



بررسی پایداری شبکه عصبی BAM تاخیری دولایه براساس پارامترهای شبکه

زهرا محمدزاده^{*}، اسداله محمودزاده وزیری^۲، اسد عازمی^۳، امید ربیعی مطلق^۴

- (۱) دانشجوی دکترا، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، پردیس علوم پایه، دانشگاه بیرجند، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، پردیس علوم پایه، دانشگاه بیرجند، ایران
(۳) استاد، گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه ویسکانسین-پلتویل، آمریکا
(۴) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، پردیس علوم پایه، دانشگاه بیرجند، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۲/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۶/۱۷

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

چکیده: در این مقاله پایداری شبکه عصبی-تاخیری بم متشکل از دو لایه بررسی می‌شود. برای این کار بعد از خطی‌سازی شبکه عصبی بم به بررسی معادله مشخصه پرداخته و با توجه به حقیقی یا مختلط بودن ریشه‌های ماتریس اتصالات شرایطی به دست می‌آوریم تا سیستم اصلی دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مخالف صفر داشته باشد. با توجه به قضیه هارتمن-گروپمن ساختار کیفی سیستم با ساختار خطی آن یکسان است. بنابراین با توجه به حالات مقادیر ویژه ماتریس اتصال در چندجمله‌ای مشخصه، کرانی برای پارامترهای شبکه به دست می‌آوریم. که با توجه به شرایط به دست آمده، پایداری را تعریف می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد، زمانی که مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشد، شبکه عصبی به پایداری مجانبی می‌رسد. همچنین به اثرگذاری تاخیر در ایجاد نوسان در شبکه عصبی بم نیز پرداخته شده و پارامتری برای این منظور در نظر گرفته شده است. روش پیشنهادی در این مقاله با روش‌های مشابه در مقالات دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردار است و در عین حال توانایی بالایی از جمله ناوابستگی به تعداد ابعاد (تعداد نرون‌ها) مسئله دارد. همچنین در این مطالعه شرایط جدیدی براساس ماتریس اتصالات برای پایداری به دست آمد. در انتها با استفاده از نرم افزار سیمولینک (وابسته به متلب) شبیه‌سازی یک مدل شش نرونی (که در هر لایه سه نرون می‌باشد) ارائه شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی کارایی روش مورد نظر را تایید کرد.

واژه‌های کلیدی: پایداری، تابع مشخصه، خطی‌سازی، شبکه عصبی بم.

رده‌بندی ریاضی: 93D20; 92B20

^{*}نویسنده مسئول مقاله

رایانامه:

mohammadzadeh.zahra@birjand.ac.ir, amvaziri@birjand.ac.ir, azemi@psu.edu, orabieimotlagh@birjand.ac.ir

۱ مقدمه

شبکه عصبی بم که اولین بار کاسکو آن را معرفی کرده است [۱]، از اتصال دو زیر شبکه عصبی منحصر بفرد با خاصیت دینامیکی خاص تشکیل شده است. نکته حائز اهمیت در این نوع شبکه، قابلیت جستجوی الگوی مطلوب در جهت پیش رو و پس رو است. با توجه به کاربردهای گسترده این شبکه‌ها در زمینه‌های گوناگون از قبیل شناسایی الگو، بهینه‌سازی، پردازش سیگنال، کنترل، هوش مصنوعی و غیره مطالعات عددی مختلفی بر روی آن‌ها انجام شده است [۲-۴]. بنابراین، تحلیل رفتارهای دینامیکی گام مهم و ضروری برای طراحی عملی شبکه‌های عصبی است. در مطالعات علاوه بر بررسی پایداری شبکه عصبی بم، بسیاری از رفتارهای دینامیکی آن مانند رفتار نوسانی متناوب، انشعاب، آشوب و نظایر آن مورد مطالعه قرار گرفته است [۵-۸]. برای به دست آوردن شرایط پایداری سیستم‌های غیر خطی تاخیری، روش‌های مختلفی از قبیل ساخت توابع لیاپانف، استفاده از تئوری نقطه ثابت، توسعه تخمین برای ماتریس یا نرم‌های عملگر، استفاده از برخی خصوصیات ماتریس ویژه و تبدیل یک سیستم غیر خطی مشخص به یک معادله با یک عملگر تصادفی ولترا، مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۹]. جهت بررسی شرایط پایداری شبکه‌های عصبی بم تاخیری مرتبه یک، تابع لیاپانف به همراه نامساوی ماتریسی و نامعادلات به کار برده شده‌اند [۱۰، ۱۱]. شرایط پایداری با در نظر گرفتن نوع تاخیر (تاخیر ثابت یا متغیر زمانی کران دار) و یا بر روی توابع اتصال (پیوسته-ناپیوسته، کران دار-بی کران) به دست می‌آیند. برخی متخصصین شرایط پایداری را با تجزیه و تحلیل معادله مشخصه در ابعاد کوچک به دست آورده‌اند در بعضی از مطالعات علاوه بر پایداری به بررسی جواب‌های دوره‌ای، و یا وجود انشعاب در سیستم نیز پرداخته شده است [۵-۸، ۱۲، ۱۴-۲۲، ۲۴، ۲۵].

از آنجا که انتقال اطلاعات از یک نرون به نرون دیگر آئی نیست، مارکوس و همکارش یک مدل شبکه عصبی بم تاخیری را پیشنهاد کردند [۲۶]. تاخیر یکی از عواملی است که می‌تواند بر پایداری تاثیرگذار باشد. تاخیرات زمانی در شبکه‌های عصبی منجر به رفتارهای دینامیکی پیچیده مانند نوسانات متناوب، انشعاب و یا اغتشاش و ناپایداری می‌گردند [۳، ۲۸]. تاخیر زمانی به صورت اسکالر و یا به صورت تابع یکنواخت زمانی است که مشتق آن از یک کوچک‌تر است که این شرط گذاشتن باعث می‌شود کرانی برای تاخیر زمانی به دست آید و تاخیر به صورت یک اسکالر می‌شود [۲۹، ۳۰]. با این حال، در اغلب تحقیقات به صورت محافظه کارانه به بررسی پایداری محلی و سراسری پرداخت شده است. با توجه به مطالب فوق اکثر مطالعات صورت گرفته با استفاده از تابع لیاپانف و با کمک بعضی از نامعادلات (از جمله نامساوی ماتریسی کوشی، مکمل شور و دیگر نامساوی‌ها) به بررسی پایداری پرداختند، با توجه به مدل شبکه عصبی شرایطی به دست آوردند که سبب پایداری شبکه می‌شود [۳۱-۳۵].

