مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۲، ص ۳۱۷-۳۳۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2021.35447.1867

مقایسه تصادفی در خانواده توزیع‌های آمیخته‌مقیاس چوله-نرمال چندمتغیره براساس ترتیب هسیان و برخی از کاربردهای آن

مهدی امیری [۱] *، عباس افتخاریان[۱]، روح‌اله روزگار[۲]

(۱) گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۲/۷
دبیر مسئول: محمدرضا زادکرمی

چکیده: در این مقاله، بردارهای تصادفی از توزیع آمیخته‌مقیاس چوله-نرمال چندمتغیره براساس ترتیب تصادفی هسیان مقایسه می‌شوند. شرایط لازم و کافی برای این نوع از ترتیب‌ها مورد مطالعه قرار گرفته و با در نظر گرفتن مخروط‌های محدب مختلف، نتیجه در چند حالت مهم از این نوع ترتیب بیان گردیده است. در ادامه ترتیب هسیان صعودی و شرایط لازم و کافی برای حالت‌های مهم مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین ترتیب‌های خطی برپایه ترتیب‌های معمول و محدب نیز مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که این ترتیب‌های خطی در خانواده توزیع آمیخته‌مقیاس چوله-نرمال از نوع ترتیب هسیان می‌باشند. ترتیب هماهنگی و سوپرمودولار به عنوان ابزارهایی مهم در ترتیب وابستگی، معادل با ترتیب مقادیر همبستگی بدست آمده و براساس این نتایج، ترتیب مخاطره یا نوسانات رشد نسبی مجموعه‌های مختلف در اقتصاد بر حسب ترتیب همبستگی آنها بیان شده است. در زمینه بیمه، ترتیب مخاطره مقدار مجموع بسته‌های مختلف براساس ترتیب متوسط همبستگی درون مجموعه‌ها بدست آمده است. همچنین در زمینه قابلیت اعتماد، ترتیب طول عمر سیستم‌های موازی و سری برحسب ترتیب میزان همبستگی مولفه‌های سیستم بیان گردیده است.

واژه‌های کلیدی: ترتیب هسیان، مخروط محدب، ترتیب همبستگی، ترتیب زیان‌بس، سیستم موازی، سیستم سری.

رده‌بندی ریاضی: 60E15; 62E10

* نویسنده مسئول مقاله: رایانامه: m.amiri@hormozgan.ac.ir

۱ مقدمه

فرض نرمال بودن داده‌ها در بسیاری از شاخه‌ها فرض اساسی محسوب می‌شود اما مثال‌های متعددی وجود دارد که فرض نرمال بودن داده‌ها برقرار نیست و تبدیل آنها هم منطقی به نظر نمی‌رسد که در این زمینه مثال‌های متعددی در گنتون [۲۰] آورده شده است. در چنین شرایطی خانواده توزیع‌های نزدیک به نرمال که شامل توزیع نرمال بوده و انحرافات از نرمال بودن را نیز پوشش دهند، نقش مهمی در تحلیل داده‌ها ایفا می‌کنند. توزیع چوله-نرمال یک متغیره [۸] و توسیع‌های مختلف چندمتغیره آن از جمله توزیع چوله-نرمال چندمتغیره [۹]، چوله-تی چندمتغیره [۱۰]، چوله-کشی [۱۳]، چوله-لوجستیک چندمتغیره [۱۴] و چوله-اسلش چندمتغیره [۴۴] با درجات مختلفی از چولگی و برجستگی از جمله توزیع‌های مهمی هستند که در برازش به چنین داده‌هایی معرفی گردیده‌اند. تمامی توزیع‌های یاد شده حالات خاصی از خانواده توزیع‌های آمیخته‌مقیاس چوله-نرمال(SMSN) می‌باشند که توسط برانکو و دی [۱۴] معرفی شده است. در حوزه اقتصاد، مالی و بیمه بیشتر نتایج براساس فرضیه نرمال بودن مشاهدات بوده است و استفاده از خانواده توزیع‌های نامتقارن و برجسته اخیرا فزونی یافته است. موارد متعددی از کاربردهای توزیع‌های چوله-نرمال و تعمیم‌های مختلف آن در علوم بیمه و تحلیل بازگشت‌های مالی در ادکوک و همکاران [۳] بیان گردیده است.

ترتیب‌های تصادفی روابطی هستند که برای مقایسه‌ی توزیع‌های احتمال مختلف مانند مقایسه‌هایی نظیر کدامیک بزرگتر، کدامیک ناهمگن‌تر و کدامیک همبسته‌تر بکار گرفته می‌شوند. امروزه ترتیب‌های تصادفی بطور گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف مانند قابلیت اعتماد، پژوهش‌های عملیاتی، علوم بیمه، اقتصاد، نظریه صف، همه‌گیرشناسی، طرح آزمایش‌ها و... استفاده می‌گردند. کتاب‌های شیکید و شانتیکومار [۴۲] و مولر و استویان [۳۶] مباحث جامعی درباره انواع ترتیب‌های تصادفی و نیز کاربرد آنها در زمینه‌های گوناگون فراهم آورده‌اند. از دیگر کارهایی که در سال‌های اخیر در این زمینه انجام گرفته است می‌توان به برمال‌زن و همکاران [۱] و نادب و همکاران [۳۸] اشاره کرد که کاربرد ترتیب‌های تصادفی یک متغیره در قابلیت اعتماد و بیمه را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند.

در حالت چندمتغیره به‌ویژه زمانی‌که بعد متغیرها بالا باشد، در انجام مقایسه بوسیله ترتیب‌های تصادفی با مشکلاتی مواجه می‌شویم که در عمل استفاده از آنها را امکان‌ناپذیر می‌کند [۴۰]. در چنین شرایطی استفاده از ترکیبی خطی از متغیرها در بعد واحد به‌جای انجام مقایسه‌های چندمتغیره در بعد بالاتر اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در تحلیل‌های آماری چندمتغیره، تحلیل بوسیله ترکیب‌های خطی به‌دلیل معطوف بودن به ایجاد کاهش بعد در فضای مشاهدات به عنوان یک امر مطلوب از جایگاه خاصی برخوردار است.

ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره برای خانواده توزیع‌های متقارن بوسیله نویسندگان مخلتفی مورد بررسی قرار گرفته است. موزلر [۳۱] و باوارل [۱۲] نتایجی از ترتیب تصادفی، اسکارسینی [۴۱] ترتیب تصادفی محدب و نیز ترتیب خطی، مولر [۳۵] نتایج کلی‌تر و آرلوتو و اسکارسینی [۷] ترتیب هسیان را برای توزیع نرمال چندمتغیره بدست آوردند. لاندسمان و زاناکاس [۲۷] ترتیب‌های تصادفی توزیع‌های بیضوی دومتغیره، داویدف و پدادا [۱۶] ترتیب تصادفی خطی توزیع‌های بیضوی چند متغیره و پان و همکاران [۳۹] ترتیب تصادفی محدب و نیز محدب‌صعودی را برای خانواده توزیع‌های بیضوی بدست آوردند.

ترتیب تصادفی خانواده‌های توزیع‌های نامتقارن یک‌متغیره نیز توسط افراد مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای نمونه [۲۱]، [۱۱] و [۲۳] را مشاهده کنید. به تازگی، جمالی و همکاران [۲۴] ترتیب‌های معمول، محدب، محدب‌صعودی، محدب‌سوئی و سوپرمودولار را برای توزیع چوله-نرمال چندمتغیره و سپس جمالی و همکاران [۲۵] این نتایج را برای خانواده‌های آمیخته مقیاس-شکل از توزیع چوله-نرمال چندمتغیره گسترش دادند. نتایج حاصله در دو مقاله اخیر با در نظر گرفتن قیدهایی بصورت پارامترهای یکسان در دو بردار تصادفی بدست آمده است. همچنین، امیری و همکاران [۵] نیز ترتیب‌های خطی از نوع معمول، محدب و محدب‌صعودی را در خانواده SMSN بررسی کرده و شرایط لازم و کافی برای ترتیب محدب و سوپرمودولار را بدست آوردند و به کاربردهایی از نتایج آن در بیمه، اقتصاد و قابلیت اعتماد اشاره نمودند.

در ادامه نتایجی که در بالا به آنها اشاره گردید، نتایج جدیدتری برای خانواده SMSN ارائه می‌کنیم. این نتایج برای تحلیل طیف وسیعی از داده‌های چندمتغیره با درجات مختلف چولگی و برجستگی قابل استفاده می‌باشند. در ادامه این بخش نتایج جدید نظری و کاربردی بدست آمده در این مقاله شرح داده می‌شوند.

بردارهای تصادفی n-بعدی از خانواده توزیع‌های SMSN را بر اساس طیف گسترده‌ای از ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. بدین منظور مجموعه‌ای از ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره بنام ترتیب هسیان و

ترتیب هسیان صعودی را در خانواده توزیع‌های SMSN مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این ترتیب‌ها کلاسی کلی از ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره بوده که تمامی ترتیب‌هایی که در مقاله‌های بالا به آنها اشاره شد چند حالت خاص آن هستند. برای دستیابی به این هدف، ابتدا شرایط لازم و کافی برای برقراری ترتیب‌های هسیان و هسیان صعودی را بدست آورده و سپس بر اساس این نتایج، قیدها و محدودیت‌های در نظر گرفته شده برای بیان شرایط لازم و کافی ترتیب‌های تصادفی در جمالی و هکاران [۲۴، ۲۵] برطرف می‌کنیم. همچنین ترتیب‌های تصادفی خطی در امیری و همکاران [۵] را با ترتیب چندمتغیره‌ای از نوع هسیان یا هسیان صعودی معادل‌سازی می‌کنیم. حالت‌های خاص دیگری از ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره هسیان و نیز هسیان صعودی، که تا کنون در کلاس توزیع‌های SMSN و منابع اخیر مورد بررسی قرار نگرفته، مانند ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره سوپرمدولارصعودی، هم‌مثبت، کاملاً مثبت و کاملاً مثبت صعودی را در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی برای آنها را بدست می‌آوریم. سپس ترتیب‌های خطی‌مثبت از نوع محدب و نیز محدب‌صعودی را به ترتیب معادل با ترتیب‌های چندمتغیره کاملاً مثبت و کاملاً مثبت صعودی بیان می‌کنیم که نتیجه این معادل‌سازی کاهش بعد مقایسه از حالت ترتیب‌های چندمتغیره به حالت یک‌متغیره است. در ادامه ترتیب سوپرمودولار صعودی را در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی آن را ارائه کرده‌ایم. برای کاربردهای این ترتیب به مایر و استرولوویچی [۳۰] رجوع کنید.

در این مقاله مقایسه‌ی تصادفی براساس مفصل‌ها که در زمینه‌های کاربردی مختلفی نظیر بیمه و اقتصاد مرسوم هستند [۳۴] نیز براساس مفصل‌های SMSN مورد بررسی قرار گرفته و چند مقایسه‌ی تصادفی بر حسب ساختار همبستگی بردارهای تصادفی مورد مقایسه بدست آمده و همچنین ترتیب سوپرمودولار معادل با ترتیب همبستگی بین مولفه‌ها بیان گردیده است. براین اساس، گستره کاربرد ترتیب مقادیر همبستگی به عنوان یک روش معادل با ترتیب ساختار وابستگی، مبتنی بر مفهوم ترتیب سوپرمودولار، از خانواده توزیع نرمال چندمتغیره به خانواده وسیع SMSN افزایش یافته است.

لازم به ذکر است که نتایج بدست آمده در این مقاله در بسیاری از مباحث کاربردی مانند بیمه، اقتصاد و... که توزیع داده‌ها معمولا دارای چولگی و برجستگی بالایی هستند قابل استفاده است. برای مثال در زمینه بیمه، فرض کنید که بخواهیم مخاطره مقدار کل بسته‌هایی با چند بیمه مختلف را باهم مقایسه نماییم که غالبا دارای چولگی و نیز برجستگی بالایی در توزیع فراوانی خود می‌باشند. در چنین شرایطی، خانواده توزیع‌هایی مانند SMSN قادر خواهند بود چولگی و برجستگی در توزیع فراوانی را پوشش دهند. بنابراین، نتایج بدست آمده در این مقاله برای مقایسه مخاطره ارزش کل این بسته‌ها قابل کاربرد است. بعلاوه، در این مقاله شرایط برای مقایسه مخاطره‌آمیزی بسته‌ها با تعداد بیمه‌نامه تصادفی، براساس ترتیب زیان‌بس، فراهم شده است.

