



تحلیل بیزی مدل های رگرسیونی اقتصادسنجی فضایی

فاطمه حسینی^{*}، امید کریمی

گروه آمار دانشگاه سمنان

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۹/۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۳/۵

دبیر مسئول: محمدرضا زادکریمی

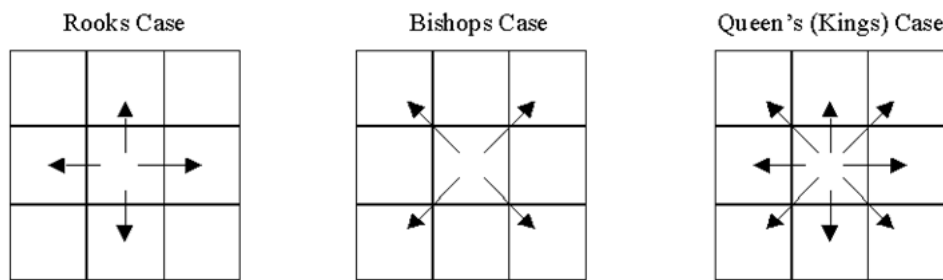
چکیده: مدل های رگرسیونی فضایی اغلب برای مدل سازی داده های اقتصادی فضایی استفاده می شوند. هدف اصلی در مطالعه این مدل ها به دست آوردن برآورد پارامترها و سپس پیشگویی در موقعیت های جدید است. برای این منظور، در این مقاله ابتدا رهیافت ماکسیمم درست نمایی بررسی شده است و در راستای بالابردن دقت برآورد پارامترها و کاهش زمان محاسبات، رهیافت بیزی معمولی و بیزی تقریبی برای سه مدل رگرسیونی دوربین فضایی، خطای فضایی و تاخیر فضایی مورد بررسی قرار می گیرد. در نهایت در یک مطالعه شبیه سازی و یک مثال واقعی مربوط به داده های مسکن شهر تهران به مقایسه عملکرد مدل ها و دو رهیافت پرداخته می شود. وجود اثر فضایی و ارتباط مستقیم بین قیمت مسکن و مساحت در داده های مورد بررسی پذیرفته می شود. با استفاده از معیار مجذور میانگین توان دوم خطای نسبی و براساس این دو مجموعه داده نتیجه شد که رهیافت بیزی تقریبی برای مدل های اقتصادسنجی فضایی نسبت به رهیافت ماکسیمم درست نمایی و رهیافت بیزی معمولی از عملکرد بهتری برخوردار است. علاوه بر این نتیجه شد زمان محاسبات رهیافت بیزی حدود دو برابر بیشتر از رهیافت بیزی تقریبی است.

واژه های کلیدی: مدل تاخیر فضایی، مدل دوربین فضایی، مدل خطای فضایی، رهیافت بیزی تقریبی.

رده بندی ریاضی: 91G70; 62F15; 91B72

۱ مقدمه

معمولاً برای تحلیل داده هایی که وابستگی مکانی دارند به خصوص داده های اقتصادی فضایی از سه مدل رگرسیون فضایی، مدل های اتورگرسیون فضایی یا مدل تاخیر فضایی، مدل دوربین فضایی و مدل خطای فضایی استفاده می شود. در مدل خطای فضایی همبستگی فضایی در جمله خطا منظور می شود، در مدل اتورگرسیون فضایی اثر فضایی در متغیر پاسخ منظور می شود و در مدل دوربین فضایی اثر فضایی هم از طریق متغیر پاسخ و هم از طریق متغیرهای کمکی در مدل وارد می شود. اولین بار [۱] به معرفی اقتصادسنجی فضایی پرداخت و [۲]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] به طور مفصل تر روش های اقتصادسنجی فضایی را مورد مطالعه قرار دادند. [۲] برای داده ها در طول زمان طولانی و با به کار بردن مدل های رگرسیونی فضایی به بررسی و مطالعه اقتصادسنجی فضایی پرداخت. [۵] به معرفی تکنیک های تحلیل داده های فضایی و کاربرد این تکنیک ها در مطالعات اقتصادسنجی با نرم افزار R پرداختند.



شکل ۱: انواع انتخاب همسایگی در ماتریس مجاورت.

[۳] و [۹] انواع روش‌های اقتصادسنجی را به اقتصادسنجی فضایی تعمیم داده‌اند. برای تحلیل این مدل‌ها در اکثر مطالعات اشاره شده معمولاً انواع روش‌های برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پیشنهاد شده است. به دلیل اضافه کردن همبستگی فضایی به این مدل‌ها و اضافه شدن تعداد پارامترهای مدل برای استفاده از رهیافت ماکسیمم درست‌نمایی تعدادی از پارامترها معلوم فرض می‌شوند و سایر پارامترها را برآورد و سپس با استفاده از برآوردهای به دست آمده پارامترهایی که معلوم فرض شدند را برآورد می‌کنند. این یکی از مشکلات اساسی در استفاده از رهیافت ماکسیمم درست‌نمایی در این مدل‌ها است. در رهیافت بیزی برای تمام پارامترها توزیع پیشین فرض می‌شود و با استفاده از تابع درست‌نمایی تشکیل شده و توزیع‌های پیشین فرض شده، توزیع پسین تشکیل و با استفاده از الگوریتم‌های موجود مثل الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی به طور همزمان پارامترها برآورد می‌شوند. از طرفی اجرای الگوریتم‌های مونت کارلویی زمان‌بر است و گاهی رسیدن به همگرایی در این الگوریتم‌ها نیاز به تکرار زیاد دارد و به کندی انجام می‌شود. در این مقاله از رهیافت درست‌نمایی، رهیافت بیزی معمولی و یک رهیافت بیزی تقریبی برای تحلیل مدل‌ها استفاده می‌شود و در یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال واقعی روش‌ها و مدل‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در بخش دوم سه مدل رگرسیون فضایی مورد استفاده در این مقاله معرفی می‌شوند. در بخش سه تحلیل درست‌نمایی و در بخش چهار تحلیل بیزی معمولی و تقریبی سه مدل بیان شده است. در بخش پنجم برای مقایسه بین مدل‌ها و رهیافت‌های مورد بررسی یک مطالعه شبیه‌سازی ارائه می‌شود. یک مجموعه داده واقعی مربوط به قیمت مسکن در شهر تهران در بخش شش مورد مطالعه قرار گرفته است. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ مدل‌های رگرسیونی فضایی

فرض کنید $y' = (y_1, \dots, y_n)$ بردار مشاهدات در n موقعیت فضایی $s_1, \dots, s_n$ است و X ماتریس طرح با p متغیر کمکی و $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ پارامترهای رگرسیونی هستند. در مدل تاخیر فضایی [۱۱]، متغیر پاسخ به مجموع وزنی پاسخ‌ها در همسایگی‌هایش، متغیرهای کمکی و جمله خطا بستگی دارد و به صورت

$$y = \rho W y + X\beta + \epsilon, \quad \epsilon \sim MVN(0, \sigma^2 I_n), \quad (1.2)$$