یکی از مسائل مورد توجه در بررسی پدیده‌ها، تغییر رفتار کیفی یک مدل به‌زای تغییرات در پارامترهای مختلف آن است. با توجه به تاثیر تاخیر در تغییر رفتار کیفی مدل‌ها، به بررسی پایداری شبکه عصبی بم تاخیری می‌پردازیم. هدف اصلی ما در این مقاله به دست آوردن محدوده تاخیر مجاز و حداقل پارامتر کنترل داخلی که در آن سیستم پایدار می‌شود، است. با توجه به قضیه هارتمن-گروپمن، شرایطی به دست می‌آوریم تا مقادیر ویژه سیستم دارای قسمت حقیقی منفی داشته باشد [۳۶]. با توجه به شرایط و نتایج به دست آمده زمانی که تاخیر از محدوده‌ی مجازش خارج شود، ثابت کنترل داخلی را حداقل چه مقدار باید افزایش داد که سیستم پایدار شود؟ در این تحقیق توانستیم رابطه بین پارامترهای کنترل داخلی و تاخیر براساس مقادیر ویژه ماتریس تابع اتصال را به دست آورده تا سیستم پایدار باشد. این نشان می‌دهد که ماتریس اتصالات در پایداری شبکه عصبی بم چقدر مهم است. از این روش می‌توان در هم‌زمان سازی شبکه عصبی بم استفاده کرد. در هم‌زمان سازی هدف طراحی کنترل‌کننده‌ای مانند $U(t)$ است که براساس تابع لیاپانف به دست می‌آید که رفتار سیستم، شبیه رفتار سیستم مورد نظر شود [۳۷-۳۹]. با استفاده از این روش می‌توان تاثیر اتصالات تاخیری و بدون تاخیر در کنترل‌کننده را به دست آورد که یکی از موارد استفاده آن در پزشکی است [۴۱].

نکات برجسته این مقاله به صورت زیر می‌باشد:

- براساس پارامترها مسئله می‌توان شبکه عصبی بم را طوری تنظیم کرد که شبکه به سمت پایداری یا ناپایداری هدایت شود (برحسب نیاز).
- سادگی محاسبات، شرط نداشتن تعداد نرون‌ها در هر لایه

به‌طور کلی، شبکه‌های عصبی بم تاخیری را می‌توان به شرح زیر توصیف کرد:

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = -ku_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}g_{ij}(v_j(t-\tau)) + I_i(t) & i = 1, \dots, n \\ \dot{v}_j(t) = -kv_j(t) + \sum_{i=1}^m d_{ij}f_{ij}(u_i(t-\sigma)) + J_j(t) & j = 1, \dots, m \end{cases}, k > 0.$$

که در آن f_{ij} و g_{ij} توابع اتصال غیرخطی و نامشخص پیوسته و مشتق پذیر، d_{ij} و c_{ij} وزن‌های توابع اتصال بین لایه X و لایه Y می‌باشد. k پایداری فرایندهای داخلی نرون‌ها در لایه X و Y همچنین وضعیت نرون‌ها لایه X با $x_i(t)$ و وضعیت نرون‌های لایه Y با $y_i(t)$ نشان داده می‌شوند. در این مطالعه، به پایداری شبکه عصبی برحسب پارامتر تاخیر و پارامتر کنترل داخلی k شبکه عصبی با استفاده از چندجمله‌ای مشخصه می‌پردازیم. با بحث بر روی مقادیر ویژه و گذاشتن شرایطی بر روی پارامترهای تاخیر و کنترل داخلی k به بررسی پایداری می‌پردازیم. با توجه به شرایط به دست آمده، حداکثر مقدار پارامتر تاخیر و حداقل مقدار برای پارامتر کنترل داخلی k به دست می‌آید. در بخش ۲ به معرفی مدل، قضایا و فرضیات مورد نیاز می‌پردازیم. در بخش ۳ شرایط پایداری (مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی) را بررسی می‌کنیم. بخش ۴ به شبیه‌سازی اختصاص داده شده است و در انتها به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

یادآوری: معادله مشخصه، فرض کنیم ماتریس $A \in R_{n \times n}$ ماتریسی با درایه های حقیقی و I_n ماتریس همانی $n \times n$ باشد. در این صورت اگر $P(\lambda)$ معادله مشخصه ماتریس A باشد که به صورت $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ تعریف می شود، آنگاه $P(A) = 0$. دقت کنیم که در محاسبه چندجمله ای مشخصه ماتریس A در انتها به عبارتی به صورت $P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda^1 + c_0$ می رسیم که این چندجمله ای را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_i) \dots (\lambda - \lambda_n). \tag{1.1}$$

۲ مدل و قضایا و فرضیات

در این بخش، به بررسی مدل و قضایای مورد نیاز می پردازیم. بدین منظور سیستم زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = -ku_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}g_{ij}(v_j(t - \tau)) + I_i(t) & i = 1, \dots, n \\ \dot{v}_i(t) = -kv_i(t) + \sum_{j=1}^m d_{ij}f_{ij}(u_j(t - \sigma)) + J_j(t) & j = 1, \dots, m \end{cases}, k > 0. \tag{1.2}$$

نقطه تعادل سیستم (۱.۲) را $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*), v^* = (v_1^*, \dots, v_m^*)$ در نظر می گیریم به منظور ساده سازی سیستم (۱.۲) نقطه تعادل را مبدا در نظر می گیریم. با تبدیل $x_i(t) = u_i(t) - u_i^*, y_i(t) = v_i(t) - v_i^*$ تبدیل $f(x_i(t)) = f(u_i(t) - u_i^*), g(y_i(t)) = g(v_i(t) - v_i^*)$ می شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -kx_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}g_{ij}(y_j(t - \tau)) & i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i(t) = -ky_i(t) + \sum_{j=1}^m d_{ij}f_{ij}(x_j(t - \sigma)) & j = 1, \dots, m \end{cases}, k > 0. \tag{2.2}$$

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $x = 0$ یکی از نقاط تعادل سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ باشد که $f : D \rightarrow R^n$ تابعی پیوسته - مشتق پذیر و D نیز همسایگی حول مبدا است؛ در این صورت اگر داشته باشیم $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) |_{x=0}$ ، آنگاه:

- ۱- مبدا پایدار مجانبی است اگر به ازای جميع مقادیر ویژه ماتریس A داشته باشیم $Re(\lambda_i) < 0$
- ۲- مبدا ناپایدار است اگر برای یک یا چند مقدار ویژه A داشته باشیم $Re(\lambda_i) > 0$

قضیه ۱.۲ به قضیه هارتمن - گروپمن اشاره دارد. این قضیه بیان می کند که در نزدیکی نقطه تعادل هذلولوی (نقطه تعادل قسمت حقیقی صفر نداشته باشد) x_0 ، دستگاه غیرخطی:

$$\dot{x} = f(x).$$

دارای ساختار کیفی یکسان با دستگاه خطی:

$$\dot{x} = Ax.$$

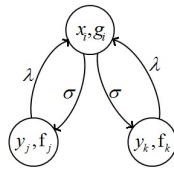
است که در آن $A = Df(x_0)$ [۳۶].