علاوه بر نتایج مذکور، خانواده توزیع‌های SMSN را برای توزیع بازگشت (لگاریتم بازگشت) یا قیمت به درآمد (لگاریتم قیمت به درآمد) مجموعه‌هایی با چند مولفه (بازار، شرکت، سبدی از چند سهام مختلف...) در نظر گرفته و سپس ترتیب نوسانات رشد نسبی مجموعه‌ها را معادل با ترتیب مقادیر همبستگی درون مجموع‌ها بیان کرده‌ایم. با استفاده از نتیجه حاصل برای ترتیب خطی مثبت محدب، ترتیب تصادفی محدب برای لگاریتم میانگین هندسی مجموعه‌ها بدست آمده است. بر اساس این نتیجه، ترتیب نوسانات بسته‌ها و مجموعه‌ها با هر تابع زیان محدب دلخواه معادل با ترتیب مقادیر همبستگی درون مجموعه‌ها بیان شده است که بر این اساس هر چه بسته‌ها همبستگی منفی‌تری داشته باشند، رشد نسبی آن نوسانات کمتری خواهد داشت.

به تازگی برخی از اعضای خانواده SMSN مانند توزیع لاپلاس [۳۷]، توزیع چوله-لاپلاس [۶]، توزیع چوله-نرمال [۲۱]، توزیع چوله-اسلش [۲۹] و توزیع لجستیک [۲] در قابلیت اعتماد بکار گرفته شده‌اند. در این زمینه، امیری و همکاران [۵] طول عمر توام مولفه‌های سیستم را برحسب ترتیب هماهنگی بیان نمودند. در این مقاله دو سیستم همگن با مولفه‌هایی با طول عمر همبسته از توزیع لگ SMSN در نظر گرفته شده است و سپس ترتیب تصادفی معمول برای طول عمر سیستم‌های سری و موازی بر حسب میزان همبستگی مولفه‌های آنها بدست آمده است. همچنین با ذکر چند مثال و نیز استفاده از یک مجموعه داده واقعی، نتایج مقاله مورد ارزیابی قرار گرفته و تفسیر گردیده است.

لازم به ذکر است همه نتایج این مقاله درحالت خاص برای خانواده آمیخته‌مقیاس از توزیع نرمال که شامل غالب توزیع‌های بیضوی نیز هستند قابل کاربرد می‌باشند. همچنین برخی از این نتایج برای خانواده بیضوی تاکنون در متون مربوطه مورد مطالعه قرار نگرفته و بنابراین قابل توجه می‌باشند.

بدین ترتیب، در این مقاله، در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در مورد توزیع‌های SMSN ، توابع، مخروط‌های محدب و ترتیب‌های تصادفی هسیان را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، ابتدا نتایج مرتبط با ترتیب‌های تصادفی هسیان

ارائه می‌گردد و سپس نتایج در حالت‌های مهم آن برای خانواده SMSN بیان می‌شود. در بخش ۴، ترتیب‌های تصادفی هسیان صعودی معرفی شده و در حالت‌های مهم نتایج بدست می‌آیند. در بخش ۵، ترتیب‌های خطی معمول و محدب و محدب‌صعودی با یکی از ترتیب‌های چندمتغیره معادل‌سازی شده‌اند و بردارهای تصادفی براساس مفصل‌های برآمده از خانواده SMSN بر حسب ساختار همبستگی آن‌ها مورد مقایسه قرار گرفته‌اند و سپس کاربردها و تفسیرهایی در اقتصاد، بیمه و قابلیت اعتماد ارائه گردیده است. در انتهای این بخش، با ذکر مثالی از داده واقعی، کاربرد برخی از نتایج بدست آمده نشان داده شده است. در انتها، در بخش ۶، نتایج و خلاصه‌ای از مقاله و نیز پیشنهادات آتی داده شده است.

۲ تعاریف و پیش نیازها

در ابتدای این بخش، نمادهای به‌کار رفته در این مقاله را معرفی می‌کنیم. توابع $\Phi(.)$ و $\phi_n(\cdot\,;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega})$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و تابع چگالی احتمال توام توزیع نرمال n-متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\xi}$ و ماتریس واریانس-کواریانس $\boldsymbol{\Omega}$ ، $\boldsymbol{\omega}=diag(\omega_{11},\dots,\omega_{nn})^{\frac{1}{2}}$ جذر ماتریس قطری حاصل از $\boldsymbol{\Omega}$ و $\overline{\boldsymbol{\Omega}}$ ماتریس همبستگی متناظر با $\boldsymbol{\Omega}$ می‌باشند. همچنین برای دو بردار $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)^\top$ و $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n)^\top$ ، رابطه $\mathbf{a}\geq\mathbf{b}$ به‌معنی $a_i\geq b_i$ برای $i=1,2,\dots,n$ می‌باشد. بردارهای $\circ_n$ و $\mathbf{1}_n$ به ترتیب بردارهایی به طول n با عناصر ۰ و ۱ و $\mathbf{I}_n$ ماتریس همانی از مرتبه n می‌باشد. به‌علاوه ضرب داخلی $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\mathbf{a}^\top\mathbf{b}$ و نرم $||\mathbf{a}||=\sqrt{\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle}$ را در نظر می‌گیریم.

۱.۲ توزیع آمیخته‌مقیاس چوله-نرمال

بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)^\top$ دارای توزیع SMSN چند متغیره گوییم، اگر مطلقاً پیوسته و دارای تابع چگالی احتمال توام زیر، برای $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ ، باشد [۱۴]:

$$f(\mathbf{x})=2\int_0^{+\infty}\phi_n(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi},k(\eta)\boldsymbol{\Omega})\Phi(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\omega}^{-1}k(\eta)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}))dH(\eta), \qquad (۱.۲)$$

که پارامترهای $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$ بردار مکان، $\boldsymbol{\Omega}$ ماتریس واریانس-کواریانس و $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ بردار چولگی می‌باشند. در این تابع چگالی η متغیر آمیختگی با تابع توزیع تجمعی $H(\eta)$ و همچنین $k(\eta)$ تابع مقیاس متغیر η می‌باشد.

تابع مشخصه بردار تصادفی $\mathbf{X}$ با تابع چگالی احتمال توآم در (۱.۲)، برای $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^n$، به‌صورت زیر است

$$E(\exp(i\mathbf{s}^\top\mathbf{X}))=2\int_0^{+\infty}\exp(i\boldsymbol{\xi}^\top\mathbf{s}-\frac{k(\eta)}{2}\mathbf{s}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{s})\Phi\left(ik(\eta)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\delta}^\top\mathbf{s}\right)dH(\eta), \qquad (۲.۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\delta}=\left(1+\boldsymbol{\alpha}^\top\overline{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\omega}\overline{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\alpha}$ بردار چولگی است و با بردار چولگی $\boldsymbol{\alpha}$ در (۱.۲) در تناظر یک‌به‌یک به‌صورت $\boldsymbol{\alpha}=\left(1-\boldsymbol{\delta}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}$ است. در این‌صورت بردار تصادفی $\mathbf{X}$ با تابع چگالی معرفی شده در (۱.۲) را دارای توزیع SMSN گوییم و آن‌را با $\mathbf{X}\sim\mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\delta},k,H)$ نمایش می‌دهیم. در ادامه برای سادگی بیشتر می‌توان آن‌را با $\mathbf{X}\sim\mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\delta})$ نمایش داد. بردار میانگین و ماتریس کواریانس $\mathbf{X}$ عبارت‌است از

$$E\left(\mathbf{X}\right)=\boldsymbol{\xi}+E(k(\eta)^{\frac{1}{2}})\sqrt{\frac{2}{\pi}}\boldsymbol{\delta},\quad Cov\left(\mathbf{X}\right)=E(k(\eta))\boldsymbol{\Omega}-\frac{2}{\pi}E^2(k(\eta)^{\frac{1}{2}})\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^\top. \qquad (۳.۲)$$

برخی از حالت‌های خاص و مهم خانواده SSMN عبارت‌است از: (i) توزیع چوله-نرمال اگر توزیع H تباهیده با $k(\eta)=1$ باشد، (ii) آمیخته‌ی متناهی از توزیع‌های چوله-نرمال اگر توزیع H گسسته متناهی باشد، (iii) توزیع چوله-تی اگر H توزیع گاما با پارامترهای شکل و مقیاس یکسان $\frac{\nu}{2}$ با $k(\eta)=\eta^{-1}$ ، (iv) توزیع چوله-کوشی اگر H توزیع نیم-نرمال استاندارد و $k(\eta)=\eta^{-1}$ ، (v) چوله-اسلش وقتی $k(\eta)=\eta^{-2}$ و H توزیع بتا با پارامترهای q و ۱ باشد و (vi) توزیع‌های چوله-لوجستیک، چوله-پایا و چوله-توان-نمایی [۱۴].

۲.۲ تعریف توابع مورد نیاز

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی به‌صورت

$$f^{(i_1,\dots,i_k)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}, \quad \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\},$$

باشد. در این‌صورت بردار گرادیان و ماتریس هسیان تابع f به‌ترتیب به‌صورت

$$\mathbf{H}_f\left(\mathbf{x}\right) = \left[f^{(i,j)}\left(\mathbf{x}\right)\right]_{i,j=1}^{n} \text{ ، } \nabla_f\left(\mathbf{x}\right) = \left[f^{(i)}\left(\mathbf{x}\right)\right]_{i=1}^{n}$$

تعریف می‌شوند. اگر $\mathbf{B}$ ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آن را معین‌نامنفی گوییم هرگاه $\mathbf{t}^\top\mathbf{B}\mathbf{t} \geq 0$ برای $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{B}$ را هم‌مثبت [۳۲] گوییم هرگاه $\mathbf{t}^\top\mathbf{B}\mathbf{t} \geq 0$ برای $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n_+$ که $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, i = 1,\dots,n\}$. همچنین $\mathbf{B}$ را کاملاً مثبت گوییم هرگاه ماتریس نامنفی $\mathbf{C}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$. توجه کنید که در این مقاله منظور از ماتریس نامنفی ماتریس با درایه‌های نامنفی می‌باشد.

تعریف ۱.۲. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i) صعودی است اگر $\nabla_f \geq 0$، (ii) محدب است اگر $\mathbf{H}_f$ معین‌نامنفی باشد، (iii) محدب‌صعودی اگر f محدب و نیز صعودی باشد، (iv) محدب‌سوئی اگر $f^{(i,j)} \geq 0$ برای $1 \leq i,j \leq n$، (v) محدب‌جزئی است اگر $\mathbf{H}_f$ دارای عناصر قطری نامنفی باشد، (vi) سوپرمودولار است اگر $f^{(i,j)} \geq 0$ برای $1 \leq i < j \leq n$، (vii) سوپرمودولارصعودی است اگر f سوپرمودولار و نیز صعودی باشد، (viii) هم‌مثبت اگر $\mathbf{H}_f$ هم‌مثبت باشد ، (ix) کاملاً مثبت است اگر $\mathbf{H}_f$ کاملاً مثبت باشد و (x) کاملاً مثبت صعودی است اگر f کاملاً مثبت و نیز صعودی باشد.

تعریف ۲.۲. زیرمجموعه $\mathcal{C}$ از فضای برداری $\mathcal{V}$ را یک مخروط محدب گوییم اگر برای هر $x,y \in \mathcal{C}$ داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in \mathcal{C}$ برای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. اگر مجموعه $\mathcal{C}$ یک مخروط محدب بسته از فضای برداری $\mathcal{V}$ با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد، آنگاه $\mathcal{C}^* = \{y \in \mathcal{V} :\ \langle x,y\rangle \geq 0,\ \ \forall x \in \mathcal{C}\}$ را دوگان $\mathcal{C}$ گوییم که $\mathcal{C}^*$ نیز یک مخروط محدب بسته است. اگر $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$، آنگاه $\mathcal{C}$ را خود دوگان گوییم.

۳.۲ تعریف ترتیب‌های تصادفی

در این بخش ترتیب‌های تصادفی مختلف مورد بحث در این مقاله را تعریف می‌کنیم. ابتدا به تعریف ترتیب‌های تصادفی انتگرالی می‌پردازیم [۳۳].