است، که در آن I_n یک ماتریس واحد از بعد $n \times n$ و W یک ماتریس مجاورت سطری استاندارد شده و ρ پارامتر خودهمبستگی فضایی است. در اقتصادسنجی فضایی برای در نظر گرفتن تاثیر همسایگی‌ها از ماتریس مجاورت W استفاده می‌شود. معمولاً ماتریس مجاورت طوری تشکیل می‌شود که متقارن و رتبه کامل باشد. برای تعیین ماتریس مجاورت، می‌توان از روش مجاورت و همبستگی استفاده کرد. در این روش، با تعیین اینکه کدام مناطق با هم همسایه یا مجاور هستند، ماتریس مجاورت تشکیل می‌شود و بنابراین، با در نظر گرفتن وابستگی فضایی، واحدهایی که دارای رابطه همسایگی یا مجاورت هستند، نسبت به محل‌های دورتر درجه وابستگی بیشتری نشان می‌هند. لذا در ماتریس مجاورت، عناصر روی قطر اصلی برابر صفر هستند و عناصر دیگر بر اساس اینکه مناطق، مجاور باشند یا خیر، عدد صفر و یا یک می‌گیرند. همچنین ماتریس مجاورت متقارن و مربعی است و باید استاندارد شود، یعنی هر سطر به عنوان یک بردار در نظر گرفته می‌شود و هر درایه بر اندازه سطر آن درایه تقسیم می‌شود. برای به دست آوردن همسایگی هر موقعیت می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد. شکل ۱، برخی از این روش‌ها را نشان می‌دهد که هر سه نمودار همسایگی‌ها بر مبنای نزدیک‌ترین همسایه بوده است. در این شکل سه نوع حرکت رخ، فیل و شاه در شطرنج را نشان می‌دهد. انتخاب همسایگی‌ها در شبکه‌های نامنظم می‌تواند بر اساس نزدیک‌ترین همسایه بر اساس فاصله باشد. روش دیگر انتخاب همسایگی مثلث‌بندی دلونی می‌باشد. [۱۱] به طور مفصل در مورد ایجاد همسایگی توضیح داده‌اند برای مطالعه بیشتر به منبع مذکور مراجعه شود. در این مقاله برای به دست آوردن همسایگی‌ها و ماتریس مجاورت از بسته نرم افزاری $R - spdep$ و تابع $nb2listw$ استفاده می‌شود. این تابع ماتریس مجاورت سطری تصادفی استاندارد شده ایجاد می‌کند که ماتریسی متقارن است و مجموع هر سطر یک است.

مدل خطای فضایی به صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim MVN(\mathbf{0}, \sigma^2(I_n - \lambda W)^{-1}(I_n - \lambda W)^{\prime -1}), \\ \mathbf{u} &= \lambda W\mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim MVN(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n), \\ \mathbf{y} &= X\boldsymbol{\beta} + (I_n - \lambda W)^{-1}\boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

بیان می شود، که در آن λ پارامتر خودهمبستگی فضایی است. مدل دوربین فضایی به صورت

$$\mathbf{y} = \rho W\mathbf{y} + X\boldsymbol{\beta} + WX\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim MVN(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n), \quad (3.2)$$

تعریف می شود، که در آن WX متغیرهای کمکی تاخیر فضایی و $\boldsymbol{\gamma}$ بردار ضرایب این متغیرها هستند. در این مدل متغیر پاسخ علاوه بر وابستگی به سایر پاسخ ها در همسایگی خود و متغیرهای کمکی، به مقادیر متغیرهای کمکی در همسایگی خود وابسته است. در تمام مدل های معرفی شده، جمله خطا گاوسی با میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس به شکل اتو رگرسیون فضایی در نظر گرفته شده است. مدل های SLM و SDM ساختار پیچیده تری در قسمت خطی مدل که مربوط به متغیرهای کمکی می باشد، دارند. همچنین پارامترهای خودهمبستگی فضایی ρ در بازه $(\frac{1}{\lambda_{min}}, \frac{1}{\lambda_{max}})$ محدود می شود که در آن λ_{min} و λ_{max} کوچک ترین و بزرگ ترین مقدار ویژه W هستند، [۱۱]. با توجه به این که عناصر روی قطر ماتریس W صفر است بنابراین $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ در نتیجه λ_{min} همیشه منفی و λ_{max} همیشه مثبت است. وقتی W سطری استاندارد شده است آن گاه $\lambda_{max} = 1$ و $\rho < 1$ است. در این سه مدل ارتباط فضایی متغیرها به صورت دو به دو و به فرم عددی توسط ماتریس W مشخص می شود که معمولاً ماتریسی متقارن در نظر گرفته می شود و در آن عنصر W_{ij} ارتباط فضایی مربوط به متغیر پاسخ در موقعیت i ام با متغیر پاسخ در موقعیت j ام است. به عنوان مثال در برخی مطالعات مربوط به قیمت مسکن فاصله مرکز منطقه i ام از منطقه j ام را با d_{ij} نشان می دهند و W_{ij} را از رابطه $\frac{1}{d_{ij}}$ به دست می آورند به طوری که با افزایش فاصله دو منطقه اثر فضایی کم می شود.

۳ تحلیل درست نمایی مدل ها

برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درست نمایی پارامترهای مدل تاخیر فضایی، مدل (۱.۲) را می توان با فرض معلوم بودن ρ به صورت

$$\mathbf{y} - \rho W\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n),$$

نوشت. بنابراین $\boldsymbol{\epsilon} = (I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}$ و داریم

$$L(\sigma^2, \boldsymbol{\epsilon}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon}\right\},$$

پس تابع درست نمایی مشاهدات و لگاریتم آن به صورت

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} |J| \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}]'[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}]\right\}, \\ \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) &\propto -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}]'[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}] \end{aligned}$$

است، که در آن $|J| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{y}}\right| = |I_n - \rho W|$ می باشد. اکنون با مشتق گیری از لگاریتم تابع درست نمایی نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2 داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= (X'X)\boldsymbol{\beta} - X'(I_n - \rho W)\mathbf{y}, \\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}]'[(I - \rho W)\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}]. \end{aligned}$$

بنابراین برآورد ماکسیمم درست نمایی آن ها به صورت

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'(I_n - \rho W)\mathbf{y},$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}[(I_n - \rho W)\mathbf{y} - X\beta]'[(I_n - \rho W)\mathbf{y} - X\beta] \\ &= \frac{1}{n}(\mathbf{y} - X\beta)'(I_n - \rho W)'(I_n - \rho W)(\mathbf{y} - X\beta),\end{aligned}$$

به دست می‌آید. با جایگذاری $\hat{\beta}$ در $\hat{\sigma}^2$ و با تعریف

$$A = [\mathbf{y} - X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y} - \rho(W\mathbf{y} - (X'X)^{-1}X'W\mathbf{y})],$$

داریم $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}A'A$ با قرار دادن

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{y} - X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}$$

یعنی باقیمانده رگرسیون معمولی $\mathbf{y}$ روی X و

$$\mathbf{e} = W\mathbf{y} - (X'X)^{-1}X'W\mathbf{y}$$

باقیمانده رگرسیون معمولی $W\mathbf{y}$ روی X داریم

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_1)'(\mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_1). \quad (1.3)$$

با جایگذاری $\hat{\beta}$ و رابطه (۱.۳) در تابع درست‌نمایی که اکنون تابع درست‌نمایی متمرکز شده نامیده می‌شود به صورت

$$l_c(\rho) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \frac{1}{n}(\mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_1)'(\mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_1) + \sum_i \ln(1 - \rho\omega_i), \quad (2.3)$$

خواهد بود. منظور از تابع درست‌نمایی متمرکز شده این است که دو پارامتر β و σ^2 با ثابت نگه داشتن ρ برآورد و در تابع درست‌نمایی جایگذاری شده‌اند و اکنون با استفاده از این تابع جدید پارامتر ρ برآورد می‌شود. پس

$$\frac{\partial l_c(\rho)}{\partial \rho} = \frac{n(\mathbf{e}_0'\mathbf{e}_1 - \rho\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_0'\mathbf{e}_0 - 2\rho\mathbf{e}_0'\mathbf{e}_1 + \rho^2\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1} - \frac{\sum_i \omega_i}{1 - \rho\omega_i} = 0,$$

به‌طوری که برآورد ρ باید در بازه‌ی $(\lambda_{min}^{-1}, \lambda_{max}^{-1})$ باشد. چون $(I - \rho W)$ وقتی $\rho \in (\lambda_{min}^{-1}, \lambda_{max}^{-1})$ ناویژه می‌باشد و اگر W متقارن باشد $(I - \rho W)$ متقارن و معین مثبت خواهد شد برای این منظور [۴] پیشنهاد کردند که یک بردار $q \times 1$ از مقادیری که در بازه‌ی $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ است برای ρ در نظر گرفته شود و آن‌گاه

$$\begin{pmatrix} l(\rho_1) \\ \vdots \\ l(\rho_q) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \sum_i \ln(1 - \rho_1\omega_i) \\ \vdots \\ \sum_i \ln(1 - \rho_q\omega_i) \end{pmatrix} - \frac{n}{2} \begin{pmatrix} \ln \mathbf{e}'(\rho_1)\mathbf{e}(\rho_1) \\ \vdots \\ \ln \mathbf{e}'(\rho_q)\mathbf{e}(\rho_q) \end{pmatrix},$$

که در آن $\mathbf{e}(\rho) = \mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_1$ و $\rho_1 \dots \rho_q$ مقادیری هستند که بهینه‌سازی حول این مقادیر انجام می‌شود. با به کار بردن یک الگوریتم تکرار شونده و با در نظر گرفتن دقت مورد نظر یک شبکه به اندازه‌ی کافی خوب از q مقدار برای ρ ، $l(\rho)$ مشخص و مقدار بهینه تعیین خواهد شد. پس از تعیین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ρ به صورت $\hat{\rho}$ آن‌گاه می‌توان $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^2$ را به دست آورد. برآورد درست‌نمایی پارامترهای دو مدل خطای فضایی و دوربین فضایی را می‌توان به‌طور مشابه به دست آورد.