به منظور بررسی پایداری در یک معادله دیفرانسیل (معمولی و تاخیری) نیاز به تعیین ریشه های معادله مشخصه آن است. به کمک خطی سازی، بنابر قضیه ۱.۲، می توان معادله مشخصه ی معادلات دیفرانسیل تاخیری را به دست آورد. از خطی سازی سیستم (۲.۲) و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم $g_{ij}(0) = 0$ و $f_{ij}(0) = 0$. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -kx_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}g'_{ij}(0)y_j(t - \tau) & i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i(t) = -ky_i(t) + \sum_{j=1}^m d_{ij}f'_{ij}(0)x_j(t - \sigma) & j = 1, \dots, m \end{cases}, k > 0. \tag{3.2}$$

فرم ماتریسی سیستم (۳.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_m(t) \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11}g'_{11}(0) & \dots & c_{1n}g'_{1n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n1}g'_{n1}(0) & \dots & c_{nm}g'_{nm}(0) \\ d_{11}f'_{11}(0) & \dots & d_{1m}f'_{1m}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}f'_{n1}(0) & \dots & d_{nm}f'_{nm}(0) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau) \\ \vdots \\ x_n(t - \tau) \\ y_1(t - \sigma) \\ \vdots \\ y_m(t - \sigma) \end{bmatrix}.$$



شکل ۱: نمایش زمان رفت و برگشت بین لایه ها

با فرض $z(t) = [x_1(t) \cdots x_i(t) \cdots x_n(t) y_1(t) \cdots y_i(t) \cdots y_n(t)]^t$ همچنین برای سادگی کار سیستم را به یک پارامتر تاخیر زمانی وابسته می‌کنیم (زمان رفت و برگشت را یکسان در نظر می‌گیریم $\sigma = \tau = \delta > 0$). با استفاده از معادله مشخصه به بررسی شرایط پایداری می‌پردازیم. معادله مشخصه آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + k & \cdots & \circ & c_{11}g_{11}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \cdots & c_{1n}g_{1n}(\circ)e^{-\lambda\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \lambda + k & c_{n1}g_{n1}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \cdots & c_{nn}g_{nn}(\circ)e^{-\lambda\delta} \\ d_{11}f_{11}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \cdots & d_{1n}f_{1n}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \lambda + k & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}f_{n1}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \cdots & d_{nn}f_{nn}(\circ)e^{-\lambda\delta} & \circ & \cdots & \lambda + k \end{pmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

معادله (۴.۲) برابر است با:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + k & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \lambda + k & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ & \lambda + k & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \lambda + k \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ & c_{11}g_{11}(\circ) & \cdots & c_{1n}g_{1n}(\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{11}f_{11}(\circ) & \cdots & d_{1n}f_{1n}(\circ) & c_{n1}g_{n1}(\circ) & \cdots & c_{nn}g_{nn}(\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}f_{n1}(\circ) & \cdots & d_{nn}f_{nn}(\circ) & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda\delta} & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & e^{-\lambda\delta} & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ & e^{-\lambda\delta} & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ & \circ & \cdots & e^{-\lambda\delta} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.1)$$

حال در رابطه (۵.۲)، با توجه به معادله مشخصه اگر $\lambda + k = \hat{\lambda}$ و مقادیر ویژه Q برابر با $e^{-\lambda\delta}\beta_i$ داریم:

$$\det(\hat{\lambda}I - Q) = (\hat{\lambda} - e^{-\lambda\delta}\beta_1) \cdots (\hat{\lambda} - e^{-\lambda\delta}\beta_i) \cdots (\hat{\lambda} - e^{-\lambda\delta}\beta_{n+m}) = 0, \quad (6.1)$$

$$= (\lambda + k - e^{-\lambda\delta}\beta_1) \cdots (\lambda + k - e^{-\lambda\delta}\beta_i) \cdots (\lambda + k - e^{-\lambda\delta}\beta_{n+m}) = 0.$$

تذکر: $\lambda = \mu + \omega j$ در نظر می‌گیریم، به طوری که $j = \sqrt{-1}$ است. λ تمام حالات (حقیقی یا مختلط) را شامل می‌شود.

۳ شرایط پایداری

در حالت کلی ریشه‌های ماتریس Q (ماتریس اتصال) به صورت $\beta_i = b_i + a_i j$ در نظر می‌گیریم. تمام حالت‌های ممکن برای b_i و a_i عبارتند از:

حالت اول: $a_i = 0, b_i \neq 0$ (ریشه حقیقی مخالف صفر)،

حالت دوم: $a_i = 0, b_i = 0$ (ریشه صفر)،

حالت سوم: $a_i \neq 0, b_i = 0$ (ریشه موهومی محض)،

حالت چهارم: $a_i \neq 0, b_i \neq 0$ (ریشه مختلط).

با بررسی حالت‌های فوق و با جای‌گذاری هر حالت در رابطه (۶.۲) شرایطی به‌دست می‌آوریم که قسمت حقیقی λ منفی باشد (با توجه به قضیه ۱.۲، اگر قسمت حقیقی ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه منفی شود سیستم پایدار مجانبی می‌شود) معادله (۶.۲)، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - Q) &= (\lambda + k - e^{-\lambda\delta} \beta_1) \dots (\lambda + k - e^{-\lambda\delta} \beta_i) \dots (\lambda + k - e^{-\lambda\delta} \beta_{n+m}) = 0, \\ &= (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} \beta_1) \dots (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} \beta_{n+m}) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

حالت اول $(\beta_i = b_i)$:
به بررسی حالت اول، که ماتریس Q دارای ریشه حقیقی $(\beta_i = b_i)$ باشد، می‌پردازیم. با قرار دادن $\beta_i = b_i$ در معادله (۱.۳) داریم:

$$\det(\lambda I - Q) = (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} b_1) \dots (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} b_{n+m}) = 0. \quad (2.3)$$

با توجه $\beta_i = b_i$ ، شرایطی برای پارامترهای k و δ به‌دست می‌آوریم تا سیستم پایدار شود.

قضیه ۱.۳. اگر

$$k > \max\{|b_i|, \sqrt{(\omega)^2 - b_i^2}\} \quad (\text{الف})$$

$$\delta < \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{4b_i}}\right\} \quad (\text{ب})$$

با در نظر گرفتن حالت اول $(\beta_i = b_i)$ آنگاه سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.

اثبات. الف) با صفر قرار دادن یکی از پیرانتزهای معادله (۲.۳) داریم:

$$\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} = \mu + \omega j + k - e^{-(\mu)\delta} - b_i(\cos(-\omega\delta) + \sin(-\omega\delta)) = 0.$$

با جدا کردن قسمت‌های موهومی و حقیقی داریم:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mu, \omega) &= \mu + k - e^{-(\mu)\delta} b_i(\cos(\omega\delta)) = 0, \\ \text{Im}(\mu, \omega) &= \omega + e^{-(\mu)\delta} b_i(\sin(\omega\delta)) = 0 \rightarrow |\omega| \leq |b|. \end{cases} \quad (3.3)$$

با توجه به رابطه (۳.۳)، P_1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. رفتار P_1 با توجه $\mu < 0$ و $\mu \geq 0$ بررسی می‌کنیم.

$$\text{Re}(\mu, \omega) = \mu + k - e^{-(\mu)\delta} b_i(\cos(\omega\delta)) \geq \mu + k - e^{-(\mu)\delta} |b_i| = P_1(\mu). \quad (4.3)$$

با توجه به فرض قضیه داریم:

$$P_1(0) = 0 + k - e^{-(0)\delta} |b_i| = k - |b_i| > 0.$$

به‌ازای $\mu \geq 0$ داریم:

$$\dot{P}_1(\mu) = 1 + k + \delta e^{-(\mu)\delta} |b_i| > 0 \rightarrow P_1(\mu) \geq 0.$$

رفتار P_1 همواره مثبت است، این با توجه به رابطه‌های (۳.۳) و (۴.۳) در تناقض است. بنابراین به‌ازای $\mu < 0$ رابطه‌های (۳.۳) و (۴.۳) برقرارند. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < 0 \rightarrow \text{Re}(\mu, \omega) < 0.$$

سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.