فرض کنید $\mathcal{F}$ کلاس توابع اندازه‌پذیر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ باشد و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی $n-$بعدی باشند. در این‌صورت ترتیب تصادفی انتگرالی $\mathbf{X} \preceq_{\mathcal{F}} \mathbf{Y}$ برقرار است اگر رابطه زیر برای تمام توابع $f \in \mathcal{F}$، با فرض وجود امیدهای ریاضی، برقرار باشد

$$E\left(f\left(\mathbf{X}\right)\right) \leq E\left(f\left(\mathbf{Y}\right)\right). \qquad (۴.۲)$$

دنوئیت و مولر [۱۷] نشان دادند که برای برقراری ترتیب تصادفی انتگرالی فوق کافی است رابطه (۴.۲) برای اعضای $\mathcal{F}$ که دارای مشتق‌های جزئی می‌باشند برقرار باشد. برهمین اساس، توابع f در این کلاس را با فرض وجود مشتق‌های جزئی پیوسته مرتبه دوم در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف بالا، ترتیب‌های تصادفی انتگرالی زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۳.۲. اگر رابطه (۴.۲) برای هرتابع f درکلاس $\mathcal{F}$ در موارد (i)–(x) در تعریف ۱.۲ برقرار باشد، آنگاه ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره زیر در این موارد به‌ترتیب بدست می‌آیند: (i) ترتیب معمول $(\preceq_{st})$، (ii) ترتیب محدب $(\preceq_{cx})$، (iii) ترتیب محدب‌صعودی $(\preceq_{icx})$، (iv) ترتیب محدب‌سوئی $(\preceq_{dcx})$، (v) ترتیب محدب‌جزئی $(\preceq_{ccx})$، (vi) ترتیب سوپرمودولار $(\preceq_{sm})$، (vii) ترتیب سوپرمودولارصعودی $(\preceq_{ism})$، (viii) ترتیب هم‌مثبت $(\preceq_{cop})$، (ix) ترتیب کاملاً مثبت $(\preceq_{cp})$ و (x) ترتیب کاملاً مثبت صعودی $(\preceq_{icp})$.

در ادامه ترتیب تصادفی هسیان که توسط آرلوتو و اسکارسینی [۷] معرفی شد تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $\mathcal{S}$ فضای برداری ماتریس‌های متقارن مرتبه n با ضرب داخلی $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \mathrm{trace}\left[\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}\right]$ برای $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{S}$ باشد و $\mathcal{H}$ یک مخروط محدب بسته از فضای $\mathcal{S}$ و کلاس توابع $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ به‌صورت زیر باشد:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}, \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \tag{۵.۲}$$

آنگاه در صورت برقراری رابطه (۴.۲) برای هر تابع $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$، در ترتیب هسیان $\mathbf{X}$ را کوچکتر یا مساوی $\mathbf{Y}$ گوییم و آن را با $\mathbf{X} \preceq_{\mathcal{H}} \mathbf{Y}$ نمایش می‌دهیم.

۳ ترتیب هسیان

در این بخش، ابتدا نتایج کلی برای ترتیب‌های تصادفی هسیان در خانواده SMSN را بررسی می‌نماییم و سپس به حالت‌های خاص آن می‌پردازیم. بدین منظور بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ از توزیع SMSN با تابع چگالی (۱.۲) و تابع مشخصه (۲.۲) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}), \quad \mathbf{Y} \sim \mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\delta}') \tag{۱.۳}$$

که دارای تابع مقیاس $k(\eta)$ و متغیر آمیختگی η با تابع توزیع تجمعی $H(.)$ می‌باشند. در لم زیر شرایط کافی برای ترتیب تصادفی هسیان در خانواده توزیع‌های SMSN ارائه می‌گردد.

لم ۱.۳. کلاس توابع $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ با مخروط محدب $\mathcal{H}$ و دوگان $\mathcal{H}^*$ را در نظر بگیرید بطوری که برای $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ داشته باشیم $f(\mathbf{x}) = O(||\mathbf{x}||)$ و $\nabla_f(\mathbf{x}) = O(||\mathbf{x}||)$ زمانی که $||\mathbf{x}|| \to +\infty$. آنگاه $\mathbf{X} \preceq_{\mathcal{H}} \mathbf{Y}$ اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$\langle \boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{\xi}, \nabla_f\rangle \geq ۰, \quad \langle \boldsymbol{\delta}' - \boldsymbol{\delta}, \nabla_f\rangle \geq ۰, \qquad \boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{H}^*. \tag{۲.۳}$$

اثبات. با استفاده از اتحاد بدست‌آمده برای $\mathrm{E}\left(f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X})\right)$ در [۵] و شرایط (۲.۳)، رابطه (۴.۲) برقرار بوده و نتیجه مورد نظر از تعریف ۴.۲ بدست می‌آید. $\square$

شرایط داده شده در لم ۱.۳، شرایط وجود انتگرال در تعریف ترتیب انتگرالی در رابطه (۴.۲) می‌باشند و بنابراین شرایط اضافی یا محدودکننده محسوب نمی‌گردند [۳۳، ۳۵].
توزیع ترکیب خطی از بردارهای تصادفی (۱.۳) با استفاده از تابع مشخصه (۲.۲) به‌صورت توزیع SMSN یک‌متغیره (برای $n = ۱$) زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle \sim& \mathcal{SMSN}_۱(\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}\rangle, \mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}, \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta}\rangle),\\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{Y}\rangle \sim& \mathcal{SMSN}_۱(\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}'\rangle, \mathbf{a}^{\top}\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{a}, \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta}'\rangle),\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

در حالت خاص اگر

$$X \sim \mathcal{SMSN}_۱(\xi, \sigma^۲, \delta), \qquad Y \sim \mathcal{SMSN}_۱(\xi', \sigma'^۲, \delta'). \tag{۴.۳}$$

آنگاه شرایط لازم و کافی برای ترتیب تصادفی معمول، محدب و محدب‌صعودی متغیرهای تصادفی فوق به‌صورت آن چه در لم زیر آمده خواهد بود [۵].

لم ۲.۳. اگر X و Y متغیرهای تصادفی در (۴.۳) باشند آنگاه،

(i) $X \preceq_{st} Y$ اگر و تنها اگر $\xi \leq \xi'$، $\sigma = \sigma'$ و $\delta \leq \delta'$.

(ii) $X \preceq_{icx} Y$ اگر و تنها اگر $\xi \leq \xi'$، $\sigma \leq \sigma'$ و $\delta \leq \delta'$.

(iii) $X \preceq_{cx} Y$ اگر و تنها اگر $\xi = \xi'$، $\sigma \leq \sigma'$ و $\delta = \delta'$.

در قضیه زیر، شرایط لازم و کافی برای ترتیب هسیان بردارهای تصادفی در (۱.۳) بدست آمده است. این نتیجه شرایط لازم و کافی برای طیف گسترده‌ای از ترتیب‌های تصادفی چندمتغیره در خانواده SMSN فراهم می‌آورد که تنها برخی از حالت‌های خاص آن تاکنون در مطالعات اخیر بدست آمده است.

قضیه ۳.۳. مخروط محدب $\mathcal{H}$ زیر مجموعه $\mathcal{S}$ با دوگان $\mathcal{H}^*$ را در نظر بگیرید. آنگاه، $\mathbf{Y} \preceq_{\mathcal{H}} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}'$ و $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{H}^*$.

اثبات. اگر شرایط $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}'$ و $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{H}^*$ برقرار باشند، آنگاه شرایط (۲.۳) برقرار گردیده و $\mathbf{Y} \preceq_{\mathcal{H}} \mathbf{X}$. برعکس، فرض کنید $\mathbf{Y} \preceq_{\mathcal{H}} \mathbf{X}$. با فرض $f(\mathbf{x}) = g(x_i)$، $i = ۱, \ldots, n$، به‌طوری که ماتریس هسیان آن در $\mathcal{H}$ باشد، یعنی اینکه $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = g^{(۲)}(x_i)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^\top \in \mathcal{H}$ که در آن $g^{(۲)}(u) = \partial^۲ g(u)/\partial u^۲$. بنابراین $g^{(۲)}(t) \in \mathcal{H}_{ii}$ که $\mathcal{H}_{ii} = \{c_{ii} : \mathbf{C} = [c_{ij}] \in \mathcal{H}\}$ یك مخروط محدب و زیرمجموعه $\mathbb{R}$ است. در نتیجه $\mathcal{H}_{ii}$ یکی از سه مخروط محدب (i) $\mathbb{R}_-$، (ii) $\mathbb{R}_+$ یا (iii) $\mathbb{R}$ خواهد بود. پس g در هر یک از موارد مذکور به‌ترتیب تابعی(i) مقعر، (ii) تابعی محدب و (iii) تابعی دلخواه خواهد بود. لذا با توجه به اینکه $X_i \preceq_{\mathcal{H}_{ii}} Y_i$، و اینکه اگر g مقعر باشد آنگاه $-g$ محدب است، در حالت (i) $Y_i \preceq_{cx} X_i$، (ii) $X_i \preceq_{cx} Y_i$ و (iii) $X_i \stackrel{d}{=} Y_i$ برقرار می‌باشد. با استفاده از (۳.۳) :

$$X_i \sim \mathcal{SMSN}_۱(\xi_i, \omega_{ii}, \delta_i), \quad Y_i \sim \mathcal{SMSN}_۱(\xi'_i, \omega'_{ii}, \delta'_i). \tag{۵.۳}$$

بنابراین بااستفاده از لم ۲.۳ برای حالت‌های (i) و (ii) و به‌صورت واضح برای حالت (iii) $\xi_i = \xi'_i$ و $\delta_i = \delta'_i$ برای $i = ۱, \ldots, n$ نتیجه می‌شود، یعنی $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$ و $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}'$. همچنین با استفاده از قضیه ۳,۱ در [۷] به‌صورت کلی $Cov(\mathbf{Y}) - Cov(\mathbf{X}) \in \mathcal{H}^*$. حال با استفاده از رابطه (۳.۲) شرط دیگر یعنی $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{H}^*$ بدست می‌آید و در نتیجه اثبات تکمیل می‌گردد. □

مخروط‌های محدب بسته $\mathcal{C}_{psd}$ شامل ماتریس‌های معین‌نامنفی، $\mathcal{C}_+$ شامل ماتریس‌های نامنفی، $\mathcal{C}_{+off}$ شامل ماتریس‌های نامنفی با عناصر غیر قطری صفر، $\mathcal{C}_{+diag}$ شامل ماتریس‌های نامنفی با عناصر قطر اصلی نامنفی، $\mathcal{C}_{cop}$ شامل ماتریس‌های هم‌مثبت و $\mathcal{C}_{cp}$ شامل ماتریس‌های کاملاً مثبت را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت تابع f محدب است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_{psd}$، محدب‌سوئی است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_+$، محدب‌جزئی است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_{+diag}$، سوپرمودولار است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_{+off}$، هم‌مثبت است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_{cp}$ و کاملاً مثبت است اگر و تنها اگر $\mathbf{H}_f \in \mathcal{C}_{cop}$. همچنین $\mathcal{C}_{psd}$ و $\mathcal{C}_+$ خوددوگان هستند، $\mathcal{C}^*_{cop} = \mathcal{C}_{cp}$ ، $\mathcal{C}^*_{cp} = \mathcal{C}_{cop}$ و

$$\mathcal{C}^*_{+off} = \{\mathbf{C} \in \mathcal{S} : c_{ii} = ۰, c_{ij} \geq ۰, i \neq j, i, j = ۱, \ldots, n\},$$
$$\mathcal{C}^*_{+diag} = \{\mathbf{C} \in \mathcal{S} : c_{ii} \geq ۰, c_{ij} = ۰, i \neq j, i, j = ۱, \ldots, n\}$$

و به‌صورت کلی $\mathcal{C}_{cop} \subseteq \mathcal{C}_{psd} + \mathcal{C}_+$ و $\mathcal{C}_{cp} \subseteq \mathcal{C}_{psd} \cap \mathcal{C}_+$ [۷]. حال ترتیب‌های مختلف و مهم هسیان را در نظر می‌گیریم و شرایط لازم و کافی برای برقرای ترتیب‌های محدب $(\preceq_{cx})$، محدب‌جزئی $(\preceq_{ccx})$، محدب‌سوئی $(\preceq_{dcx})$، سوپرمودولار $(\preceq_{sm})$، هم‌مثبت $(\preceq_{cop})$ و کاملاً مثبت $(\preceq_{cp})$ را بدست می‌آوریم.

قضیه ۴.۳. (i) $\mathbf{Y} \preceq_{cx} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}$ معین‌نامنفی باشد،

(ii) $\mathbf{Y} \preceq_{dcx} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\omega_{ij} \leq \omega'_{ij}$ برای هر i, j،

(iii) $\mathbf{Y} \preceq_{ccx} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\omega_{ii} \leq \omega'_{ii}$ و $\omega_{ij} = \omega'_{ij}$ برای $i \neq j$،

(iv) $\mathbf{Y} \preceq_{sm} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\omega_{ii} = \omega'_{ii}$، و $\omega_{ij} \leq \omega'_{ij}$ برای $i \neq j$،

(v) $\mathbf{Y} \preceq_{cp} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}$ هم‌مثبت باشد،

(vi) $\mathbf{Y} \preceq_{cop} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}$ کاملاً مثبت باشد،

(vii) برای $n \leq ۴$، $\mathbf{Y} \preceq_{cp} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}$ به‌صورت مجموع دو ماتریس که یکی نامنفی و دیگری معین‌نامنفی باشد،

(viii) برای $n \leq ۴$، $\mathbf{X} \preceq_{cop} \mathbf{Y}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}$ هم نامنفی و هم معین‌نامنفی،
برای $i, j = ۱, \ldots, n$ و همچنین در همه موارد فوق $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$ و $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}'$.