۴ تحلیل بیزی معمولی و تقریبی مدل‌های رگرسیون فضایی

فرض کنید مدل تاخیر فضایی به صورت

$$\mathbf{y} = \rho W\mathbf{y} + X\beta + \mathbf{e}, \quad (1.4)$$

است، به طوری که $e \sim MVN(0, \sigma^2 I_n)$. برای β یک توزیع پیشین ناآگاهی بخش مانند یک توزیع نرمال با واریانس بزرگ و برای σ^2 یک توزیع پیشین گامای وارون فرض می شود. بنابراین

$$\begin{aligned}\pi(\beta, \sigma^2) &= \pi(\beta|\sigma^2)\pi(\sigma^2) \\ &= N(c, \sigma^2 T)IG(a, b) \\ &= \frac{b^a}{(\pi)^{\frac{k}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}\Gamma(a)}(\sigma^2)^{-(a+\frac{k}{2}+1)} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\{\beta - c\}'T^{-1}(\beta - c) + 2b}{2\sigma^2}\right], \\ \pi(\sigma^2) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}(\sigma^2)^{-(a+1)}\exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 > 0, a, b > 0.\end{aligned}$$

و برای پارامتر ρ توزیع یکنواخت به صورت $\pi(\rho) \sim U(\lambda_{min}^{-1}, \lambda_{max}^{-1})$ که در آن λ_{min} و λ_{max} کوچک ترین و بزرگ ترین مقدار ویژه W هستند. فرض کنید تمام مشاهدات به صورت $D = \{\mathbf{y}, X, W\}$ و پارامترهای مدل به صورت $\theta = \{\beta, \sigma^2, \rho\}$ در نظر گرفته شوند. تابع درست نمایی برای این مدل به صورت

$$P(D|\beta, \sigma^2, \rho) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}|A|\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(A\mathbf{y} - X\beta)'(A\mathbf{y} - X\beta)\right\}$$

است، که در آن $A = (I_n - \rho W)$ بنابراین توزیع پسین به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\beta, \sigma^2, \rho|D) &\propto \pi(D|\beta, \sigma^2, \rho)\pi(\beta|\sigma^2)\pi(\sigma^2)\pi(\rho) \\ &\propto (\sigma^2)^{a^*+(\frac{k}{2})+1}|A| \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}[2b^* + (\beta - c^*)'(T^*)^{-1}(\beta - c^*)]\right\}\end{aligned}\quad (2.4)$$

نوشت، که در آن

$$\begin{aligned}c^* &= (X'X + T^{-1})^{-1}(X'A\mathbf{y} + T^{-1}c) \\ T^* &= (X'X + T^{-1})^{-1} \\ a^* &= a + \frac{n}{2} \\ b^* &= b + \frac{(c'T^{-1}c + \mathbf{y}'A'A\mathbf{y} - (c^*)'(T^*)^{-1}c^*)}{2}\end{aligned}$$

است. همان طور که مشاهده می شود توزیع پسین به صورت حاصل ضرب یک توزیع $N(c^*, \sigma^2 T^*)$ و گامای معکوس (a^*, b^*) است. این توزیع پسین شکل مشخصی ندارد و برای به دست آوردن برآوردهای بیزی پارامترها از الگوریتم های $MCMC$ استفاده می شود. برای اجرای الگوریتم گیبز ابتدا مقادیر اولیه $(\beta^{(0)}, \sigma^{2(0)}, \rho^{(0)})$ را در نظر بگیرید و $m = 0$ قرار دهید و سپس توزیع های شرطی کامل پارامترها به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\beta^{(m+1)}|\sigma^{2(m)}, \rho^{(m)}, D) &\propto \pi(D|\beta, \sigma^2, \rho)\pi(\beta|\sigma^2) = N(c^*, \sigma^2 T^*) \\ \pi(\sigma^{2(m+1)}|\beta^{(m+1)}, \rho^{(m)}, D) &\propto \pi(D|\beta, \sigma^2, \rho)\pi(\sigma^2) = IG(a^*, b^*)\end{aligned}$$

تشکیل دهید. توزیع های شرطی کامل برای پارامترهای β و σ^2 شکل بسته ای دارد. اما توزیع شرطی کامل برای ρ به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\rho^{(m+1)}|\beta^{(m+1)}, \sigma^{2(m+1)}, D) &\propto \pi(D|\beta, \sigma^2, \rho)\pi(\rho) \\ &\propto |I_n - \rho W|\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(A\mathbf{y} - X\beta)'(A\mathbf{y} - X\beta)\right) \times I(\rho)\end{aligned}$$

است که شکل مشخصی ندارد و از الگوریتم متروپلیس-هاستینگس استفاده می شود. برای استفاده از این الگوریتم ابتدا باید یک توزیع پیشنهادی برای $\pi(\rho|\beta, \sigma, D)$ در نظر گرفته شود که مقادیر کاندید ρ از آن تولید شوند. لسج و پیس [۱۱] توزیع پیشنهادی را به صورت نرمال قدم

زدن تصادفی پیشنهاد دادند. فرض کنید ρ^c مقداری است که ρ دارد و ρ^* مقدار کاندید است که پذیرفته یا رد می‌شود و احتمال پذیرش به صورت $\psi(\rho^c, \rho^*) = \min[\frac{\pi(p^*|\beta, \sigma^*)}{\pi(\rho^c|\beta, \sigma^*)}, 1]$ محاسبه می‌شود. در نهایت بعد از اجرای الگوریتم‌های $MCMC$ فوق توزیع پسین مشخص و برآورد بیزی پارامترها از روی میانگین توزیع‌های پسین حاشیه‌ای محاسبه خواهد شد. گاهی در عمل اجرای این الگوریتم‌ها بسیار زمان‌بر و گاهی اوقات برای رسیدن به همگرایی نیاز به صرف زمان بسیار است. به عنوان یک پیشنهاد می‌توان در این مدل‌ها از رهیافت بیزی تقریبی استفاده کرد. [۱۴]، [۱۳] و [۸] با فرض نرمال بودن متغیرهای پنهان فضایی در مدل‌های شامل متغیرهای پنهان گاوسی روش بیز تقریبی را به جای روش بیز معمولی و الگوریتم‌های نمونه‌گیری مونت کارلویی معرفی کرده و نشان دادند محاسبات این روش سریع‌تر و نتایجی معادل روش‌های بیزی معمولی ارائه می‌کند. [۸] با در نظر گرفتن توزیع پیشین نرمال برای متغیرهای پنهان در مدل‌های شامل متغیر پنهان طبق قضیه زیر نشان دادند که توزیع پسین تقریبی این متغیرها متعلق به خانواده توزیع نرمال است.