ب) با توجه به رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{cases} (\mu + k)^2 &= e^{-2(\mu)\delta} b_i^2 (\cos(\omega\delta))^2, \\ (\omega)^2 &= e^{-2(\mu)\delta} b_i^2 (\sin(\omega\delta))^2. \end{cases} \quad (5.3)$$

از حاصل تفریق عبارت‌های (۵.۳) داریم:

$$(\mu + k)^2 - (\omega)^2 = e^{-2(\mu)\delta} b_i^2 [(\cos(\omega\delta))^2 - (\sin(\omega\delta))^2]. \quad (۶.۳)$$

رابطه زیر را داریم:

$$\cos(2\omega\delta) = \cos(\omega\delta)^2 - \sin(\omega\delta)^2. \quad (۷.۳)$$

با توجه به رابطه (۶.۳) و (۷.۳)، $F_1(\mu)$ تعریف می‌کنیم:

$$\circ = (\mu + k)^2 - (\omega)^2 - e^{-2(\mu)\delta} b_i^2 \cos(\underbrace{2\omega\delta}_{\circ \leq \omega\delta \leq \frac{\pi}{4}}) \geq (\mu + k)^2 - (\omega)^2 - e^{-2(\mu)\delta} b_i^2 = F_1(\mu). \quad (۸.۳)$$

رفتار $F_1(\mu)$ به‌ازای $\mu < \circ$ و $\mu \geq \circ$ بررسی می‌کنیم. ابتدا برای $\mu \geq \circ$ بررسی می‌کنیم.

$$F_1(\circ) = (\circ + k)^2 - (\omega)^2 - e^{-2(\circ)\delta} b_i^2 = (k)^2 - (\omega)^2 - b_i^2 > \circ. \quad (۹.۳)$$

طبق فرض، رابطه (۹.۳) برقرار است.

$$\dot{F}_1(\mu) = 2(\mu + k) + 2\delta e^{-2(\mu)\delta} \beta_i^2 > \circ \rightarrow F_1(\mu) > \circ.$$

رفتار $F_1(\mu)$ همواره مثبت است، با توجه به رابطه (۸.۳) در تناقض است. بنابراین به‌ازای $\mu < \circ$ رابطه (۸.۳) برقرار است. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < \circ \rightarrow Re(\mu, \omega) < \circ.$$

سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.

□

حالت دوم ($\beta_i = b_i$):

به بررسی حالت دوم، ماتریس Q دارای ریشه صفر $\beta_i = \circ$ باشد، می‌پردازیم. با قرار دادن $\beta_i = \circ$ در معادله (۱.۳) داریم:

$$\det(\hat{\lambda}I - Q) = (\mu + \omega j + k) \dots (\mu + \omega j + k) = \circ. \quad (۱۰.۳)$$

با صفر قرار دادن یکی از پرانتزهای معادله (۱۰.۳) داریم:

$$\mu + i\omega + k = \circ. \quad (۱۱.۳)$$

با جدا کردن قسمت‌های موهومی و حقیقی معادله (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{cases} \mu + k = \circ, \\ \omega = \circ. \end{cases} \quad (۱۲.۳)$$

با توجه $\circ > k$ ، به‌ازای $\mu < \circ$ ، رابطه (۱۲.۳) برقرار است. بنابراین داریم:

$$\forall \mu < \circ \rightarrow Re(\mu, \omega) < \circ.$$

سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.

حالت سوم ($\beta_i = a_{ij}$):

به بررسی حالت سوم، ماتریس Q دارای ریشه موهومی محض $\beta_i = a_{ij}$ باشد، می‌پردازیم. با قرار دادن $\beta_i = a_{ij}$ در معادله (۱.۳) داریم:

$$\det(\hat{\lambda}I - Q) = (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} a_{1j}) \dots (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} a_{n+mj}) = \circ. \quad (۱۳.۳)$$

با توجه $\beta_i = a_{ij}$ ، شرایطی برای پارامترهای k و δ به‌دست می‌آوریم تا سیستم پایدار شود.

قضیه ۲.۳. اگر

$$k = \max\{|a_i|, \sqrt{\omega^2 - a_i^2}\} \quad (\text{الف})$$

(ب) $\delta < \min\{\frac{\pi}{4|a_i|}\}$ ، با در نظر گرفتن حالت سوم ($\beta_i = a_i$) آنگاه سیستم (۳.۲) به طور مجانبی پایدار می شود.

اثبات. قسمت الف:

با صفر قرار دادن یکی از پراتنژهای معادله (۱۳.۳) داریم:

$$\mu + \omega j + ke^{-(\mu+i\omega)\delta} a_i j = \mu + i\omega + k - e^{-\mu\delta} [\cos(\delta\omega) - \sin(\delta\omega)j] a_i j = 0.$$

با جدا کردن قسمت های موهومی و حقیقی داریم:

$$\begin{cases} \text{Re}(\mu, \omega) = \mu + k - e^{-\mu\delta} [\sin(\delta\omega)] a_i = 0, \\ \text{Im}(\mu, \omega) = \omega - e^{-\mu\delta} [\cos(\delta\omega)] a_i = 0 \rightarrow |\omega| \leq |a_i|. \end{cases} \quad (14.3)$$

با توجه به رابطه (۱۴.۳)، P_{\checkmark} به صورت زیر تعریف می کنیم. رفتار P_{\checkmark} با توجه $\mu < 0$ و $\mu \geq 0$ بررسی می کنیم.

$$\text{Re}(\mu, \omega) = \mu + k - e^{-\mu\delta} [\sin(\delta\omega) a_i] \geq \mu + k - e^{-\mu\delta} |a_i| = P_{\checkmark}(\mu). \quad (15.3)$$

با توجه به فرض قضیه داریم:

$$P_{\checkmark}(0) = 0 + k - e^{-0\delta} |a_i| = k - |a_i| > 0. \quad (16.3)$$

به ازای $\mu \geq 0$ داریم:

$$\dot{P}_{\checkmark}(\mu) = 1 + k + \delta e^{-\mu\delta} |a_i| > 0, P_{\checkmark}(\mu) > 0, \forall \mu \geq 0 \rightarrow \text{Re} > 0. \quad (17.3)$$

رفتار P_{\checkmark} همواره مثبت است، این با توجه به رابطه های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در تناقض است. بنابراین به ازای $\mu < 0$ رابطه های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) برقرارند. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < 0 \rightarrow \text{Re}(\mu, \omega) < 0.$$

سیستم (۳.۲) به طور مجانبی پایدار می شود.