اثبات. موارد (i) تا (vi) همگی از نوع ترتیب هسیان با مخروط‌های محدب معرفی‌شده در بالا می‌باشند و با قرار دادن $\mathcal{H}$ به‌ترتیب با $\mathcal{C}_{psd}$، $\mathcal{C}_{+}$، $\mathcal{C}_{+diag}$، $\mathcal{C}_{+off}$، $\mathcal{C}_{cp}$ و $\mathcal{C}_{cop}$ در قضیه ۳.۳ و $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega} \in \mathcal{H}^*$ بدست می‌آیند. همچنین برای $n \leq ۴$ همواره $\mathcal{C}_{+} + \mathcal{C}_{psd} = \mathcal{C}_{cop}$ و $\mathcal{C}_{cp} = \mathcal{C}_{psd} \cap \mathcal{C}_{+}$ بر قرار می‌باشد. بنابراین موارد (vii) و (viii) به‌ترتیب از (v) و (vi) بدست می‌آیند. □

قسمت (i) و (iv) قضیه ۴.۳ توسط امیری و همکاران [۵] نیز اثبات گردیده است، اما سایر قسمت‌ها در منبع مذکور یا منابع دیگر مورد بررسی قرار نگرفته است.

۴ ترتیب هسیان صعودی

در این قسمت، ترتیب‌های هسیان صعودی برای خانواده توزیع‌های SMSN را بررسی می‌کنیم. کلاس $\ell_{\mathcal{H}}$ شامل توابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به‌صورت $\ell_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \cap \ell$ را در نظر بگیرید که ℓ کلاس توابع صعودی و $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ کلاس توابع تعریف شده در (۵.۲) باشند. در صورت برقراری رابطه (۴.۲) برای کلاس توابع $\ell_{\mathcal{H}}$، ترتیب حاصل را ترتیب هسیان صعودی گوییم و آن را با $\mathbf{X} \preceq_{\ell_{\mathcal{H}}} \mathbf{Y}$ نمایش می‌دهیم. در لم زیر، شرایط کافی برای ترتیب هسیان صعودی در خانواده SMSN بیان گردیده است.

لم ۱.۴. اگر $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ و $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega} \in \mathcal{H}^*$ آنگاه $\mathbf{X} \preceq_{\ell_{\mathcal{H}}} \mathbf{Y}$.

اثبات. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در کلاس $\ell_{\mathcal{H}}$ باشد و شرایط $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$ ، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ و $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega} \in \mathcal{H}^*$ برقرار باشند. در این‌صورت با استفاده اتحاد بدست‌آمده در [۵] برای $E(f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X}))$، رابطه (۴.۲) برقرار گردیده و نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. □

در ادامه، ترتیب‌های هسیان صعودی مختلف مورد بحث در این مقاله و شرایط لازم و کافی برای برقراری آنها در خانواده SMSN را مورد بررسی قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است که از ترتیب‌های خاص هسیان صعودی در این بخش، تنها شرایط لازم و کافی برای ترتیب معمول در امیری و همکاران [۵] مورد مطالعه قرارگرفته شده و در مورد سایر ترتیب‌ها در این منبع و متون دیگر نتیجه‌ای بدست نیامده است. در ابتدای این بخش، شرایط لازم و کافی ترتیب معمول ($\preceq_{st}$) را براساس نتایج حاصل از ترتیب هسیان صعودی بیان خواهیم کرد.

قضیه ۲.۴. $\mathbf{Y} \preceq_{st} \mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ و $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$.

اثبات. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ صعودی است اگر و تنها اگر $f \in \ell_{S}$. از $S^* = \{۰\}$ و $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ شرایط لم ۱.۴ برقرار می‌شود و بنابراین $\mathbf{X} \preceq_{st} \mathbf{Y}$. بالعکس، فرض کنید $\mathbf{X} \preceq_{st} \mathbf{Y}$ و قرار دهید $f(\mathbf{x}) = g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle)$ که $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع صعودی است و $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_{+}$. در این‌صورت f نیز صعودی بوده و بنابراین $E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle)) \leq E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{Y} \rangle))$ یعنی اینکه $\langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle \preceq_{st} \langle \mathbf{a}, \mathbf{Y} \rangle$. سپس با استفاده از (۳.۳) و لم ۲.۳ شرایط $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}' \rangle$، $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta} \rangle \leq \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta}' \rangle$ و $\mathbf{a}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{a} = \mathbf{a}^\top \mathbf{\Omega}' \mathbf{a}$ بدست می‌آیند و با انتخاب $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$ و $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ شرایط لازم حاصل می‌گردد. □

در ادامه، ترتیب محدب‌صعودی ($\preceq_{icx}$) در خانواده SMSN را بررسی می‌کنیم. در این مورد، شروط کافی همگی ضروری نیستند.

قضیه ۳.۴. (i) اگر $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ و $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}$ معین‌نامنفی باشد، آنگاه $\mathbf{X} \preceq_{icx} \mathbf{Y}$.

(ii) اگر $\mathbf{X} \preceq_{icx} \mathbf{Y}$ آنگاه $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}'$ و $\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}$ هم‌مثبت است.

اثبات. (i) تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ محدب‌صعودی است اگر و تنها اگر $f\in\ell_{\mathcal{C}_{psd}}$ و بنابراین نتیجه مورد نظر از لم ۱.۴ بدست می‌آید.

(ii) فرض کنید $\mathbf{Y}\preceq_{icx}\mathbf{X}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ محدب‌صعودی و $f(\mathbf{x})=g(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)$ که $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^n$. در این‌صورت f محدب‌صعودی بوده و براساس تعریف $E(g(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle))\le E(g(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle))$ یعنی اینکه $\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle\preceq_{icx}\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle$. حال با استفاده از لم ۲.۳، شرایط $\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\xi}\rangle\le\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\xi}'\rangle$، $\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\delta}\rangle\le\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\delta}'\rangle$ و $\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}\le\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{a}$ بدست می‌آیند که شرایط ضروری داده شده را فراهم می‌کنند. □

ترتیب سوپرمودولارصعودی ($\preceq_{ism}$) نیز از نوع ترتیب هسیان صعودی است و در قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای این ترتیب بدست می‌آیند.

قضیه ۴.۴. $\mathbf{Y}\preceq_{ism}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\xi}\le\boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta}\le\boldsymbol{\delta}'$، $\omega_{ii}=\omega'_{ii}$ برای $i=۱,\dots,n$ و $\omega_{ij}\le\omega'_{ij}$ برای $i\neq j$، $i,j=۱,\dots,n$.

اثبات. تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ سوپرمودولارصعودی است اگر و تنها اگر $f\in\ell_{\mathcal{C}_{+off}}$. پس شرایط داده شده همان شرایط لم ۱.۴ بوده و بنابراین $\mathbf{Y}\preceq_{ism}\mathbf{X}$. بالعکس، فرض کنید $\mathbf{Y}\preceq_{ism}\mathbf{X}$. سپس با استفاده از قضیه ۶٫۳٫۹ در [۳۶]، ترتیب‌های $X_i\preceq_{st}Y_i$ و $\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle\preceq_{icx}\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle$ برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^n$ نتیجه می‌شوند. از $X_i\preceq_{st}Y_i$ و لم ۲.۳ شرایط $\xi_i\le\xi'_i$، $\delta_i\le\delta'_i$ و $\omega_{ii}=\omega'_{ii}$ بدست می‌آیند. همچنین از $\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle\preceq_{icx}\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle$ و سپس (۳.۳) و استفاده از لم ۲.۳ عبارات $\mathbf{a}^\top[\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}]\mathbf{a}\ge ۰$ بدست می‌آیند، یعنی $\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}$ هم‌مثبت است و عناصر قطر اصلی آن صفر هستند. با انتخاب $\mathbf{a}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j$ و محاسبات ساده عبارت $\mathbf{a}^\top[\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}]\mathbf{a}=۲(\omega'_{ij}-\omega_{ij})$ بدست آمده که نامنفی است و بدین ترتیب شرایط لازم مورد نظر همگی برقرار می‌گردند. □

در قضیه بعدی، شرایط لازم و کافی برای ترتیب کاملاً مثبت صعودی ($\preceq_{icp}$) را بدست آورده و در حالتی که بردار تصادفی SMSN حداکثر ۴ متغیره باشد نیز شرط لازم و کافی دقیق‌تری بیان می‌شود.

قضیه ۵.۴. (i) $\mathbf{Y}\preceq_{icp}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\xi}\le\boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta}\le\boldsymbol{\delta}'$ و $\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}$ هم‌مثبت باشد.

(ii) برای $n\le ۴$، $\mathbf{Y}\preceq_{icp}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\xi}\le\boldsymbol{\xi}'$، $\boldsymbol{\delta}\le\boldsymbol{\delta}'$ و $\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}$ به‌صورت مجموع دوماتریس باشد، یکی نامنفی و دیگری معین‌نامنفی.

اثبات. (i) تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ هم‌مثبت صعودی است اگر و تنها اگر $f\in\ell_{\mathcal{C}_{cp}}$ و بنابر این شرایط داده‌شده همان شرایط لم ۱.۴ بوده و در نتیجه $\mathbf{Y}\preceq_{icp}\mathbf{X}$. بالعکس، فرض کنید $\mathbf{Y}\preceq_{icp}\mathbf{X}$ و $f(\mathbf{x})=g(\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)$ برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^n$ که $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع محدب‌صعودی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\mathbf{H}_f\in\mathcal{C}_{cp}$ و بنابراین $E(g(\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle))\le E(g(\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle))$ یعنی $\langle\mathbf{a},\mathbf{X}\rangle\preceq_{icx}\langle\mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle$. حال از (۳.۳) و لم ۲.۳ شرایط $\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\xi}\rangle\le\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\xi}'\rangle$، $\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\delta}\rangle\le\langle\mathbf{a},\boldsymbol{\delta}'\rangle$ و $\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}\le\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{a}$ بدست می‌آیند و بدین ترتیب نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد.

(ii) برای $n\le ۴$ همواره $\mathcal{C}_{cop}=\mathcal{C}_+ + \mathcal{C}_{psd}$ و $\mathcal{C}_{cp}=\mathcal{C}_{psd}\cap\mathcal{C}_+$ برقرار است و بنابراین مورد (ii) از (i) حاصل می‌شود. □

۵ کاربرد

در این بخش، نتایج حاصل از ترتیب‌های هسیان و هسیان صعودی در دو بخش پیشین را جهت معادل‌سازی با ترتیب‌های تصادفی خطی بکار می‌بریم. در زمینه‌های متعددی که هدف مقایسه و تحلیل براساس ساختار همبستگی است، مانند پژوهش‌های عملیاتی [۱۲] و [۲۸] ، علوم بیمه [۳۴] و اقتصاد [۴۱]، از ترتیب سوپرمودولار استفاده می‌گردد. در این بخش، نتایج را برای ترتیب سوپرمودولار با مفصل‌های SMSN بکار برده و چند مقایسه تصادفی برحسب ساختار همبستگی بردارهای تصادفی بیان می‌کنیم. سپس کاربرد نتایج را در اقتصاد، بیمه و قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم.

۱.۵ ترتیب‌های خطی

در بسیاری از زمینه‌ها نظیر انجام آزمایش‌های بالینی برای مقایسه‌ی گروه‌هایی با دوز مختلف دارو، از یک اندازه‌گیری کلی بوسیله میانگین وزنی از دوزها استفاده می‌شود که در آن ترکیبی خطی از بردارهای تصادفی به منظور انجام مقایسه در نظر گرفته می شود. به‌علاوه در بحث اقتصاد، ارزش (پولی) کلی یک بسته متشکل از کالاهای مختلف به‌وسیله یک ترکیب خطی با در نظر گرفتن قیمت هر واحد از آن کالاها به عنوان ضرایب ترکیب خطی از کمیت (تعداد) کالاها بیان می‌گردد. در نظر گرفتن هر نوع تابع (یا تبدیلی) دیگر به‌جز تبدیل خطی فاقد مفهوم و معنی خاصی در این حوزه‌ها هستند [۴۱]. در این قسمت ابتدا چند ترتیب تصادفی خطی را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۵. اگر رابطه (۴.۲) برای همه توابع $f(\mathbf{x}) = g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle)$ که $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برقرار باشد، آنگاه ترتیب خطی حاصل را (i) ترتیب خطی-معمول $(\preceq_{lst})$ گوییم اگر g صعودی و $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$ باشد، (ii) خطی-محدب $(\preceq_{lcx})$ گوییم اگر g محدب و $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ باشد، (iii) خطی-محدب‌صعودی $(\preceq_{ilcx})$ گوییم اگر g محدب‌صعودی و $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ باشد، (iv) خطی-مثبت-محدب $(\preceq_{plcx})$ گوییم اگر g محدب و $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$ باشد، (v) خطی-مثبت-محدب‌صعودی $(\preceq_{plcx})$ گوییم اگر g محدب‌صعودی و $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$ باشد.