قضیه ۱.۴. اگر در مدل، متغیرهای پنهان $\mathbf{x}$ دارای توزیع پیشین نرمال $\mathbf{x} \sim N(H\beta, \Sigma_\theta)$ و متغیر پاسخ $\mathbf{y}$ متعلق به خانواده نمایی $\pi(y_i|x_i) = \exp\{y_i x_i - b(x_i) + c(y_i)\}$ باشد، با خطی کردن حول یک مقدار ثابت، توزیع را می‌توان با توزیع نرمال به صورت

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \approx N_n(\hat{\mu}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^\circ), \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}^\circ)),$$

تقریب زد که در آن

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^\circ) &= H\beta + \Sigma_\theta A' R^{-1}(z(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{obs}) - AH\beta), \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}^\circ) &= \Sigma_\theta - \Sigma_\theta' R^{-1} A \Sigma_\theta, \quad R = A \Sigma_\theta A' + P,\end{aligned}$$

و P یک ماتریس قطری با عناصر $i = 1, \dots, k$ به ازای $P(i, i) = \frac{1}{b''(x_i^\circ)}$ می‌باشند. برهان: مراجعه شود به [۸].

برای تعیین مقدار ثابت و خطی‌سازی قسمت درست‌نمایی در آن و برازش یک تقریب نرمال به پسین $\hat{\pi}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ از الگوریتم زیر استفاده می‌شود.

الف- مقدار اولیه $\mathbf{x}^\circ$ به عنوان مثال $\mathbf{x}^\circ = M(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})$ انتخاب و $m = 0$ قرار داده شود.

ب- از قضیه ۱.۴ توزیع پسین تقریبی در $\mathbf{x}^m$ ، یعنی $\hat{\pi}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \equiv N_n(\hat{\mu}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}^m), \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}^{obs}))$ تعیین می‌شود.

ج- قرار دهید $\mathbf{x}^{(m+1)} = \hat{M}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$

د- $m = m + 1$ اختیار شود و تا رسیدن به همگرایی، الگوریتم از مرحله (ب) مجدداً شروع شود. پس از رسیدن به همگرایی، الگوریتم متوقف و توزیع پسین تقریبی تعیین می‌شود.

برای برآورد بیزی پارامترها توزیع پسین پارامترهای مدل به صورت

$$\pi(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta})\pi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta})}{\pi(\mathbf{y})\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \propto \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta})\pi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta})}{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})},$$

است، که برای هر مقدار $\mathbf{x}$ ، قابل محاسبه است. برای مثال می‌توان از مد توزیع پسین تقریبی $\hat{\pi}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ برای یک بردار ثابت از پارامترها، یعنی $\mathbf{x} = \hat{M}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ استفاده کرد. با به کار بردن تقریب نرمال برازش شده به توزیع شرطی کامل $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ ، یک چگالی تقریبی برای توزیع پسین پارامترهای مدل به صورت

$$\hat{\pi}(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y}) \propto \frac{\pi(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta})\pi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta})}{\hat{\pi}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{M}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}, \quad (3.4)$$

حاصل می‌شود، که این تقریب توسط [۱۴] یک تقریب لاپلاس از چگالی پسین پارامترهای مدل نامیده شد. برای تعیین پسین تقریبی (۳.۴) از الگوریتم زیر استفاده می‌شود:

الف- مد تابع $\log \hat{\pi}(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})$ با روش بهینه‌سازی شبه-نیوتن یا نیوتن رافسون تعیین و با $\boldsymbol{\eta}^*$ نشان داده می‌شود.

ب- ماتریس هیسین از رابطه $H = (\frac{\partial^2 \log \hat{\pi}(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})}{\partial \eta^i \partial \eta^j})$ محاسبه و معکوس آن به صورت $H^{-1} = V\Lambda V'$ تجزیه شود، که در آن V ماتریس بردارهای ویژه و Λ ماتریس قطری مقادیر ویژه آن است.

ج- مبدا مختصات به η^* انتقال داده شود، فرمول مختصات در مبدا $\eta^* + V\Lambda^{-1}t$ به صورت $\eta(t) = \eta^* + V\Lambda^{-1}t$ تعریف می شود، که در آن t مقادیر استاندارد شده هستند. به عنوان مثال، برای حالت دو بعدی $t = (t_1, t_2)$ ، با قرار دادن مبدا مختصات $t = (0, 0)$ در رابطه بالا $\eta(0) = \eta^*$ حاصل می شود.

د- با شروع از مبدا مختصات جدید روی هر یک از محورها نقاطی به فاصله مقادیر صحیح δ_t به گونه ای اختیار شوند، که شرط

$$\log \hat{\pi}(\eta(0)|y) - \log \hat{\pi}(\eta(t)|y) < \delta_t, \quad (۴.۴)$$

برقرار باشد، سپس به طور مشابه نقاط درون صفحات نیز تعیین شوند. معمولاً در نامساوی بالا $\delta_t = 2/5$ در نظر گرفته می شود. با به کار بردن این الگوریتم η_i هایی از توزیع $\pi(\eta|y)$ تولید می شوند که می توان از آن ها برای تقریب توزیع $\pi(\eta|y)$ استفاده کرد.

برای تعمیم رهیافت بیزی تقریبی به مدل های رگرسیونی فضایی در مطالعات اقتصادسنجی فضایی ابتدا مدل به صورت یک مدل آمیخته خطی تعمیم یافته شامل متغیرهای پنهان فضایی مدل بندی می شود. در راستای کاهش زمان محاسبات متغیرهای پنهان موجود در مدل با یک میدان تصادفی مارکوفی گاوسی مدل بندی می شوند. ماتریس واریانس-کوواریانس میدان تصادفی مارکوفی گاوسی به صورت یک ماتریس دقت که عکس ماتریسی واریانس-کوواریانس میدان تصادفی گاوسی است بیان می شود که یک ماتریس پراکنده است و همین باعث سادگی در محاسبات و کاهش زمان محاسبات می شود. فرض کنید $y' = (y_1, \dots, y_n)$ بردار متغیر پاسخ در n موقعیت $s_1, \dots, s_n$ باشد، به طوری که y می تواند گاوسی یا غیرگاوسی باشد و متعلق به خانواده نمایی با میانگین μ_i در نظر گرفته می شود. اکنون می توان سه مدل رگرسیون فضایی تاخیر فضایی، خطای فضایی و دوربین فضایی را به صورت مدل کلی

$$\eta_i = g(\mu_i) = z_i'\beta + u_i, \quad (۵.۴)$$

در نظر گرفت، که در آن پیشگویی کننده η_i شامل اثرات ثابت z_i و تصادفی u_i است، به طوری که این مدل می تواند شامل اثرات غیرخطی از متغیرهای پنهان و اثرات غیرخطی از متغیرهای کمکی نیز باشد. فرض کنید بردار θ_1 ابر پارامترهای مربوط به y و θ_2 بردار ابر پارامترهای مربوط به بردار x است، به طوری که بردار x شامل اثر کلی پیشگویی کننده خطی برای هر مشاهده، پارامترهای رگرسیونی و اثرات پنهان فضایی به صورت (η_i, β', u') باشد. بردار x به صورت یک میدان تصادفی مارکوفی گاوسی (GMRF) با ماتریس دقت $Q(\theta_2)$ فرض می شود. بنابراین تابع درست نمایی مدل با در نظر گرفتن $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ به شکل $\pi(y|x, \theta) = \prod_{i \in I} \pi(y_i|x_i, \theta)$ که در آن $1 \leq l \leq n$ ، بیان گر مشاهدات به غیر از گمشده ها است. توزیع توام x یعنی پارامترهای مدل، اثرات پنهان و ابر پارامترها یعنی بردار θ به صورت

$$\begin{aligned} \pi(x, \theta|y) &\propto \pi(\theta)\pi(x|\theta) \prod_{i \in I} \pi(y_i|x_i, \theta) \\ &\propto \pi(\theta)|Q(\theta)|^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x'Q(\theta)x + \sum_{i \in I} \log(\pi(y_i|x_i, \theta)) \right\}, \end{aligned} \quad (۶.۴)$$