قسمت ب)

با توجه به رابطه (۱۴.۳) داریم:

$$\begin{cases} (\mu + k)^2 = e^{-2\mu\delta} [\sin(\delta\omega)]^2 a_i^2, \\ -(\omega)^2 = -e^{-2\mu\delta} [\cos(\delta\omega)]^2 a_i^2. \end{cases} \quad (18.3)$$

از حاصل تفریق عبارت های (۱۸.۳) داریم:

$$-(\omega)^2 + (\mu + k)^2 = e^{-2\mu\delta}. \quad (19.3)$$

رابطه زیر را داریم:

$$\cos(2\omega\delta) = \cos(\omega\delta)^2 - (\sin(\omega\delta))^2. \quad (20.3)$$

با توجه به رابطه های (۲۰.۳) و (۱۹.۳)، $F_{\checkmark}(\mu)$ تعریف می کنیم:

$$0 = -(\omega)^2 + (\mu + k)^2 + e^{-2\mu\delta} \cos(2\delta\omega) a_i^2 \leq -(\omega)^2 + (\mu + k)^2 + e^{-2\mu\delta} |a_i|^2 = F_{\checkmark}(\mu). \quad (21.3)$$

رفتار $F_{\checkmark}(\mu)$ به ازای $\mu < 0$ و $\mu \geq 0$ بررسی می کنیم. ابتدا برای $\mu \geq 0$ بررسی می کنیم.

$$F_{\checkmark}(0) = -(\omega)^2 + (0 + k)^2 + e^{-2 \times 0 \times \delta} a_i^2 = -(\omega)^2 + (k)^2 + a_i^2 > 0. \quad (22.3)$$

طبق فرض، رابطه (۲۲.۳) برقرار است.

$$\dot{F}_\Psi(\mu) = \Psi(\mu + k) - \Psi\delta e^{-\mu\delta} a_i^\Psi \geq \Psi(\mu + k) - \Psi\delta a_i^\Psi > 0.$$

رفتار $F_\Psi(\mu)$ همواره مثبت است، این با توجه به رابطه (۲۱.۳) در تناقض است. بنابراین به ازای $\mu < 0$ رابطه (۲۱.۳) برقرار است. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < 0 \rightarrow Re(\mu, \omega) < 0.$$

□

سیستم (۳.۲) به طور مجانبی پایدار می شود.

حالت چهارم $(\beta_i = b_i + a_i j)$:

به بررسی حالت چهارم، ماتریس Q دارای ریشه مختلط $\beta_i = b_i + a_i j$ باشد، می پردازیم. با قرار دادن $\beta_i = b_i + a_i j$ در معادله (۱.۳) داریم:

$$\det(\hat{\lambda}I - Q) = (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} b_1 + a_1 j) \dots (\mu + \omega j + k - e^{-(\mu+\omega j)\delta} b_{n+m} + a_{n+m} j) = 0. \quad (۲۳.۳)$$

با توجه $\beta_i = b_i + a_i j$ ، شرایطی برای پارامترهای k و δ به دست می آوریم تا سیستم پایدار شود.

قضیه ۳.۳. اگر

$$k = \max\{\sqrt{2}(|a| + |b|), \sqrt{-\omega^2 + 2(|b| + |a|)^2}\} \quad (\text{الف})$$

(ب) $\delta < \frac{\pi}{2(|a|+|b|)}$ ، با در نظر گرفتن حالت چهارم آنگاه سیستم (۳.۲) به طور مجانبی پایدار می شود.

اثبات. قسمت الف:

با صفر قرار دادن یکی از پیرانتزهای معادله (۲۳.۳) داریم:

$$\mu + i\omega + k - e^{-\mu\delta} [\cos(\omega\delta) - i \sin(\omega\delta)](b + ai) = 0.$$

با جدا کردن قسمت‌های موهومی و حقیقی داریم:

$$\begin{cases} Re(\mu, \omega) &= \mu + k - e^{-\mu\delta} [b \cos(\omega\delta) + a \sin(\omega\delta)] = 0, \\ Im(\mu, \omega) &= \omega - e^{-\mu\delta} [a \cos(\omega\delta) - b \sin(\omega\delta)] = 0 \rightarrow \omega < |a| + |b|. \end{cases} \quad (۲۴.۳)$$

با توجه به رابطه (۲۴.۳)، P_Ψ به صورت زیر تعریف می کنیم. رفتار P_Ψ با توجه $\mu < 0$ و $\mu \geq 0$ بررسی می کنیم.

$$Re(\mu, \omega) = \mu + k - e^{-\mu\delta} [b \cos(\omega\delta) + a \sin(\omega\delta)] \geq \mu + k - e^{-\mu\delta} [|a| + |b|] = P_\Psi(\mu). \quad (۲۵.۳)$$

با توجه به فرض قضیه داریم:

$$P_\Psi(0) = 0 + k - e^{-0 \times \delta} [|b| + |a|] = k - [|b| + |a|] > 0. \quad (۲۶.۳)$$

به ازای $\mu \geq 0$ داریم:

$$\dot{P}_\Psi(\mu) = 1 + \delta e^{-\mu\delta} [|b| + |a|] > 0, P_\Psi(\mu) > 0, \forall \mu \geq 0 \rightarrow P_\Psi(\mu) \leq 0, \forall \mu < 0. \quad (۲۷.۳)$$

رفتار P_Ψ همواره مثبت است، این با توجه به رابطه‌های (۲۴.۳) و (۲۵.۳) در تناقض است. بنابراین به ازای $\mu < 0$ رابطه‌های (۲۴.۳) و (۲۵.۳) برقرارند. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < 0 \rightarrow Re(\mu, \omega) < 0.$$

سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.
قسمت ب)

با توجه به رابطه (۲۴.۳) داریم:

$$\begin{cases} (\mu + k)^2 &= e^{-2\mu\delta} [b \cos(\omega\delta) + a \sin(\omega\delta)]^2, \\ \omega^2 &= e^{-2\mu\delta} [a \cos(\omega\delta) - b \sin(\omega\delta)]^2. \end{cases} \quad (28.3)$$

از حاصل تفریق عبارت‌های (۲۸.۳) داریم:

$$\circ = (\mu + k)^2 + \omega^2 - e^{-2\mu\delta} ([b \cos(\omega\delta) + a \sin(\omega\delta)]^2 + [a \cos(\omega\delta) - b \sin(\omega\delta)]^2). \quad (29.3)$$

رابطه زیر را داریم:

$$\cos(2\omega\delta) = \cos(\omega\delta)^2 - \sin(\omega\delta)^2. \quad (30.3)$$