در قضیه‌های زیر، ترتیب‌های بیان‌شده در تعریف فوق را معادل با یکی از ترتیب‌های چندمتغیره هسیان بیان می‌کنیم. به عبارت دیگر، این ترتیب‌های خطی در خانواده توزیع‌های SMSN نیز از نوع ترتیب هسیان یا هسیان صعودی می‌باشند و شرایط لازم و کافی برای آنها از ترتیب چندمتغیره معادل پیروی می‌نماید.

قضیه ۲.۵. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای تصادفی در (۱.۳) باشند، آنگاه $\mathbf{Y}\preceq_{lst}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{Y}\preceq_{st}\mathbf{X}$.

اثبات. اگر $\mathbf{Y}\preceq_{lst}\mathbf{X}$ آنگاه $\langle \mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle\preceq_{st}\langle \mathbf{a},\mathbf{X}\rangle$ برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$ و بنابراین با استفاده از (۳.۳) و لم ۲.۳ شرایط $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}'\rangle \le \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}\rangle$، $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}'\rangle \le \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}\rangle$ و $\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{a}=\mathbf{a}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}$ بدست آمده در نتیجه شرایط کافی در قضیه ۲.۴ برقرار گردیده و ترتیب $\mathbf{Y}\preceq_{st}\mathbf{X}$ حاصل می‌گردد. بالعکس، اگر $\mathbf{Y}\preceq_{lst}\mathbf{X}$ آنگاه به‌صورت کلی می‌توان نتیجه گرفت $\mathbf{Y}\preceq_{st}\mathbf{X}$ [۱۶]. □

در قضیه ۲.۴ ترتیب چندمتغیره معمول، معادل با ترتیب خطی معمول بیان گردید. شرایط لازم و کافی ترتیب معمول همان شرایط لازم و کافی برای ترتیب محدب در قضیه ۴.۳ می‌باشد. براساس این نتیجه، کاهش قابل ملاحظه‌ای در بعد مقایسه چندگانه به مقایسه در بعد واحد ایجاد می‌گردد. به‌ویژه، مقایسه براساس ترتیب خطی-معمول را با انتخاب تنها یک بردار از ضرایب در ترکیب خطی می‌توان انجام داد [۱۶]. بنابراین مقایسه‌ی بردارهای تصادفی (۱.۳) با ترتیب چندمتغیره معمول، معادل با مقایسه‌ی تنها یک ترتیب معمول یک‌متغیره است.

در قضیه زیر، ترتیب‌های خطی از نوع محدب و محدب‌صعودی، معادل با یکی از ترتیب‌های چندمتغیره هسیان و هسیان صعودی بیان شده‌اند.

قضیه ۳.۵. بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در (۱.۳) را در نظر بگیرید.

(i) $\mathbf{Y}\preceq_{lcx}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{Y}\preceq_{cx}\mathbf{X}$.

(ii) $\mathbf{Y}\preceq_{plcx}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{Y}\preceq_{cp}\mathbf{X}$.

(iii) $\mathbf{Y}\preceq_{iplcx}\mathbf{X}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{Y}\preceq_{icp}\mathbf{X}$.

اثبات. (i) اگر $\mathbf{Y}\preceq_{lcx}\mathbf{X}$ آنگاه $\langle \mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle\preceq_{cx}\langle \mathbf{a},\mathbf{X}\rangle$ برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. پس با استفاده از (۳.۳) و لم ۲.۳ شرایط $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}'\rangle = \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}\rangle$، $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}'\rangle = \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}\rangle$ و $\mathbf{a}^\top[\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}]\mathbf{a}\ge 0$ بدست می‌آیند. در نتیجه شرایط کافی ترتیب $\preceq_{cx}$ در قضیه ۴.۳ برقرار گردیده و ترتیب $\mathbf{Y}\preceq_{cx}\mathbf{X}$ حاصل می‌گردد. بالعکس، اگر $\mathbf{Y}\preceq_{cx}\mathbf{X}$، آنگاه به‌صورت کلی داریم $\mathbf{Y}\preceq_{lcx}\mathbf{X}$ [۴۱].

(ii) فرض کنید $\mathbf{Y}\preceq_{plcx}\mathbf{X}$ آنگاه $\langle \mathbf{a},\mathbf{Y}\rangle\preceq_{cx}\langle \mathbf{a},\mathbf{X}\rangle$ برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$. مشابه اثبات مورد قبل، برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$، شرایط $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}'\rangle = \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\xi}\rangle$، $\langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}'\rangle = \langle \mathbf{a},\boldsymbol{\delta}\rangle$ و $\mathbf{a}^\top[\boldsymbol{\Omega}'-\boldsymbol{\Omega}]\mathbf{a}\ge 0$ بدست می‌آیند. در نتیجه شرایط کافی ترتیب $\preceq_{cp}$ در قضیه ۴.۳ برقرار گردیده و ترتیب $\mathbf{Y}\preceq_{cp}\mathbf{X}$ حاصل می‌گردد. بالعکس فرض کنید $\mathbf{Y}\preceq_{cp}\mathbf{X}$ و $f(\mathbf{x})=g(\langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)$، برای $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n_+$، که در آن $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی محدب است. می‌توان نشان داد $\mathbf{H}_f\in\mathcal{C}_{cp}$ یعنی

$f \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}_{cp}}$. بنابراین $E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle)) \le E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{Y}\rangle))$ یعنی $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$.
(iii) قرار دهید $\mathbf{X} \preceq_{iplcx} \mathbf{Y}$ یعنی $\langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle \preceq_{icx} \langle \mathbf{a}, \mathbf{Y}\rangle$ برای $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$. با استفاده از لم ۲.۳ شرایط $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}\rangle \le \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}'\rangle$، $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta}\rangle \le \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\delta}'\rangle$ و $\mathbf{a}^\top[\boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}]\mathbf{a} \ge 0$ بدست می‌آیند. در نتیجه شرایط کافی ترتیب $\preceq_{icp}$ در قضیه ۵.۴ برقرار گردیده و بنابراین $\mathbf{X} \preceq_{icp} \mathbf{Y}$. بالعکس فرض کنید $\mathbf{X} \preceq_{icp} \mathbf{Y}$ و $f(\mathbf{x}) = g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle)$، برای $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+$، که $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی محدب‌صعودی است. بنابراین $f \in \ell_{\mathcal{C}_{cp}}$ و در نتیجه $E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle)) \le E(g(\langle \mathbf{a}, \mathbf{Y}\rangle))$ یعنی $\mathbf{X} \preceq_{iplcx} \mathbf{Y}$. □

اگر $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ هر کدام مقادیر تصادفی (حجم، وزن، تعداد و....) از یک بسته شامل n کالای مختلف باشند و $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)^\top$ قیمت این کالاها باشد، آنگاه ارزش این بسته‌ها به‌ترتیب $\langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{X}\rangle$ و $\langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Y}\rangle$ خواهند بود. به‌دلیل ثابت نبودن قیمت و نوسانات در بازار و قیمت کالاها، منطقی است ارزش این بسته‌ها را با فرض نامشخص بودن قیمت کالاها مقایسه نماییم. بدین ترتیب، مقایسه‌ی ارزش این بسته‌ها بوسیله ترتیب‌های خطی مثبت (با ضرایب مثبت) خواهد بود. همچنین در حوزه اقتصاد، ترتیب‌های محدب از جایگاه مهمی برخوردارند و نوسانات متغیرهای اقتصادی را بطورگسترده‌ای بر اساس ترتیب‌های محدب در نظر می‌گیرند. بر این اساس، مقایسه‌ی مناسب مخاطره ارزش بسته‌ها، ترتیب $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$ و $\mathbf{X} \preceq_{iplcx} \mathbf{Y}$ خوهند بود.

۲.۵ کاربرد در اقتصاد

مقایسه بردارهای تصادفی بر اساس ترتیب سوپرمودولار را می‌توان در فضای فرشه [۱۹] در نظر گرفت. مجموعه $\Re(F_1, \dots, F_n) \equiv \Re_n$ را کلاس فرشه گوییم اگر شامل همه بردارهای تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ باشد که تابع توزیع حاشیه‌ای X_i ، برای $i = 1, \dots, n$، F_i باشد. در ادامه این مقاله فرض کنید که بردارهای تصادفی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در (۱.۳) در فضای $\Re_n$ به‌صورت زیر باشند

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\delta}), \quad \mathbf{Y} \sim \mathcal{SMSN}_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\delta}), \tag{۱.۵}$$

که $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\rho}'$ ماتریس همبستگی می‌باشند. با استفاده از قضیه اسکالار [۴۳] تابع مفصل یکتای $C : [0, 1]^n \to [0, 1]$ موجود است بطوری که

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n); \boldsymbol{\rho}),$$
$$F_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_n) = C(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n); \boldsymbol{\rho}'),$$

که $F_{\mathbf{X}}$ و $F_{\mathbf{Y}}$ تابع توزیع تجمعی بردارهای تصادفی در (۱.۵) و F_i تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای یکسان X_i و Y_i می‌باشند. در ادامه مقایسه‌های تصادفی براساس ترتیب $\rho_{ij} \le \rho'_{ij}$ می‌باشند و به‌راحتی می‌توان نشان داد معادل با $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) \le \mathrm{Corr}(Y_i, Y_j)$ می‌باشند. برهمین اساس، به ماتریس‌های همبستگی $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\rho}'$ ماتریس‌های همبستگی تعمیم‌یافته گوییم.

در ترتیب هماهنگی $(\preceq_{conc})$ ، $\mathbf{Y}$ را هماهنگ‌تر از $\mathbf{X}$ گوییم اگر

$$\Pr(\mathbf{X} \le \mathbf{t}) \le \Pr(\mathbf{Y} \le \mathbf{t}), \quad \Pr(\mathbf{X} \ge \mathbf{t}) \le \Pr(\mathbf{Y} \ge \mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \tag{۲.۵}$$

و آن را با $\mathbf{X} \preceq_{conc} \mathbf{Y}$ نمایش می‌دهیم [۲۶]. ترتیب هماهنگی بردارهای تصادفی (۱.۵) را معادل با یکدیگر و نیز معادل با ترتیب سوپرمودولار می‌باشند که همگی با ترتیب مقادیر همبستگی بین مولفه‌ها معادل‌اند.

قضیه ۴.۵. موارد زیر با هم معادلند:

(i) $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) \le \mathrm{Corr}(Y_i, Y_j)$،

(ii) $\mathbf{X} \preceq_{sm} \mathbf{Y}$،

(iii) $\mathbf{X} \preceq_{conc} \mathbf{Y}$،

(iv) $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$.

اثبات. ترتیب سوپرمودولار قوی‌تر از ترتیب هماهنگی است و نیز ترتیب هماهنگی قوی‌تر از ترتیب همبستگی که قسمت (i) است. بنابراین با استفاده از قضیه ۳,۵ در امیری و همکاران [۵] نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. □

براساس قضیه ۴.۵، مقایسه ساختار وابستگی در خانواده SMSN معادل با مقایسه ضرایب همبستگی می‌باشد. هر اندازه که مولفه‌ها دارای همبستگی دوبه دوی بیشتر (در جهت مثبت) باشند دارای میزان وابستگی بالاتری خواهند بود و بالعکس. بنابراین، همچون خانواده توزیع نرمال چندمتغیره، در خانواده گسترده SMSN با دارا بودن توزیع‌های متعدد با درجات مختلف چولگی و برجستگی نیز ضریب همبستگی ابزار و جایگزینی مناسب برای بررسی ساختار وابستگی می‌باشد.

حال فرض کنید $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ در (۱.۵) مقادیر دو بسته متفاوت شامل n کالای مختلف باشند و $\boldsymbol{\pi}$ قیمت غیر ثابت این کالاها باشد، آنگاه برای مقایسه‌ی مخاطره‌آمیزی و نوسانات ارزش این بسته ها، ترتیب $\mathbf{X} \preceq_{plcx} \mathbf{Y}$ را بکار می‌گیریم. در این صورت بسته‌ای ترجیح داده می‌شود که مخاطره‌آمیزی و نوسانات کمتری داشته باشد یعنی مولفه‌ها دارای مقدارهمبستگی کمتری باشند یا بطور معادل دارای مولفه‌هایی با هماهنگی کمتری باشند.