توزیع های حاشیه ای برای اثرات پنهان $\pi(\theta_j|y) \propto \int \pi(\theta|y) d\theta_{-j}$ و برای ابر پارامتر از $\pi(x_i|y) \propto \int \pi(x_i|y)\pi(\theta|y) d\theta$ به دست می آیند، که در آن θ_{-j} بردار ابر پارامترها بدون θ_j است. اکنون از رهیافت بیزی تقریبی دیدیم $\pi(x|y, \theta)$ را می توان با توزیع نرمال $\hat{\pi}(x|y, \theta)$ تقریب زد و از خواص توزیع نرمال $\pi(x_i|\theta, y)$ به دست آورد. $\pi(\theta|y)$ را می توان از الگوریتم توضیح داده شده در بالا تعیین نمود. بنابراین تقریبی از توزیع حاشیه ای برای x به صورت

$$\hat{\pi}(x_i|y) = \sum_k \hat{\pi}(x_i|\theta_k, y) \hat{\pi}(\theta_k|y) \Delta_k,$$

محاسبه می شود، که در آن k تعداد نمونه های تولید شده از $\pi(\theta|y)$ از الگوریتم توضیح داده شده در بالا تعیین می شود و Δ_k وزن تخصیص داده شده به هر یک از عناصر بردار θ_k است که معمولاً یکسان و برابر ۱ در نظر گرفته می شود. در بخش های بعدی به بررسی یک مطالعه شبیه سازی و یک مجموعه داده واقعی پرداخته می شود. برای تحلیل داده ها از نرم افزار R و تحلیل بیزی تقریبی از پکیج INLA و INLABMA برای رهیافت بیزی معمولی و ماکسیمم درست نمایی از پکیج Spdep و توابع lagsarlm و errorsarlm و MCMCsamp استفاده شده است.

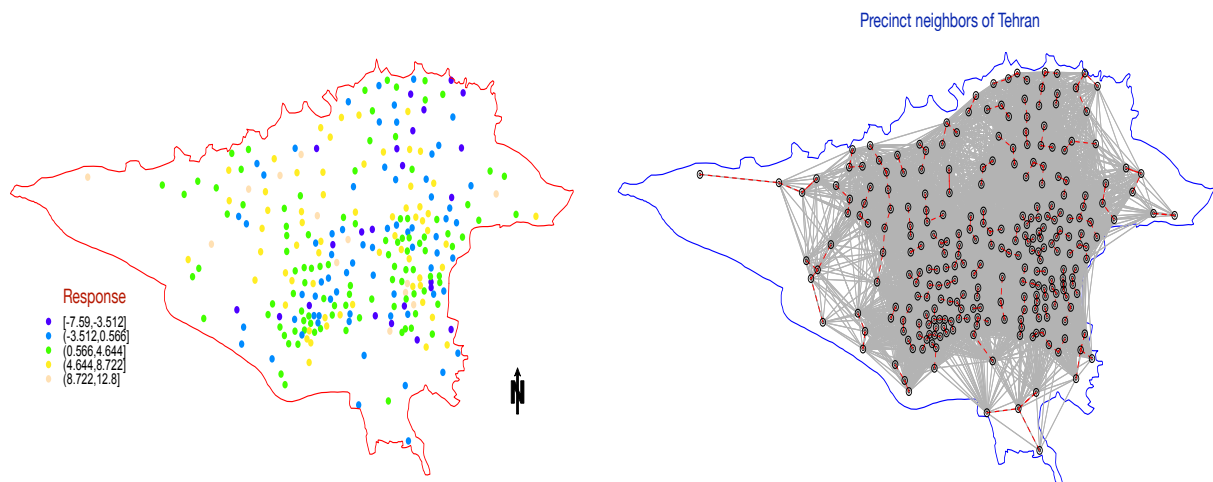
۵ مطالعه شبیه سازی

در این بخش یک مطالعه شبیه سازی برای ارزیابی عملکرد سه روش پیشنهادی برازش مدل های اقتصادسنجی فضایی، مدل اتورگرسیو فضایی (SLM)، مدل دوربین فضایی (SDM) و مدل خطای فضایی (SEM) ارائه می شود. شبیه سازی را براساس مدل خطای فضایی در ۲۸۶

محله شهرداری شهر تهران انجام شده است. ساختار فضایی داده‌ها بوسیله ماتریس W بر اساس همسایگی‌های محله‌ها مطابق شکل ۲ (راست) تعیین شده است. با در نظر گرفتن پارامترها به صورت $\sigma = 3, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 2, \lambda = 0.5$ و دو متغیر کمکی از توزیع نرمال به صورت $X_1 \sim N(2, 1/5)$ و $X_2 \sim N(0, 1)$ در ۲۸۶ محله متغیر پاسخ به صورت

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i, \quad u = \lambda W u + \epsilon, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, 286,$$

تولید شد. داده‌های تولید شده و همسایگی‌های مورد نظر برای تولید ماتریس W در نمودار ۲ مشاهده می‌شود. داده‌های شبیه‌سازی با رهیافت



شکل ۲: نمودار موقعیت داده‌های تولید شده و همسایگی‌ها برای تولید ماتریس مجاورت

ماکسیمم درست‌نمایی، بیزی معمولی و بیزی تقریبی مورد بررسی قرار گرفتند و نتایج به شرح جدول ۱ به دست آمد. نتایج برآورد پارامترها بیانگر این است که به نظر تفاوت بین سه رهیافت وجود دارد. برای ارزیابی دقیق‌تر از ملاک‌های خطای پیش‌گویی استفاده شده است. مقادیر

جدول ۱: نتایج شبیه‌سازی سه رهیافت: برآورد پارامترها، انحراف معیار برآورد و چندک‌ها

رهیافت	پارامتر	مقدار واقعی	برآورد	م. انحراف معیار	چندک ۰.۲۵	چندک ۰.۵	چندک ۰.۹۷۵
ماکسیمم درست‌نمایی	λ	۰/۵	۰/۴۹۴۹	۰/۲۱۳۹	۰/۰۷۵۷	۰/۴۹۵۲	۰/۹۱۴۱
	β_0	۱	۰/۴۲۰۹	۰/۴۴۱۶	-۰/۴۴۴۶	۰/۴۲۱۵	۱/۲۸۶۵
	β_1	۰/۷	۰/۸۶۱۳	۰/۱۱۶۹	۰/۶۳۲۱	۰/۸۶۱۴	۱/۰۹۰۴
	β_2	۲	۲/۲۱۳۹	۰/۱۸۱۷	۱/۸۵۷۹	۲/۲۱۴۱	۲/۵۷۰۰
بیزی معمولی	λ	۰/۵	۰/۵۶۳۴	۰/۲۲۷۹	۰/۰۶۳۵	۰/۵۸۵۱	۰/۹۲۶۷
	β_0	۱	۰/۴۷۵۴	۰/۸۲۳۴	-۱/۰۱۱۵	۰/۴۲۹۶	۲/۳۷۲۲
	β_1	۰/۷	۰/۸۵۹۶	۰/۱۱۹۵	۰/۶۲۷۰	۰/۸۵۸۰	۱/۰۹۶۹
	β_2	۲	۲/۲۰۶۸	۰/۱۸۴۸	۱/۸۵۰۹	۲/۲۰۵۰	۲/۵۶۶۶
بیزی تقریبی	λ	۰/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۲۳۹۶	۰/۰۵۶۶	۰/۴۹۹۷	۰/۹۴۲۸
	β_0	۱	۰/۴۳۵۰	۰/۴۴۰۷	-۰/۴۳۰۸	۰/۴۳۵۰	۱/۳۰۰۲
	β_1	۰/۷	۰/۸۶۲۵	۰/۱۱۷۵	۰/۶۳۱۵	۰/۸۶۲۵	۱/۰۹۳۳
	β_2	۲	۲/۲۱۹۷	۰/۱۸۲۷	۱/۸۶۰۵	۲/۲۱۹۷	۲/۵۷۸۵

