [1, †]

[(1)] Department of Science, Petroleum Faculty of Ahvaz, Petroleum University of Technology, Ahvaz, Iran

Received: 2020/10/22 Accepted: 2021/2/1

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: The useful role of $C_c(X)$ in studying $C(X)$ motivated us to introduce and study the functionally separable subalgebra $C_{cd}(Y)$ of $C(X)$. Let Y be a dense subset of X, $C_{cd}(Y) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0\}$. Clearly, $C_c(X) \subseteq C_{cd}(Y) \subseteq C(X)$ and $C_{cd}(Y)$ behaves like $C(X)$ and $C_c(X)$ in more properties. If X is a functionally countable or separable space then $C_{cd}(Y) = C(X)$, in this case X is called functionally separable space. Whenever X is pseudocompact and βX is separable, then each $f \in C(X)$ is countable on a dense subset of X. Conversely, if each $f \in C(X)$ is countable on a dense subset of X and each G_δ-set has nonempty interior, then $C(X) = C_c(X)$. Locally functionally separable subalgebra of $C(X)$ is denoted by $C_{cod}(X)$ where $C_{cod}(X) = \{f \in C(X) : |f(Y)| \leq \aleph_0,\ \text{for some open dense subset } Y \text{ of } X\}$, clearly $C_{cod}(X) \subseteq L_c(X)$. For a locally compact and pseudocompact space X, $C_{cod}(X) = C(X)$ if and only if $C_{cod}(\beta X) = C(\beta X)$. We introduce z_{cod}-ideals in $C_{cod}(X)$ and trivially observe that most of the facts related to z-ideals are extendable to z_{cod}-ideals.

Keywords: Functionally countable, Separable, Functionally separable, Locally functionally separable.

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: s.soltanpour@put.ac.ir (S. Soltanpour).