برخی از خانواده‌های SMSN برای برازش به توزیع بازگشت‌های مالی یا نسبت قیمت به درآمد (بصورت لگاریتمی) دارای کاربرد زیادی می‌باشند [۳]. حال فرض کنید که بردارهای تصادفی (۱.۵) میزان بازگشت یا میزان قیمت به درآمد دو مجموعه n تایی باشند. اگر این مجموعه‌ها دارای وزن‌های مختلف (برحسب تعداد سهم، ارزش هر کدام و...) بصورت $\pi_۱, \ldots, \pi_n$ باشند. آنگاه برای محاسبه رشد نسبی بازگشت یا قیمت به درآمد این مجموعه‌ها، از شاخص پرکاربرد میانگین هندسی می‌توان استفاده نمود. در این حالت $d_۱ = \langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{X}\rangle$ و $d_۲ = \langle \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Y}\rangle$ به ترتیب لگاریتم میانگین هندسی بازگشت یا نسبت قیمت به درآمد مجموعه‌های فوق است. همچنین فرض کنید پارامتر θ لگاریتم رشد نسبی مورد نظر باشد و براساس مشاهدات $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ به ترتیب برآوردگرهای $d_۱$ و $d_۲$ در نظر گرفته شوند و $L(\theta, d)$ هر تابع زیان محدب دلخواه با تابع مخاطره متناظر $R_{d_i}(\theta) = E\left(L(\theta, d_i)\right)$، برای $i = ۱, ۲$، باشد. حال با در نظر گرفتن فرضیات بالا و براساس قضیه ۴.۵، $R_{d_۱}(\theta) \leq R_{d_۲}(\theta)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Corr}(X_i, X_j) \leq \mathrm{Corr}(Y_i, Y_j)$ برای $i, j = ۱, \ldots, n$ و بنابراین مجموعه‌ای که داری همبستگی بیشتری باشد، نوسانات و مخاطره لگاریتم رشد نسبی آن هم بالاتر خواهد بود و بالعکس. در نتیجه، هرچه اعضای مجموعه دارای همبستگی منفی‌تری باشند، رشد نسبی آن دارای نوسانات و مخاطرات کمتری خواهد بود.

کریستوفرسن و همکاران [۱۵] بازگشت هفتگی بازارهای ۱۶ کشور توسعه یافته و ۱۷ کشور در حال توسعه در بازه زمانی سال ۱۹۷۳ تا ۲۰۰۹ را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که همبستگی‌های بازگشت در بین مجموعه کشورهای توسعه یافته و نیز در بین مجموعه کشورهای درحال توسعه در طول زمان دارای روند صعودی معناداری است. آنها به مقاله‌های متعددی اشاره نمودند که به مطالعه روند همبستگی در میزان بازگشت مجموعه‌هایی از بازارهای مالی و بورس پرداخته و همبستگی‌ها دارای روندهای صعودی بوده‌اند. به‌دلیل وجود چولگی و برجستگی در بازگشت‌ها، آنها از توزیع چوله-تی (حالت خاص توزیع SMSN با تابع مقیاس $k(\eta) = \eta^{-\frac{۱}{۲}}$ و η دارای توزیع گاما) برای تحلیل تغییرات الگوها و روندهای همبستگی‌ها در طول زمان استفاده کردند.

فرض کنید $\mathbf{D}_t = (D_{t,۱}, \ldots, D_{t,۱۶})$ و $\mathbf{E}_t = (E_{t,۱}, \ldots, E_{t,۱۷})$ به‌ترتیب بازده مربوط به مجموعه کشورهای توسعه‌یافته و در حال توسعه مورد مطالعه در سال t باشند و ماتریس‌های همبستگی آنها نیز به‌ترتیب $\boldsymbol{\rho}_t = [\rho_{t,ij}]$ و $\boldsymbol{\rho}'_t = [\rho'_{t,ij}]$ باشند. بر اساس اطلاعات فوق،

$$\rho_{t,ij} \leq \rho_{t+h,ij}, \quad \rho'_{t,ij} \leq \rho'_{t+h,ij}, \quad h = ۱, \ldots, \quad t, t+h = ۱۹۷۳, \ldots, ۲۰۰۹.$$

بنابراین از قضیه ۴.۵ نتیجه می‌شود $\mathbf{D}_t \preceq_{sm} \mathbf{D}_{t+h}$ و $\mathbf{E}_t \preceq_{sm} \mathbf{E}_{t+h}$. بنابراین نوسانات رشد نسبی در هر دو مجموعه کشورهای توسعه یافته و درحال توسعه در طول سال‌های مذکور افزایش یافته است. همچنین با توجه به اینکه قرینه توابع دامنه نمونه ((.)R−) و واریانس نمونه ((.)Var−) سوپرمودولار می‌باشند [۲۶]، عبارت‌های زیر بدست می‌آیند

$$E(R(\mathbf{D}_t)) \geq E(R(\mathbf{D}_{t+h})), \quad E(R(\mathbf{E}_t)) \geq E(R(\mathbf{E}_{t+h})),$$
$$E(Var(\mathbf{D}_t)) \geq E(Var(\mathbf{D}_{t+h})), \quad E(Var(\mathbf{E}_t)) \geq E(Var(\mathbf{E}_{t+h})).$$

در نتیجه پراکندگی مورد انتظار بازگشت‌ها در هر دو مجموعه کشورهای توسعه‌یافته و درحال توسعه در طول زمان روند نزولی داشته است.

۳.۵ کاربرد در بیمه

ترتیب تصادفی محدب‌صعودی یک متغیره در علوم بیمه ترتیب زیان‌بس نامیده می‌شود و آن را با $(\preceq_{sl})$ نمایش می‌دهند. اگر S و S' دو ویژگی مخاطره‌آمیز باشند، آنگاه $S \preceq_{sl} S'$ بدین معنی است که مخاطره‌آمیزی S کمتر از S' بوده و بنابراین ترجیح داده می‌شود. حال یک مجموعه شامل n بیمه‌نامه با مبالغ $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top$ در طول دوره معینی مثلا یک ساله در نظر بگیرید. در این صورت کل مطالبات مجموع در طول دوره به‌صورت $S=\sum_{i=1}^n X_i$ محاسبه می‌گردد. فرض کنید $S'=\sum_{i=1}^n Y_i$ مجموعه مطالبات مجموعه دیگری با مقادیر $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)^\top$ باشد.

نوع دیگری از مدل‌های جمعی، در نظر گرفتن مجموعه‌هایی با تعداد تصادفی N عضو می‌باشد. در اینصورت مقدار کل این مجموعه‌ها به ترتیب $S_N=\sum_{i=1}^N X_i$ و $S'_N=\sum_{i=1}^N Y_i$ خواهند بود که مولفه‌ها در هریک مستقل از N می‌باشند و N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نامنفی می‌باشد. در علوم بیمه برای مقایسه‌ی مخاطره‌آمیزی دو مجموعه برحسب ساختار همبستگی آن‌ها به‌صورت گسترده‌ای از ترتیب زیان‌بس استفاده می‌گردد. حال می‌خواهیم ترتیب $\preceq_{sl}$ را در هر دوحالت بالا بدست بیاوریم. بدین منظور، برای هر $N=n$ ، بردارهای تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top$ و $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)^\top$ در (۱.۵) را در نظر می‌گیریم. در قضیه زیر شرایط براساس همبستگی درون مجموعه برای مقایسه تصادفی مقادیر کل، براساس ترتیب زیان‌بس، ارایه می‌گردد.

قضیه ۵.۵. مقادیر $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ و $\bar{\boldsymbol{\rho}}'$ را به ترتیب میانگین مقدار درایه‌های $\boldsymbol{\rho}$ و $\boldsymbol{\rho}'$ در نظر بگیرید. سپس

(i) $S \preceq_{sl} S'$ اگر و تنها اگر $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$،

(ii) $S_N \preceq_{sl} S'_N$ اگر $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$،

(iii) اگر $\rho_{ij}=\rho$ و $\rho'_{ij}=\rho'$ یا $\rho_{ij}=\rho^{|i-j|}$ و $\rho'_{ij}=\rho'^{|i-j|}$، آنگاه $S_N \preceq_{sl} S'_N$ اگر و تنها اگر $\rho \le \rho'$.

اثبات. برای اثبات قسمت (i) به امیری و همکاران [۵] مراجعه گردد.

برای اثبات قسمت (ii) فرض کنید $\bar{\boldsymbol{\rho}} \le \bar{\boldsymbol{\rho}}'$. آنگاه ترتیب $S_N \preceq_{sl} S'_N$ برقرار است اگر و تنها اگر [۳۶]

$$E\left(\max\left\{S_N-t,0\right\}\right) \le E\left(\max\left\{S'_N-t,0\right\}\right), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{۳.۵}$$

با استفاده از رابطه (۳.۳)

$$\begin{aligned} S_N|\{N=n\} &\sim \mathcal{SMSN}_1\left(n\bar{\boldsymbol{\xi}}, n^2\bar{\boldsymbol{\rho}}, n\bar{\boldsymbol{\delta}}\right), \\ S'_N|\{N=n\} &\sim \mathcal{SMSN}_1\left(n\bar{\boldsymbol{\xi}}, n^2\bar{\boldsymbol{\rho}}', n\bar{\boldsymbol{\delta}}\right) \end{aligned}$$

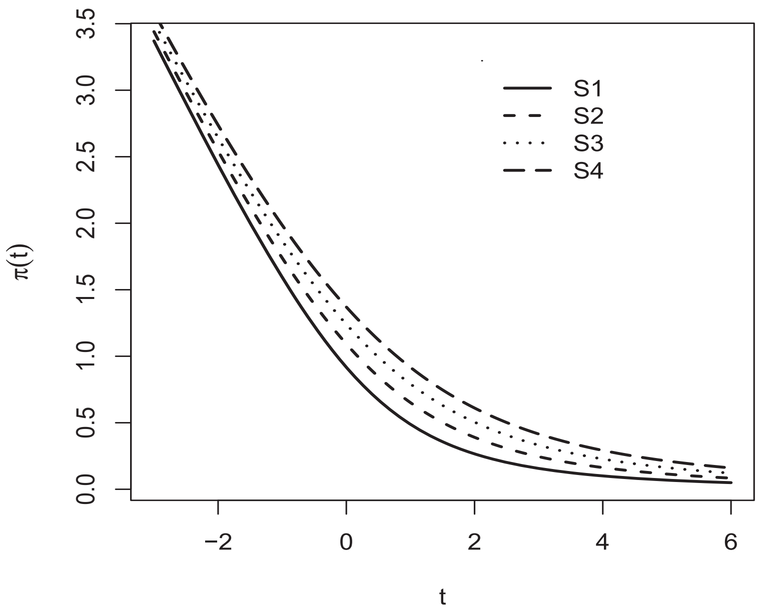
که $\bar{\boldsymbol{\xi}}=\sum_{i=1}^n \xi_i/n$ و $\bar{\boldsymbol{\delta}}=\sum_{i=1}^n \delta_i/n$. سپس با استفاده از (۳.۵) و سپس خاصیت امید ریاضی مکرر و قسمت (i) نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

در قسمت (iii) تنها قسمت ضروری را نشان می‌دهیم. فرض کنید $S_N \preceq_{sl} S'_N$. آنگاه $\rho \le \rho'$ باید برقرار گردد زیرا در غیر این صورت طبق نتیجه قسمت (i)، برای هر n، ترتیب $S_N|\{N=n\} \preceq_{sl} S'_N|\{N=n\}$ برقرار گردیده و

$$E\left(\max\left\{S'_N-t,0\right\}|N=n\right) \le E\left(\max\left\{S_N-t,0\right\}|N=n\right), \quad t\in\mathbb{R},$$

که با توجه به (۱.۲) و استفاده از خاصیت امید ریاضی مکرر منجر به تناقض آشکار $S'_N \preceq_{sl} S_N$ می‌گردد. □

در مثال زیر بسته‌هایی شامل ۳ بیمه نامه با توزیع توام چوله-تی که یک عضو خاص و مهم از خانواده SMSN است در نظر گرفته شده (این توزیع در انتهای بخش ۱.۲ معرفی گردید) و ترتیب زیان‌بس برحسب متوسط مقادیر همبستگی موجود بین مولفه‌ها بدست آمده است.