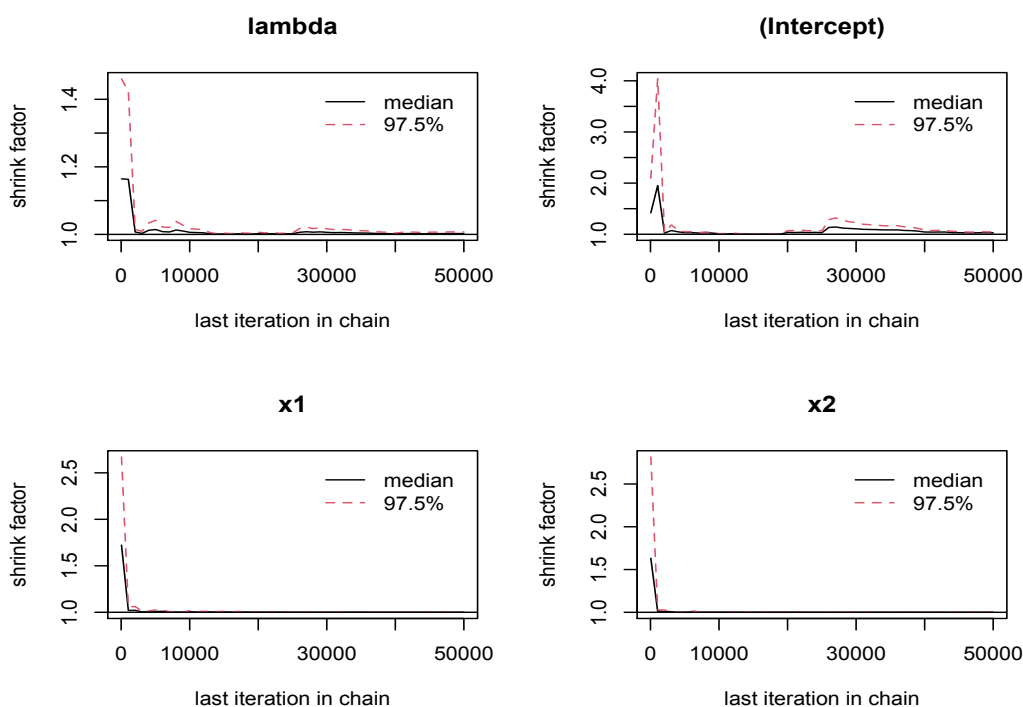
میانگین توان دوم خطا، (MSE) مجذور میانگین توان دوم خطا (RMSE) و مجذور میانگین توان دوم خطای نسبی به صورت

$$RRMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i^2}}$$

برای سه رهیافت محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است. با توجه به نتایج، رهیافت بیزی معمولی و بیزی تقریبی نسبت به ماکسیمم درست‌نمایی از دقت بیشتری برخوردار هستند. به‌ویژه با توجه به معیار $RRMSE$ رهیافت درست‌نمایی از عملکرد مناسبی برخوردار نیست و دو رهیافت بیزی دقت مشابهی دارند. لازم به ذکر است که زمان اجرای رهیافت بیزی معمولی حدود دو برابر رهیافت بیزی تقریبی است. برای تحلیل بیزی معمولی و اجرای الگوریتم‌های MCMC از ۱۰۰۰۰۰ تکرار با تعداد داغیدن ۵۰۰۰۰ و برای بررسی همگرایی آن‌ها از ملاک‌های گلن-روبین ([۶]) استفاده شد. نمودارهای همگرایی گلن برای چهار پارامتر در شکل ۳ رسم شده است. مطابق معیار گلن و روبین که برای چهار پارامتر کمتر از ۲/۱ به دست آمد و نمودار گلن برای هر چهار پارامتر بعد از ۵۰۰۰۰ تکرار به شرط همگرایی یعنی کمتر از ۱/۱ می‌رسد. نمودار اثر پارامترها در شکل ۴ آمیختگی مناسب نمونه‌های مونت کارلویی برای رهیافت بیزی معمولی را نشان می‌دهد. همچنین نمودار برآورد توزیع پسین پارامتر خودهمبستگی فضایی رهیافت بیزی معمولی و بیزی تقریبی همراه با برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای مقایسه عملکرد آن‌ها نسبت به این پارامتر در شکل ۵ رسم شده‌اند.

جدول ۲: مقادیر مجذور میانگین مربع خطای نسبی برای سه مدل.

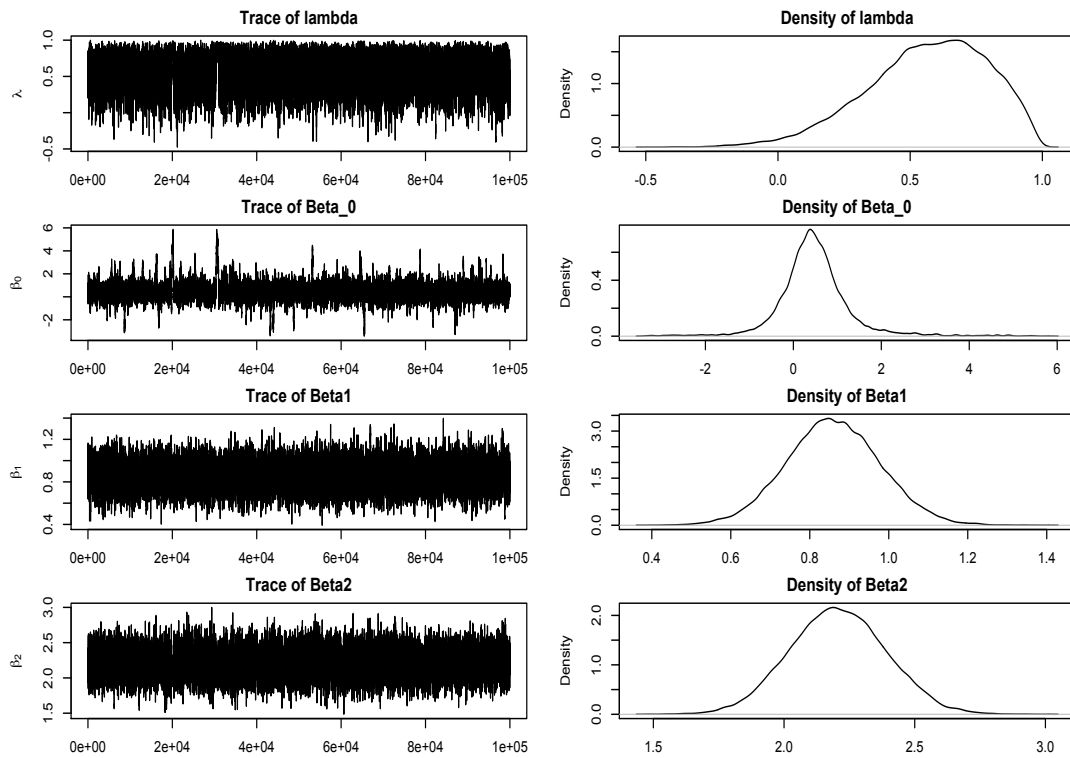
رهیافت	MSE	RMSE	RRMSE
ماکسیمم درست‌نمایی	۰/۱۵۶۷	۰/۳۹۵۸	۲/۸۲۰۷
بیزی معمولی	۰/۱۵۵۲	۰/۳۹۴۰	۱/۱۳۵۳
بیزی تقریبی	۰/۱۵۳۶	۰/۳۹۱۹	۱/۶۵۳۴



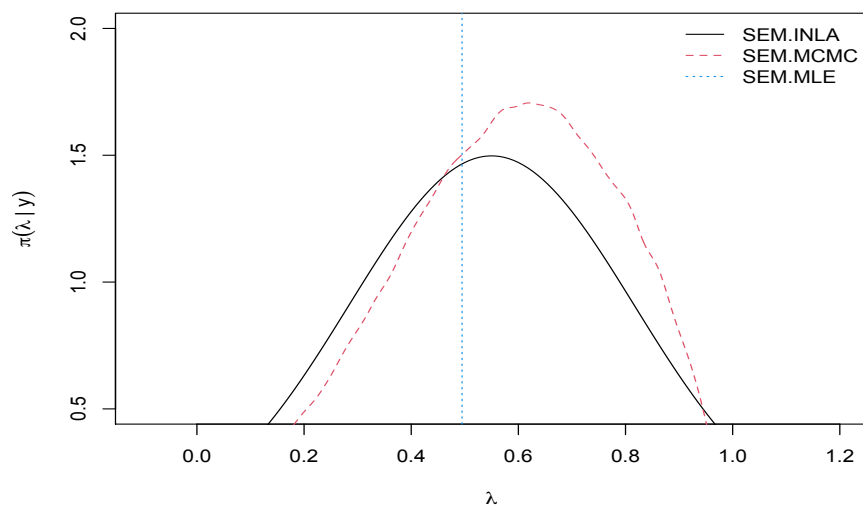
شکل ۳: نمودارهای گلن پارامترها برای اجرای ۵۰۰۰۰ نمونه مونت کارلویی