با توجه به رابطه‌های (۲۹.۳) و (۳۰.۳)، $F_{\Psi}(\mu)$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \circ &= (\mu + k)^2 + \omega^2 - e^{-2\mu\delta} ([b \cos(\omega\delta) + a \sin(\omega\delta)]^2 + [a \cos(\omega\delta) - b \sin(\omega\delta)]^2) \\ &\geq (\mu + k)^2 + \omega^2 - 2e^{-2\mu\delta} (|b| + |a|)^2 = F_{\Psi}(\mu). \end{aligned} \quad (31.3)$$

رفتار $F_{\Psi}(\mu)$ به‌ازای $\mu < \circ$ و $\mu \geq \circ$ بررسی می‌کنیم. ابتدا برای $\mu \geq \circ$ بررسی می‌کنیم.

$$F_{\Psi}(\circ) = (\circ + k)^2 + \omega^2 - 2e^{-2 \times \circ \times \delta} (|b| + |a|)^2 = k^2 + \omega^2 - 2(|b| + |a|)^2 > \circ. \quad (32.3)$$

طبق فرض، رابطه (۳۲.۳) برقرار است.

$$\dot{F}_{\Psi}(\mu) = 2(\mu + k) + 4\delta e^{-2\mu\delta} (|b| + |a|)^2 > \circ.$$

رفتار $F_{\Psi}(\mu)$ همواره مثبت است، با توجه به رابطه (۳۱.۳) در تناقض است. بنابراین به‌ازای $\mu < \circ$ رابطه (۳۱.۳) برقرار است. در نتیجه داریم:

$$\forall \mu < \circ \rightarrow Re(\mu, \omega) < \circ.$$

□

سیستم (۳.۲) به‌طور مجانبی پایدار می‌شود.

با توجه به قضیه‌های ۱.۳، ۲.۳ و ۳.۳ حداکثر پارامتر k و حداقل پارامتر تاخیر که سیستم پایدار شود را بدست آوردیم. حداقل مقدار پارامتر k برابر است با:

$$k = \max\{\sqrt{2}(|a_i| + |b_i|), |a_i|, |b_i|\} \quad (33.3)$$

همچنین حداکثر پارامتر زمان تاخیر برابر است با:

$$\delta = \min\left\{\frac{\pi}{4|b_i|}, \frac{\pi}{4|a_i|}, \frac{\pi}{2(|a_i| + |b_i|)}\right\} \quad (34.3)$$

۴ شبیه‌سازی

در بخش ۳، آنالیز پایداری بر روی شبکه عصبی بم تاخیری را ارائه کردیم. در این بخش، برای نشان دادن نتایج نظری خود، شبکه عصبی بم تاخیری شش نرونی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱.۴. یک مدل شبکه عصبی بم تاخیری، در هر لایه سه نرون در نظر گرفته‌ایم. شبکه عصبی بم تاخیری برای شبیه‌سازی به صورت زیر در نظر می‌گیریم. حداقل مقدار k و پارامتر تاخیر را به دست می‌آوریم تا سیستم در حالت پایدار باشد.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k * x_1 + 0.3 \tanh(y_1(t - \sigma)) + 0.4 \tanh(y_2(t - \sigma)) + 0.5 \tanh(y_3(t - \sigma)) \\ \dot{x}_2 &= -k * x_2 + 0.5 \tanh(y_1(t - \sigma)) + 0.4 \tanh(y_2(t - \sigma)) + 0.4 \tanh(y_3(t - \sigma)) \\ \dot{x}_3 &= -k * x_3 + 0.5 \tanh(y_1(t - \sigma)) + 0.7 \tanh(y_2(t - \sigma)) + 0.6 \tanh(y_3(t - \sigma)) \\ \dot{y}_1 &= -k * y_1 + 0.6 \tanh(x_1(t - \sigma)) + 0.6 \tanh(x_2(t - \sigma)) + \tanh(x_3(t - \sigma)) \\ \dot{y}_2 &= -k * y_2 + 0.7 \tanh(x_1(t - \sigma)) + 0.5 \tanh(x_2(t - \sigma)) + 0.9 \tanh(x_3(t - \sigma)) \\ \dot{y}_3 &= -k * y_3 + 0.6 \tanh(x_1(t - \sigma)) + 0.7 \tanh(x_2(t - \sigma)) + 0.8 \tanh(x_3(t - \sigma)) \end{aligned}$$

ابتدا باید مقادیر ویژه ماتریس اتصال را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس اتصال برابر است با:

$$\{-1.7756, 1.7756, -0.8888 + 0.959i, -0.8888 - 0.959i, 0.8888 + 0.959i, 0.8888 - 0.959i\}$$

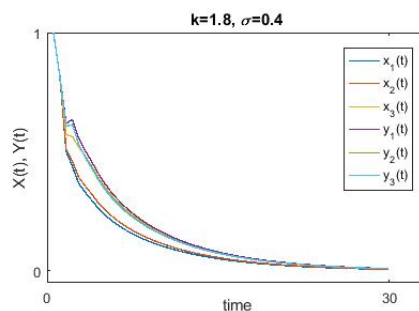
با توجه به رابطه (۳۴.۳)، حداکثر تاخیر برابر است با:

$$\delta = \min\{4.2523, 0.4423\} = 0.4423$$

همچنین با توجه به رابطه (۳۳.۳)، حداقل مقدار پارامتر k برابر است با:

$$k = \max\{0.4423, 1.7756\} = 1.7756$$

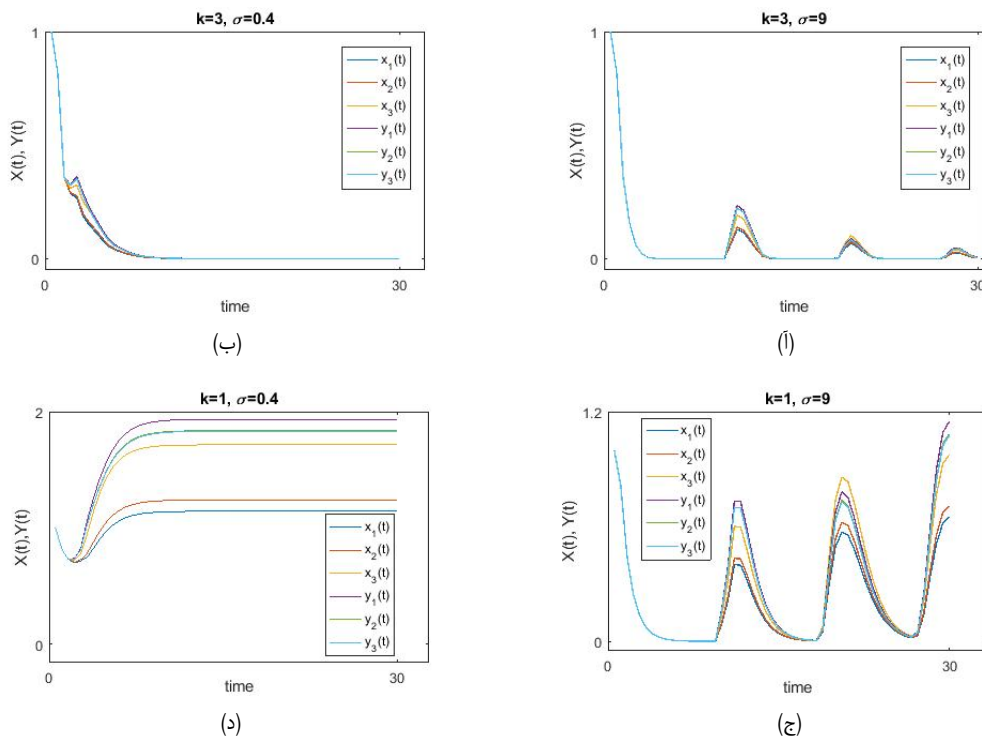
ابتدا سیستم را به ازای پارامترهای به دست آمده شبیه‌سازی می‌کنیم. همان‌طور که انتظار داشتیم سیستم پایدار است (شکل ۲).