شکل ۱: منحنی $\pi_i(t)$ برای مثال ۶.۵

مثال ۶.۵. بردار تصادفی $\mathbf{X}_i \in \Re_۳$ ، $i = ۱, \ldots, ۴$ ، را توزیع توام مبالغ ۴ بسته و هر یک شامل ۳ بیمه‌نامه در طول یک دوره یکساله، دارای توزیع چوله-تی سه متغیره با ۳ درجه آزادی، بصورت زیر

$$\mathbf{X}_i \sim \mathcal{ST}_۳(\circ_۳, \boldsymbol{\rho}_i, (-\circ/۲۵, \circ/\circ\circ, \circ/۵\circ)^\top, \nu = ۳)$$

با

$$\boldsymbol{\rho}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & -\circ/۵ & \circ \\ -\circ/۵ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -\circ/۵ & \circ \\ -\circ/۵ & ۱ & \circ/۵ \\ \circ & \circ/۵ & ۱ \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\rho}_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & \circ/۵ & \circ \\ \circ/۵ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & \circ/۲۵ & \circ/۵ \\ \circ/۲۵ & ۱ & \circ/۲۵ \\ \circ/۵ & \circ/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. با استفاده از (۳.۳)، توزیع مجموع مبالغ هر یک از بسته‌های فوق بصورت چوله-تی یک‌متغیره زیر بدست می‌آیند

$$S_i \sim \mathcal{ST}_۱(\circ, i+۱, \circ/۲۵, \nu = ۳), \quad i = ۱, \ldots, ۴.$$

برای بررسی ترتیب زیان‌بس مجموع‌های فوق، براساس (۳.۵)، تبدیل زیان‌بس آنها بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\pi_i(t) = \mathrm{E}(\max\{S_i - t, \circ\}) = \int_t^{+\infty} \Pr(S_i \geq u)\, du$$

که $\Pr(S_i \geq u)$ تابع بقای چوله-تی یک‌متغیره بوده و می‌توان آنرا با استفاده از بسته sn در نرم افزار R محاسبه نمود. جهت مقایسه آشکار توابع $\pi_i(t)$ با یکدیگر، نمودار آن برای $t \in [-۳, ۶]$ در شکل ۱ ترسیم شده است. متوسط مقادیر همبستگی درون بسته‌هاي فوق به ترتیب عبارتند از ۰/۲۳ ، ۰/۳۴ ، ۰/۴۵ و ۰/۵۶ . همچنین باتوجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که $\pi_۱ \leq \pi_۲ \leq \pi_۳ \leq \pi_۴$. بنابراین $S_۱ \preceq_{sl} S_۲ \preceq_{sl} S_۳ \preceq_{sl} S_۴$ یعنی اینکه بسته‌ها هرچه متوسط مقادیر همبستگی کمتری داشته باشند در ترتیب زیان‌بس کوچکتر بوده و مخاطره کمتری خواهند داشت. □

با توجه به نتایجی که در بالا ذکر شد، سطح مخاطره‌آمیزی کل یک مجموعه با افزایش مقادیر همبستگی اعضای مجموعه یا به طور معادل با افزایش میزان هماهنگی مجموعه بیشتر می‌شود و بالعکس. همچنین ترتیب زیان‌بس برای

یک مجموعه مخاطره دو مولفه‌ای یا یک مجموعه مخاطره با مولفه‌هایی داری مقادیر همبستگی یکسان با هم به‌صورت معادل با ترتیب هماهنگی بین مولفه‌ها قابل بیان است. دن و جیوارتز [۱۸] نشان دادند ترتیب زیان‌بس برای دو مولفه با مقادیر مثبت با ترتیب مقادیر همبستگی در مجموعه‌ها معادل است. لاندسمان و زانکاس [۲۷] نتیجه مشابهی در حالت دومتغیره برای توزیع‌های بیضوی بدست آوردند. نتیجه ارائه شده در قضیه ۵.۵ از حیث ابعاد مجموعه و چولگی یا چولگی توام با برجستگی در مولفه‌ها در طیف وسیع‌تری قابل کاربرد است.

۴.۵ کاربرد در قابلیت اعتماد

سیستمی دارای n مولفه با طول عمر $T_1, \dots, T_n$ و آماره‌های ترتیبی متناظر آنها را بصورت $T_{(1)} \leq \dots \leq T_{(n)}$ در نظر بگیرید. در صورتی که سیستم به‌صورت سری باشد، طول عمر آن $T_{(1)}$ و در صورتی که به‌صورت موازی باشد، طول عمر آن $T_{(n)}$ خواهد بود. نویسندگان متعددی مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های مستقل و نیز مولفه‌های همبسته براساس مفصل‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای نمونه به قنبری و همکاران [۲] ، برمال‌زن و همکاران [۱] و امیری و همکاران [۴] مراجعه نمایید.

در این قسمت، با فرض اینکه T_i ها دارای توزیع LSMSN و همبسته باشند، به بررسی و مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌های سری و موازی بر اساس همبستگی طول عمر مولفه‌های سیستم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم بردارهای تصادفی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}'$ بردارهای طول عمر دو سیستم دارای n مولفه همبسته بصورت زیر باشند

$$\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)^\top, \qquad \mathbf{T}' = (T'_1, \dots, T'_n)^\top, \tag{۴.۵}$$

که $T_i = \exp(X_i)$ و $T'_i = \exp(Y_i)$، برای $i = 1, \dots, n$، و X_i و Y_i مولفه‌های بردارهای تصادفی در (۱.۵) می‌باشند.

در قضیه زیر، طول عمر دو سیستم سری و نیز موازی برحسب میزان همبستگی بین مولفه‌هایشان براساس ترتیب تصادفی معمول مقایسه شده‌اند. براین اساس، در دو سیستم سری، آنکه دارای مولفه‌های با همبستگی بیشتر (در جهت مثبت) باشد بصورت تصادفی طول عمر بیشتری خواهد داشت. اما برای دو سیستم موازی، آنکه دارای مولفه‌های با همبستگی کمتر (منفی‌تر) باشد بصورت تصادفی طول عمر بیشتری خواهد داشت.

قضیه ۷.۵. فرض کنید بردارهای تصادفی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{T}'$ در (۴.۵) طول عمر دو سیستم با n مولفه همبسته بهم باشند. اگر $\mathrm{Corr}(T_i, T_j) \leq \mathrm{Corr}(T'_i, T'_j)$، بازای $i \neq j$، $i, j = 1, \dots, n$، آنگاه $T_{(1)} \preceq_{st} T'_{(1)}$ و $T'_{(n)} \preceq_{st} T_{(n)}$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\mathrm{Corr}(T_i, T_j) \leq \mathrm{Corr}(T'_i, T'_j)$. در نتیجه ترتیب $\mathbf{T} \preceq_{sm} \mathbf{T}'$ برقرار می‌گردد [۵]. همچنین توابع نشانگر $f_1(\mathbf{x}) = 1_{\{x_{(1)} \geq t\}}$ و $f_2(\mathbf{x}) = 1_{\{x_{(n)} \leq t\}}$، برای هر $t \in \mathbb{R}$، تابعی سوپرمودولار می‌باشند [۳۰] و بنابراین رابطه (۴.۲) برای توابع فوق برقرار بوده و نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد. □

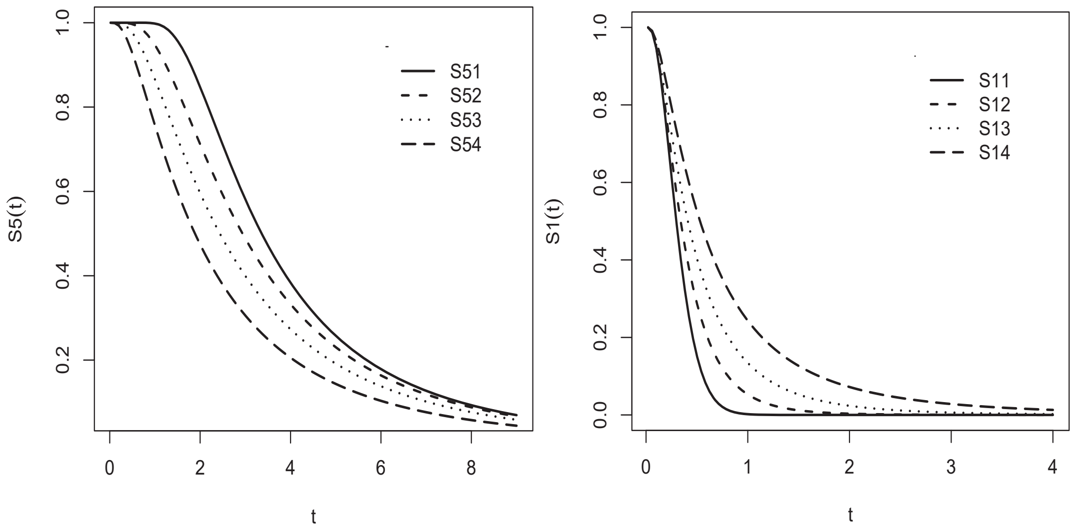
براساس قضیه ۷.۵، در یک سیستم سری، با افزایش همبستگی طول عمر مولفه‌ها در جهت مثبت، طول عمر سیستم بصورت تصادفی نیز افزایش می‌یابد. اما در یک سیستم موازی با کاهش مقدار همبستگی (شدت همبستگی منفی‌تر)، طول عمر سیستم بصورت تصادفی افزایش می‌یابد. به منظور تشریح نتیجه فوق، با ذکر مثالی به بررسی نقش همبستگی بین طول عمر مولفه‌های سیستم در ترتیب تصادفی طول عمر آن‌ها می‌پردازیم. بدین منظور، سیستمی شامل ۵ مولفه همبسته بهم با طول عمر لگ‌نرمال (حالت خاص LSMSN با $K(\eta) = 1$ و $\boldsymbol{\delta} = 0$) را در نظر می‌گیریم.

مثال ۸.۵. فرض کنید $\boldsymbol{T}_i = (T_{i1}, \dots, T_{i5})^\top \in \Re_5$، $i = 1, \dots, 4$، بردارهای تصادفی طول عمر مولفه‌های ۴ سیستم باشند که هریک دارای مولفه‌هایی با توزیع طول عمر توام لگ‌نرمال پنج متغیره با مقادیر همبستگی یکسان بصورت زیر می‌باشند

$$\mathbf{T}_i \sim \mathcal{LN}_5\left(0_5, \boldsymbol{\rho}_i\right), \qquad \boldsymbol{\rho}_i = \rho_i \mathbf{I}_5 + (1 - \rho_i) 1_5 1_5^\top,$$

که مقادیر ρ_i ، $i = 1, \dots, 4$، به ترتیب عبارتند از ۰/۲− ، ۰/۱ ، ۰/۴ و ۰/۷. برای سیستم‌های سری و سیستم‌های موازی فوق، طول عمر آنها به ترتیب $T_{i(1)} = \min\{\mathbf{T}_i\}$ و $T_{i(5)} = \max\{\mathbf{T}_i\}$ می‌باشند و تابع بقای آنها عبارتند از

$$S_{1i}(t) = \Pr(T_{i(1)} \geq t) = \Phi_5\left(-\log(t) 1_5, \boldsymbol{\rho}_i\right),$$
$$S_{5i}(t) = \Pr(T_{i(5)} \geq t) = 1 - \Phi_5\left(\log(t) 1_5, \boldsymbol{\rho}_i\right).$$



شکل ۲: نمودار توابع بقا سیستم‌های طول عمر مثال ۸.۵ برای سیستم سری (سمت راست) و سیستم موازی (سمت چپ) با ۵ مولف همبسته از توزیع لگ‌نرمال

برای مقایسه طول عمر سیستم‌های فوق برحسب مقدار همبستگی بین مولفه‌هایشان، توابع بقای فوق با استفاده از تابع توزیع نرمال چندمتغیره از طریق بسته mnormt در نرم افزار R محاسبه گردیده و نمودارهای آن در شکل ۲ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که $S_{۱۱} \leq S_{۱۲} \leq S_{۱۳} \leq S_{۱۴}$ و $S_{۵۱} \geq S_{۵۲} \geq S_{۵۳} \geq S_{۵۴}$. بنابراین

$$T_{۱(۱)} \preceq_{st} T_{۲(۱)} \preceq_{st} T_{۳(۱)} \preceq_{st} T_{۴(۱)},$$
$$T_{۴(۵)} \preceq_{st} T_{۳(۵)} \preceq_{st} T_{۲(۵)} \preceq_{st} T_{۱(۵)}.$$

با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که در حالت سری، سیستم با مولفه‌های همبسته بیشتر (در جهت مثبت) بصورت تصادفی طول عمر بیشتری خواهد داشت اما در مورد سیستم‌های موازی بالعکس آنکه همبستگی کمتر(در جهت منفی) داشته باشد بصورت تصادفی طول عمر بیشتری خواهد داشت. □

در مثال‌های ۶.۵ و ۸.۵ توزیع‌های چوله–تی و لگ‌نرمال به عنوان حالت‌های خاص SMSN و LSMSN در نظر گرفته شدند. توجه کنید که این مثال‌ها را می‌توان به راحتی با انواع مختلفی دیگری از اعضای این خانواده گسترده نیز در نظر گرفت و صحت نتایج را براساس آنها ارزیابی نمود.