۶ داده‌های قیمت مسکن شهر تهران

در این قسمت داده‌های مربوط به متوسط قیمت مسکن در مناطق مختلف تهران بررسی می‌شود. چون داده‌های قیمت مسکن دارای همبستگی از نوع فضایی (مکانی) است، با استفاده از سه مدل رگرسیون فضایی مدل‌بندی می‌شود. برای بررسی وجود ارتباط فضایی، از آزمون I -موران استفاده می‌شود. مقدار این آماره $۴۳/۰$ و مقدار احتمال آن $۱۰^{-۱۶} \times ۲/۲$ به دست آمد، که فرض استقلال مشاهدات رد و وجود ارتباط فضایی پذیرفته می‌شود. داده‌های قیمت مسکن برای شهر تهران به صورت روزانه در سامانه اطلاعات بازار املاک ایران ثبت می‌شود که این داده‌ها را می‌توان در سایت www.hmi.mrud.ir مشاهده کرد. قیمت مسکن نوساز (تا یک سال ساخت) برای محله‌های ۲۲ منطقه

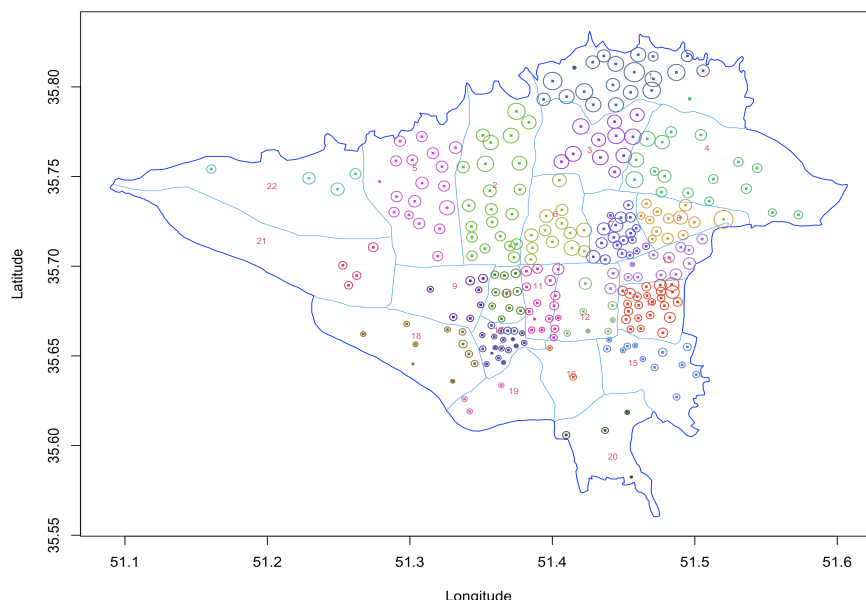


شکل ۴: نمودارهای اثر پارامترها برای اجرای ۱۰۰۰۰۰ نمونه مونت کارلویی



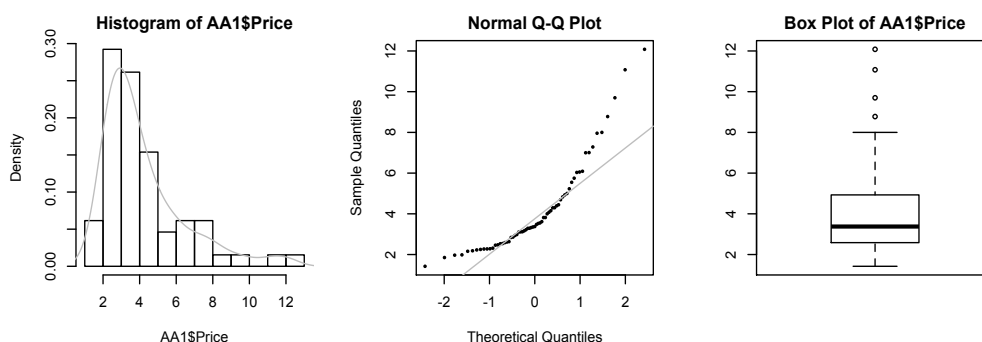
شکل ۵: نمودار برآورد درست‌نمایی پارامتر خودهمبستگی فضایی (نقطه چین آبی)، نمودار برآورد توزیع پسین پارامتر خودهمبستگی فضایی رهیافت بیزی معمولی (خط چین قرمز)، نمودار برآورد توزیع پسین پارامتر خودهمبستگی فضایی رهیافت بیزی تقریبی (خط ممتد سیاه).

در شهریور ماه سال ۱۳۹۴ استخراج شد. موقعیت مناطق و داده‌های در دسترس روی نقشه تهران در شکل ۶ مشخص شده است. دایره بزرگتر نشان دهنده قیمت مسکن بیشتر و اعداد منطقه را نشان می‌دهند. برای تفکیک پذیری بهتر مناطق از رنگ‌های مختلف استفاده شده است. میانگین قیمت مسکن حدود چهار میلیون، ماکسیمم قیمت مسکن دوازده میلیون و مینیمم قیمت مسکن حدود یک و نیم میلیون است. نمودار بافت‌نگار، جعبه‌ای و نرمال چندک-چندک داده‌ها در شکل ۷ رسم شده است، که نشان می‌دهند داده‌ها نرمال نیستند. آماره آزمون



شکل ۶: موقعیت داده‌های متوسط قیمت مسکن روی نقشه شهر تهران، دایره بزرگتر نشان دهنده قیمت مسکن بیشتر است.

شاپیرو وویلک و کلموگروف اسمیرنوف محاسبه شد که مقدار احتمال این دو آزمون به 0.000 و 0.04 به دست آمد و بنابراین نرمال بودن داده‌ها رد می‌شود. به دلیل عدم نرمال بودن داده‌ها از تبدیل لگاریتمی بر روی داده‌ها استفاده شد و مقدار آماره شاپیرو وویلک و کلموگروف اسمیرنوف به ترتیب 0.963 و 0.5848 به دست آمد، که فرض نرمال بودن پذیرفته می‌شود. مساحت ملک به عنوان متغیر کمکی در



شکل ۷: نمودار جعبه‌ای، چندک-چندک و هیستوگرام داده‌های مسکن تهران.

نظر گرفته شد. داده‌ها با سه مدل رگرسیون فضایی SEM، SLM و SDM و با سه رهیافت ماکسیمم درست‌نمایی، بیزی و بیزی تقریبی تحلیل و نتایج بیزی تقریبی در جدول ۳ آورده شده است. مقدار معیار AIC برای سه مدل SLM، SDM و SEM محاسبه و به ترتیب ۱۷/۲۲۴، ۱۸/۹۵۹ و ۱۹/۲۲۲ حاصل شد که مقدار AIC مدل SLM کمتر است و مدل مناسب برای برازش داده‌های مورد بررسی است. همچنین مقادیر مجذور میانگین توان دوم خطای نسبی برای سه مدل SLM، SDM و SEM محاسبه و در جدول ۴ ارائه شده است. نتایج جدول ۴ بیان‌گر برتری مدل SLM نسبت به دو مدل SEM و SDM و دقت بهتر رهیافت بیزی و بیزی تقریبی نسبت به درست‌نمایی و معادل بودن نتایج رهیافت بیزی معمولی با بیزی تقریبی برای این مجموعه داده است، به طوری که زمان اجرای رهیافت بیزی معمولی دو برابر رهیافت بیزی تقریبی به طول انجامید. برای تحلیل بیزی معمولی از الگوریتم گیز و متروپلیس هاستینگس با 50000 تکرار استفاده شد.

جدول ۳: برآورد بیزی تقریبی پارامترها، متوسط انحراف معیار و چندک‌ها (برای داده‌های مسکن).