شکل ۲: به ازای پارامترهای $k = 1/8$ و $\sigma = 0.4$

به ازای پارامتر $k = 3$ (بیش‌تر از مقدار به دست آمده در نظر بگیریم) برای پارامتر تاخیر در داخل و خارج از محدوده به دست آمده، بررسی می‌کنیم. زمانی که پارامتر k بیش‌تر از مقدار به دست آمده در نظر بگیریم، سیستم سریع‌تر پایدار می‌شود. حال اگر پارامتر تاخیر خارج از محدوده به دست آمده در نظر بگیریم، سیستم با نوسان پایدار می‌شود (ا) و اگر پارامتر تاخیر در محدوده به دست آمده باشد، سیستم بدون نوسان پایدار می‌شود (ب).

به ازای پارامتر $k = 1$ (کم‌تر از مقدار به دست آمده در نظر بگیریم) سیستم را برای پارامتر تاخیر در داخل و خارج از محدوده به دست آمده، بررسی می‌کنیم. زمانی که پارامتر k کمتر از مقدار به دست آمده در نظر بگیریم، سیستم ناپایدار می‌شود. حال اگر پارامتر تاخیر خارج از محدوده به دست آمده باشد، سیستم با نوسان ناپایدار می‌شود (ج). همچنین اگر پارامتر تاخیر در محدوده به دست آمده باشد، بدون نوسان ناپایدار می‌شود (د).



شکل ۳: وضعیت سیستم به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای k و σ

۵ نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله پایداری شبکه عصبی بم که دارای تاخیر و از دو لایه تشکیل شده است، بررسی کردیم. توانستیم با بررسی حالات مختلف مقادیر ویژه ماتریس اتصال در چندجمله‌ای مشخصه، شرایطی برای پایداری سیستم به‌دست آوریم که نتایج حاصله روش بدین شرح است. حداقل مقدار پارامتر k برابر است با:

$$k = \max\{\sqrt{2}(|a_i| + |b_i|), |a_i|, |b_i|\}$$

همچنین حداکثر پارامتر تاخیر زمانی برابر است با:

$$\delta = \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}|b_i|}, \frac{\pi}{\sqrt{2}|a_i|}, \frac{\pi}{\sqrt{2}(|a_i| + |b_i|)}\right\}$$

اگر پارامتر k را کمتر از این مقدار در نظر بگیریم سیستم به سمت ناپایداری می‌رود، بیش‌تر از این مقدار سیستم سریع‌تر به پایداری می‌رسد. همچنین اگر زمان تاخیر بیش‌تر از این مقدار در نظر بگیریم، سیستم دچار نوسان می‌شود. کم‌تر از این مقدار سیستم دچار نوسان نمی‌شود. نتایج شبیه‌سازی در حالت‌های مختلف در نظر گرفته شده است که نتایج اجرا شبیه‌سازی تاییدی بر کارآمدی این روش است. در انتها می‌توان با استفاده از این روش بر روی مقادیر ویژه موهومی و انشعاب هاف تحقیق کرد.

فهرست منابع

- [1] Kosko B, *Adaptive bidirectional associative memories*. Applied optics, **26** (1987) 4947-4960.
- [2] Guo Y, Luo Y, Wang W, Luo X. and Ge Ch, *Fixed-time synchronization of complex-valued memristive BAM neural network and applications in image encryption and decryption*. International Journal of Control, Automation and Systems, **18** (2020) 462-476.

- [3] Pan Ch, Hong Q. and Wang X, *A Novel Memristive Chaotic Neuron Circuit and Its Application in Chaotic Neural Networks for Associative Memory*. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, (2020).
- [4] Mao Y. and Cheng K, *Hopfield Neural Network Method for Problem of Telescoping Path Optimization of Single-Cylinder Pin-Type Multisection Boom*. Mathematical Problems in Engineering, (2019).
- [5] Aouiti C, *Oscillation of impulsive neutral delay generalized high-order Hopfield neural networks*. Neural Computing and Applications, **29**(2018) 477-495.
- [6] Xu C, Liao M, Li P. and Guo. Y, *Bifurcation analysis for simplified five-neuron bidirectional associative memory neural networks with four delays*. Neural Processing Letters, **50** (2019) 2219–2245.
- [7] Njitacke Z. T. and Kengne J, *Nonlinear dynamics of three-neurons-based Hopfield neural networks (HNNs): Remerging Feigenbaum trees, coexisting bifurcations and multiple attractors*. Journal of Circuits, Systems and Computers, **28** (2019) 1950121.
- [8] Sanchez G, Madrenas J. and Cosp-Vilella J, *LEGION-based image segmentation by means of spiking neural networks using normalized synaptic weights implemented on a compact scalable neuromorphic architecture*. Neurocomputing, **352** (2019) 106–120.
- [9] Berezansky L, Braverman E. and Idels L, *New global exponential stability criteria for nonlinear delay differential systems with applications to BAM neural networks*. Applied Mathematics and Computation, **243** 243 899–910.
- [10] Arslan E, Narayanan G, Ali M. S, Arik S. and Saroha S, *Controller design for finite-time and fixed-time stabilization of fractional-order memristive complex-valued BAM neural networks with uncertain parameters and time-varying delays*. Neural Networks, **130** (2020) 60-74.
- [11] Nagamani G, Shafiya M, Soundararajan G. and Prakash M, *Robust state estimation for fractional-order delayed BAM neural networks via LMI approach*. Journal of the Franklin Institute, **357** (2020) 4964-4982.
- [12] Yu T, Wang H, Cao J. and Yang Y, *On impulsive synchronization control for coupled inertial neural networks with pinning control*. Neural Processing Letters, (2020) 1-16.
- [13] Guo R, Xu S. and Lv W, *p th moment stochastic exponential anti-synchronization of delayed complex-valued neural networks*. Nonlinear Dynamics, **100** (2020) 1257-1274.
- [14] Zu J, Yu Z. and Meng Y, *Global exponential stability of high-order bidirectional associative memory (BAM) neural networks with proportional delays*. Neural Processing Letters, **51** (2020) 2531-2549.
- [15] Kumar R. and Das S, *Exponential stability of inertial BAM neural network with time varying impulses and mixed time varying delays via matrix measure approach*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **81** (2020) 105016.
- [16] Liu G. Q, Zhou S. M, Li Y. Z. and Cai T. C, *Stability conditions concerning neutral-type BAM neural networks with infinite distributed delay*. International Journal of Computer Mathematics, (2020) 1-15.
- [17] Ge J. and Xu J, *Stability and Hopf bifurcation on four-neuron neural networks with inertia and multiple delays*. Neurocomputing, **287** (2018) 34-44.
- [18] Xu C, Liao M. and Li P, *Bifurcation analysis for simplified five-neuron bidirectional associative memory neural networks with four delays*. Neural Processing Letters, **50** (2019) 2219-2245.

- [19] Li D, Zhang Z. and Zhang X, *Periodic solutions of discrete-time Quaternion-valued BAM neural networks*. Chaos, Solitons Fractals, **138** (2020) 110144.
- [20] Xu C, Aouiti C. and Liu Z, *A further study on bifurcation for fractional order BAM neural networks with multiple delays*. Neurocomputing, **417** (2020) 501-515.
- [21] Hu H. and Huang L, *Stability and Hopf bifurcation analysis on a ring of four neurons with delays*. Applied Mathematics and Computation, **213** (2009) 587-599.
- [22] Wang H, Song Q. and Duan C, *LMI criteria on exponential stability of BAM neural networks with both time-varying delays and general activation functions*. Mathematics and Computers in Simulation, **81** (2010) 837-850.
- [23] Mahmoud M. S. and Xia Y, *LMI-based exponential stability criterion for bidirectional associative memory neural networks*. Neurocomputing, **74** (2010) 284-290.
- [24] Javidmanesh E, *Global stability and bifurcation in delayed bidirectional associative memory neural networks with an arbitrary number of neurons*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **139** (2017).
- [25] Mohammadzadeh Z, Vaziri A. M, *Neural Network Synchronization with Uncertain Coupling Delay Function*. In International Conference on Management Science and Engineering Management. Springer, Cham (2019) 211-220.
- [26] Marcus C. M. and Westervelt R. M, *Stability of analog neural networks with delay*. Physical Review A, **39** (1989) 347.
- [27] Mohammadinejad H. M. and Moslehi M. H, *Stability and Hopf-bifurcating periodic solution for delayed Hopfield neural networks with n neuron*. Journal of Applied Mathematics,(2014).
- [28] Yi Z, *Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks*. International Journal of Systems Science, **27** (1996) 227-231.
- [29] Aouiti C. and Assali E. A, *Stability analysis for a class of impulsive high-order Hopfield neural networks with leakage time-varying delays*. Neural Computing and Applications, **31**(2019) 7781-7803.
- [30] Kundu A, Das P. and Roy A. B, *Stability, bifurcations and synchronization in a delayed neural network model of n -identical neurons*. Mathematics and Computers in Simulation, **121** (2016) 12-33.
- [31] Aouiti C, Li X. and Miaadi F, *Finite-time stabilization of uncertain delayed-hopfield neural networks with a time-varying leakage delay via non-chattering control*. Science China Technological Sciences, **62** (2019) 1111-1122.
- [32] Tian Y. and Wang Z, *Stability analysis for delayed neural networks based on the augmented Lyapunov-Krasovskii functional with delay-product-type and multiple integral terms*. Neurocomputing, **410** (2020) 295-303.
- [33] Guan K. and Yang J., *Global asymptotic stabilization of cellular neural networks with proportional delay via impulsive control*. Neural Processing Letters, **50** (2019) 1969-1992.
- [34] Nagamani G, Shafiya M, Soundararajan G. and Prakash M, *Robust state estimation for fractional-order delayed BAM neural networks via LMI approach*. Journal of the Franklin Institute, **357** (2020) 4964-4982.

- [35] Liu G. Q, Zhou S. M, Li Y. Z. and Cai T. C, *Stability conditions concerning neutral-type BAM neural networks with infinite distributed delay*. International Journal of Computer Mathematics, (2020) 1-15.
- [36] Wang X, *A Global Hartman-Grobman Theorem*. arXiv preprint arXiv:2002.06094, (2020).
- [37] Muhammadhaji A. and Teng Z, *Synchronization stability on the BAM neural networks with mixed time delays*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, **1** (2020).
- [38] Zhang Z, Guo R. and Liu X, *Fixed-time synchronization for complex-valued BAM neural networks with time delays*. Asian Journal of Control, **23** (2021) 298-314.
- [39] Lin F. and Zhang Z, *Global Asymptotic Synchronization of a Class of BAM Neural Networks with Time Delays via Integrating Inequality Techniques*. Journal of Systems Science and Complexity, **33** (2020) 366-382.
- [40] Liu J, Jian J. and Wang B, *Stability analysis for BAM quaternion-valued inertial neural networks with time delay via nonlinear measure approach*. Mathematics and Computers in Simulation, **174** (2020) 134-152.
- [41] Mohammadzadeh Z, Vaziri A. M, Azemi A and RabieiMotlagh O, *Asymptotic synchronization of a class of continuous and delayed systems using adaptive control*, 13th International Conference of Iranian Operations Research Society, Shahrood (6-9 September 2020).



Investigation stability of a delayed Bidirectional Associative Memory (BAM) neural network

Zahra Mohammadzadeh^{1 †}, Asadollah MahmoudzadehVaziri², Asad Azemi³, Omid Rabiei Motlagh⁴

- (1) PhD student in Mathematics, Department of Mathematical Sciences and Statistics, Birjand University, Iran.
- (2) Assistant Professor, Department of Mathematical Sciences and Statistics, Birjand University, Iran
- (3) Professor, Department of Electrical and Computer Engineering, Wisconsin-Platteville University, USA
- (4) Associate Professor, Department of Mathematical Sciences and Statistics, Birjand University, Iran.

Received: 2020/9/7

Accepted: 2021/5/6

Communicated by: M. Namdari

Abstract: In this paper, the stability of a delayed Bidirectional Associative Memory (BAM) neural network consisting of two layers has been investigated. The approach includes linearization of the BAM neural network, obtaining the characteristic equation, analyzing the nature of its roots, and obtaining the condition for the systems' stability. The results show that the neural network is asymptotically stable when the eigenvalues have a negative real part. Next, the effect of delay in creating oscillation in the system was investigated, and the relevant parameter was obtained. Compared to the other published work in this area, an advantage of the proposed approach is its ability to identify the system's stability in a much more straightforward and less complicated method. Finally, a 2-layer neuron network simulation, with three neurons in each layer, using Simulink software (affiliated with MATLAB), is presented. The simulation results confirm the efficiency of the proposed method.

Keywords: Stability, Characteristic function, Linearization, Bidirectional Associative Memory (BAM) Neural Network.



©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: mohammadzadeh.zahra@birjand.ac.ir, amvaziri@birjand.ac.ir, azemi@psu.edu, orabieimotlagh@birjand.ac.ir.