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	چندک ۰/۰۲۵	چندک ۰/۵	چندک ۰/۹۷۵
مدل SLM					
ρ	۰/۸۱۷۳	۰/۰۸۲۳	۰/۶۳۸۶	۰/۸۲۹۲	۰/۹۵۷۸
β_0	-۰/۴۱۰۲	۰/۱۳۰۰	-۰/۶۶۴۱	-۰/۴۱۱۲	-۰/۱۳۱۷
β_{Area}	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۹۳
مدل SDM					
ρ	۰/۸۲۶۱	۰/۰۹۴۱	۰/۶۱۰۱	۰/۸۳۱۱	۰/۹۷۶۲
β_0	-۰/۳۴۴۹	۰/۲۴۶۶	-۰/۸۸۹۷	-۰/۳۴۲۳	۰/۱۹۹۸
β_{Area}	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۹۴
γ	-۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۲۶	-۰/۰۰۷۴	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۶۱
مدل SEM					
λ	۰/۹۲۰۲	۰/۰۵۸۶	۰/۷۷۳۱	۰/۹۴۱۱	۰/۹۸۹۷
β_0	۰/۵۵۹۸	۰/۳۱۹۲	-۰/۹۹۰۱	۰/۵۹۶۴	۱/۸۹۷۳
β_{Area}	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۸۳

جدول ۴: مقادیر مجذور میانگین مربع خطای نسبی برای سه مدل.

رهیافت	SLM	SEM	SDM
ماکسیمم درست‌نمایی	۰/۲۴۱۸	۰/۲۴۴۷	۰/۲۴۳۵
بیزی معمولی	۰/۲۳۶۷	۰/۲۴۰۲	۰/۲۳۸۹
بیزی تقریبی	۰/۲۳۷۱	۰/۲۳۹۷	۰/۲۳۸۸

۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سه مدل رگرسیونی فضایی در اقتصادسنجی برای مشاهداتی که دارای وابستگی مکانی هستند به‌کار گرفته شد. نحوه برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی و رهیافت بیزی تقریبی ارائه شد. در یک مجموعه داده واقعی به بررسی ارتباط قیمت و مساحت مسکن در شهرپور ماه ۱۳۹۴ شهر تهران پرداخته شد. با توجه به عدم نرمال بودن داده‌ها از تبدیل لگاریتمی داده‌ها استفاده شد. پس از برآزش مدل‌ها و مقایسه نتایج به دست آمده مدل مناسب مدل SLM انتخاب و در هر سه مدل و با هر دو رهیافت بیزی تقریبی و درست‌نمایی وجود اثر فضایی و ارتباط مستقیم بین قیمت مسکن و مساحت پذیرفته می‌شود. با استفاده از معیار مجذور میانگین توان دوم خطای نسبی و براساس این دو مجموعه داده مشاهده شد که رهیافت بیزی تقریبی برای این نوع از مدل‌های اقتصادسنجی فضایی نسبت به رهیافت درست‌نمایی از عملکرد تقریباً بهتری برخوردار است و زمان محاسبات رهیافت بیزی تقریبی کمتر از رهیافت بیزی معمولی است. در مدل‌های آمیخته خطی فضایی [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] با استفاده از توزیع انعطاف‌پذیر چوله‌نرمال به تحلیل این مدل‌ها پرداخته‌اند. به عنوان پیشنهاد در مدل‌های به‌کار گرفته شده در این مقاله مشابه اکثر مطالعات پیرامون این نوع مدل‌ها، برای راحتی محاسبات معمولاً توزیع نرمال برای خطاها منظور می‌شود، به عنوان پیشنهاد می‌توان در مدل‌های اقتصادسنجی فضایی از توزیع‌های انعطاف‌پذیرتر مثل چوله نرمال، چوله نرمال بسته و چوله تی استفاده کرد که کلاس بزرگتری نسبت به توزیع نرمال هستند.

فهرست منابع

- [1] L. Anselin, Spatial Econometrics: Method and Models In: Studies in Operational Regional Science, Springer, 1988.
- [2] L. Anselin, Thirty Years of Spatial Econometrics, Papers in Regional Science, **89** (2010) 3-25.
- [3] G. Arbia, Spatial Econometrics: A Broad View, Foundations and Trends in Econometrics, **(8:3-4)** (2016) 145-265.
- [4] R. P. Barry, R. K. Pace, Kriging with Large Data Sets using Sparse Matrix Techniques, Communication Statistics: Computation and Simulation, **26** (1997) 619-629.

- [5] R.s. Bivand, V. Gómez-Rubiob, H. Rue, Approximate Bayesian Inference for Spatial Econometrics Models, *Spatial Statistics*, **9** (2014) 146–165.
- [6] S. P. Brooks. and A. Gelman, General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **7** (1998) 434-455.
- [7] R. Davidson, J. G. Mackinnon, *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University, New York, 1993.
- [8] J. Eidsvik, A. O. Finley, S. Banerjee, H. Rue, Approximate Bayesian Inference for Large Spatial Datasets Using Predictive Process Models, *Computational Statistics and Data Analysis*. **56** (2012) 1362-1380.
- [9] H. Kelejian, G. Piras, *Spatial Econometrics*. London, England: Academic Press, 2017.
- [10] J. LeSage, *Spatial Econometrics*, Department of Economics University of Toledo, 1999.
- [11] J. LeSage, R. K. Pace, *Introduction to Spatial Econometrics*, Chapman and Hall/CRC, 2009.
- [12] J. Lesage, M. Ficher, *Spatial Growth Regression: Model Specification, Estimation and Interpretation*, *Spatial Economic Analysis*, **3** (2008) 275–304.
- [13] H. Rue, L. Held, *Gaussian Markov Random Fields. Theory and Applications*, Chapman and Hall, London, 2005.
- [14] H. Rue, S. Martino, N. Chopin, Approximate Bayesian Inference for Latent Gaussian Model by Using Integrated Nested Laplace Approximations (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society*. **71** (2009) 319–392.
- [15] F. Hosseini, J. Eidsvik, M. Mohammadzadeh, Approximate Bayesian inference in spatial GLMM with skew normal latent variables, *Computational Statistics & Data Analysis* **55 (4)** (2011) 1791-1806.
- [16] F. Hosseini, M. Mohammadzadeh, Bayesian Prediction for Spatial Generalized Linear Mixed Models with Closed Skew Normal Latent Variables, *Australian & New Zealand Journal of Statistics* **54 (1)** (2012) 43-62.
- [17] F. Hosseini, O. Karimi, Approximate composite marginal likelihood inference in spatial generalized linear mixed models, *Journal of Applied Statistics* **46 (3)** (2020) 542-558.



Bayesian Analysis of Spatial Econometrics Regression Models

Fatemeh Hossein, , Omid Karimi[†]

Semnan University, Department of Statistics

Received: 2020/5/25

Accepted: 2020/11/26

Communicated by: Mohammad Reza Zadkarami

Abstract: Spatial regression models are often used for modeling spatial economic data. The main purpose of studying these models is to obtain parameter estimates and then predict at new locations. For this purpose, the maximum likelihood approach is first investigated and in order to increase the accuracy of parameter estimation and reduce the computation time, the conventional Bayesian approach and an approximate Bayesian approach are examined for three regression models, spatial Lag model, spatial Durbin model and spatial error model. Finally, in a simulation study and a real example of housing data in Tehran, the performance of models and approaches are compared. The existence of a spatial effect and a direct relationship between housing price and area in the data is accepted. Using the Relative Root Mean Square Error for these two data sets, it was concluded that the approximate Bayesian approach for spatial econometric models has a better performance than the maximum likelihood and the conventional Bayesian approaches. In addition, it was found that the computational time of the Bayesian approach is about twice as long as the approximate Bayesian approach.

Keywords: Spatial Lag model, Spatial Durbin model, Spatial error model, Approximate Bayesian approach.

Mathematics Subject Classification (2010): 91G70, 62F15, 91B72.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†] Corresponding author: Fatemeh Hosseini. fatemeh.hosseini@semnan.ac.ir