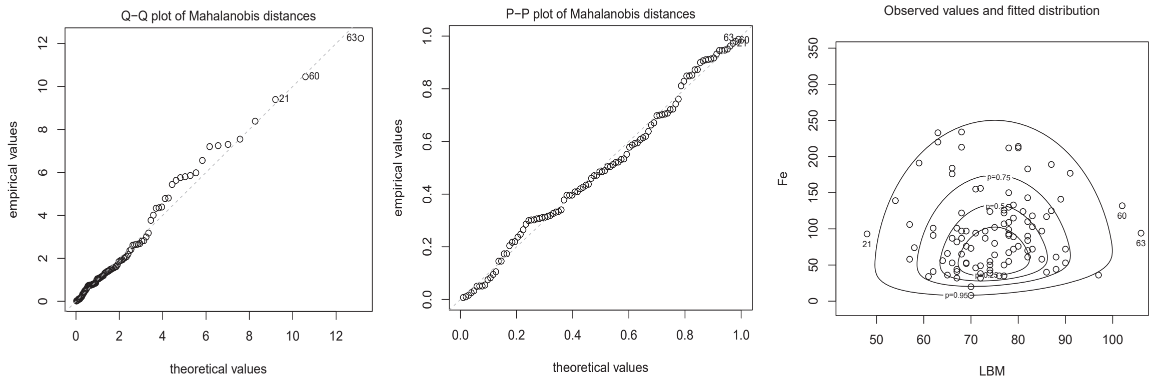
۵.۵ مثال با داده واقعی

در این قسمت مجموعه داده‌های انستیتو ورزش استرالیا را در نظر می‌گیریم. این مجموعه داده شامل متغیرهای مختلف از ویژگی جسمانی ۱۰۲ ورزشکار مرد و ۱۰۰ ورزشکار زن استرالیایی جمع آوری شده است و بطورگسترده‌ای در تحلیل داده‌ها با استفاده از توزیع‌های نامتقارن به ویژه چوله–نرمال، چوله–تی و.... بکارگرفته شده‌اند. این مجموعه داده ها در بسته نرم افزاری ais از نرم افزار R موجود است. در این قسمت توده بدون چربی بدن (LBM) و فریتین پلاسما (Fe) ورزشکاران را به ترتیب در دو گروه مردان با متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ و درگروه زنان با $Y_۱$ و $Y_۲$ در نظر می‌گیریم.
مقادیر ضریب چولگی و برجستگی فیشر داده‌ها در جدول ۱ ارایه شده است که نشان می‌دهد داده‌های مربوطه از چولگی و نیز برجستگی قابل ملاحظه‌ای برخوردارند. بدین جهت، یکی از توزیع‌های خانواده SMSN برای برازش به این داده‌ها می‌تواند مناسب باشد.
با در نظرگرفتن بردارهای تصادفی دو بعدی $\mathbf{X} = (X_۱, X_۲)^\top$ و $\mathbf{Y} = (Y_۱, Y_۲)^\top$ و به روش ماکزیمم درستنمایی، توزیع چوله–تی دومتغیره بصورت زیر به داده‌ها برازش شده است:

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{ST}_۲(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\nu} = ۱۴), \quad \mathbf{Y} \sim \mathcal{ST}_۲(\hat{\boldsymbol{\xi}}', \hat{\boldsymbol{\Omega}}', \hat{\boldsymbol{\delta}}', \hat{\nu} = ۱۴), \qquad (۵.۵)$$

جدول ۱: مقادیر چولگی و برجستگی

جنسیت	متغیر	چولگی	برجستگی
مرد	LBM	۰/۲۷	۰/۵۵
	Fe	۰/۸۶	۰/۸
زن	LBM	−۰/۳	۰/۳۸
	Fe	۱/۳۲	۲/۴۶



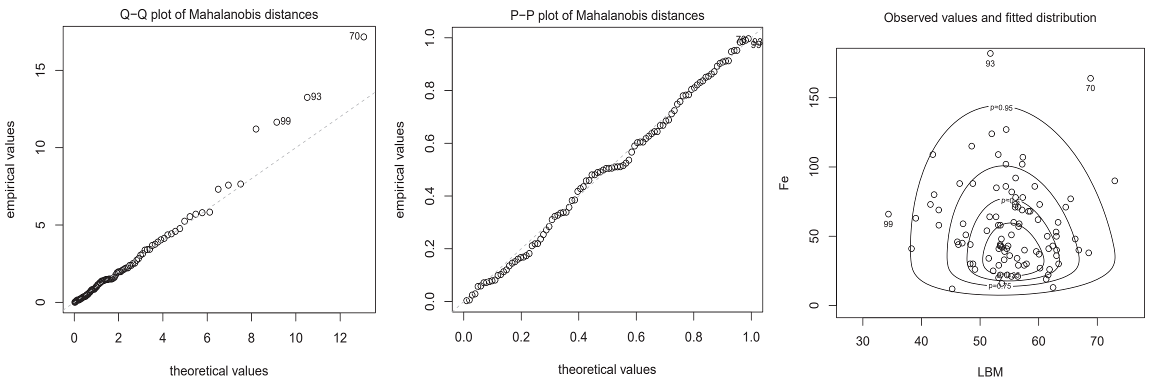
شکل ۳: نمودار (سمت چپ) پراکندگی و سطوح کانتور، (میانی)احتمال-احتمال و (سمت راست) چندك-چندك برآورد شده برای LBM و Fe ورزشکاران مرد.

که برآوردهای فوق عبارتند از

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= (\text{۷۴/۹۶۳۲۱}, \text{۳۱/۴۷۴۶۴})^\top, & \hat{\xi}' &= (\text{۵۶/۰۴۶۵}, \text{۱۹/۳۲۷۶})^\top, \\ \hat{\delta} &= (-\text{۰/۴۷۱۵۵۱۴}, \text{۷۷/۲۵۲۲۳۴۶})^\top, & \hat{\delta}' &= (-\text{۱/۲۶۰۷۳۷}, \text{۴۴/۲۶۶۶۱۸})^\top, \\ \hat{\Omega} &= \begin{bmatrix} \text{۸۲/۹۶۰۲۲۶۷} & \text{۱/۱۵۴۴۲۲} \\ \text{۱/۱۵۴۴۲۲} & \text{۶۱۱۲/۴۹۸۶۶۳} \end{bmatrix}, & \hat{\Omega}' &= \begin{bmatrix} \text{۴۱/۱۸۸۱۵} & -\text{۴۸/۷۸۱۲۲} \\ -\text{۴۸/۷۸۱۲۲} & \text{۱۹۹۷/۳۵۹۷۳} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۶.۵}$$

نمودار پراکنش داده‌ها با سطوح کانتور تابع چگالی احتمال توام، نمودار احتمال-احتمال (P-P) و نیز نمودار چندك-چندك (Q-Q) توزیع برازش شده به داده‌ها برای ورزشکاران مرد و نیز ورزشکاران زن به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است که مناسب بودن توزیع توام برازش داده شده به داده‌های هر دو گروه را نشان می‌دهند.

با استفاده از برآوردهای بدست آمده در (۶.۵) ، مشاهده می‌شود که $\hat{\xi} \geq \hat{\xi}'$، $\hat{\delta} \geq \hat{\delta}'$. همچنین $\hat{\Omega} - \hat{\Omega}'$ دارای



شکل ۴: نمودار (سمت چپ)پراکنش و سطوح کانتور، (میانی)احتمال-احتمال و (سمت راست) چندك-چندك برآورد شده برای LBM و Fe ورزشکاران زن.

درایه‌های نامنفی است و مقادیر ویژه آن عبارتند از ۴۱۱۵/۷۵۱۰۰ و ۴۱/۱۶۰۰۱. در نتیجه $\hat{\Omega} - \hat{\Omega}'$ هم‌مثبت و نیز معین‌مثبت است.

بنابراین، با استفاده از قسمت (i) از قضیه ۳.۴ ترتیب محدب-صعودی $\mathbf{X} \succeq_{icx} \mathbf{Y}$ برقرار است و به عنوان نتیجه‌ای از برقراری این ترتیب تصادفی، می‌توانیم بردار میانگین دو گروه از ورزشکاران مرد و زن را مقایسه نماییم. چون ترتیب تصادفی محدب-صعودی برقرار است لذا می توان نتیجه گرفت که $\mathrm{E}(\mathbf{X}) \geq \mathrm{E}(\mathbf{Y})$، یعنی بردار میانگین برای ورزشکاران مرد در مقایسه با ورزشکاران زن بیشتر بوده است. بنابراین بطور همزمان میانگین هر دو شاخص در مردان بیشتر از زنان بوده است. بررسی چنین فرضیه‌ای براساس روش‌های مرسوم در تحلیل چندمتغیره، بدلیل وجود چولگی و برجستگی قابل ملاحظه در داده‌ها و نیز یکسان نبودن ماتریس واریانس گروه‌ها، با چالش‌های جدی مواجه است.

همچنین با در نظر گرفتن برآوردهای بدست آمده در (۶.۵) و با استفاده از قضیه ۵.۴ ترتیب کاملاً مثبت صعودی $\mathbf{X} \succeq_{icp} \mathbf{Y}$ برقرار می‌گردد. بنابراین از قسمت (iii) از قضیه ۳.۵ می‌توان نتیجه گرفت $\mathbf{X} \succeq_{iplcx} \mathbf{Y}$ یعنی ترتیب محدب-صعودی $\beta_۱ X_۱ + \beta_۲ X_۲ \succeq_{icx} \beta_۱ Y_۱ + \beta_۲ Y_۲$ برای هر $\beta_۱$ و $\beta_۲$ نامنفی برقرار است. براساس این نتیجه هر ترکیب وزنی از شاخص‌های ورزشکاران مرد را درنظر بگیریم، به مفهوم ترتیب محدب صعودی، مقادیر بزرگتری را نسبت به ترکیب مشابه براساس شاخص‌های گروه زنان خواهد داشت و در نتیجه میانگین آن نیز بیشتر خواهد بود.

حال مقایسه این دو شاخص در دو گروه مرد و زن را براساس مقادیر استاندارد شده آنها در نظر می‌گیریم. بدین منظور متغیرهای استاندارد شده $\mathbf{Z} = (Z_۱, Z_۲)^\top$ و $\mathbf{Z}' = (Z'_۱, Z'_۲)^\top$ بصورت $Z_i = (X_i - \xi_i)/\sqrt{\omega_{ii}}$ و $Z'_i = (Y_i - \xi'_i)/\sqrt{\omega'_{ii}}$ ، $i = ۱, ۲$، تعریف می‌شوند. براساس برآوردهای بدست آمده در (۶.۵) و نیز (۳.۳)، توزیع توام برای مقادیر استاندارد شده عبارتند از

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{ST}_۲(۰, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\delta}}_۰, \hat{\nu} = ۱۴), \quad \mathbf{Z}' \sim \mathcal{ST}_۲(۰, \hat{\boldsymbol{\rho}}', \hat{\boldsymbol{\delta}}'_۰, \hat{\nu} = ۱۴),$$

که برآوردهای فوق عبارتند از

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_۰ = (-۰/۰۵۲, ۰/۹۹)^\top, \qquad \hat{\boldsymbol{\delta}}_۰{}' = (-۰/۱۹۶, ۰/۹۹)^\top,$$
$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۰۰۲ \\ ۰/۰۰۲ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}}' = \begin{bmatrix} ۱ & -۰/۱۷ \\ -۰/۱۷ & ۱ \end{bmatrix}.$$

حال با استفاده از قضیه ۴.۴ ترتیب سوپرمودولارصعودی برای مقادیر استاندارشده بصورت $\mathbf{Z} \succeq_{ism} \mathbf{Z}'$ بدست می‌آید. از ترتیب سوپرمودولارصعودی، نیز ترتیب تصادفی معمول بین مولفه‌های دوبردار نتیجه می‌شود، یعنی $Z_i \succeq_{st} Z'_i$، $i = ۱, ۲$. بنابراین مقادیر استاندارد شده LBM و نیز Fe در گروه ورزشکاران زن بصورت تصادفی کمتر از ورزشکاران مرد است. در نتیجه میانگین استاندارد شده هر یک از این شاخص‌ها در ورزشکاران زن کمتر از ورزشکاران مرد بوده است.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، در مورد مقایسه‌ی تصادفی بردارهای تصادفی در خانواده توزیع‌های SMSN بر اساس ترتیب هسیان و هسیان صعودی نتایج مختلفی بدست آمد. شرایط لازم و کافی برای مقایسه‌ی بردارهای تصادفی از این خانواده بوسیله ترتیب‌های متعددی مورد بررسی قرار گرفتند.

همچنین ترتیب‌های خطی مختلفی مورد بحث گرفته و هریک معادل با یکی از ترتیب‌های هسیان یا هسیان صعودی بیان گردیدند. این ترتیب‌های خطی در خانواده SMSN به عنوان ترتیب هسیان یا هسیان صعودی می‌باشند که در حالت کلی چنین نیست. با استفاده از این نتیجه، ترتیب چند متغیره خطی حاصل را می‌توان با ترتیب خطی معادل آن در نظر گرفت که این کار کاهش بعد قابل ملاحظه‌ای در مقایسه‌ی چندمتغیره معادل خواهد داشت.

نتایج مختلفی در مورد ترتیب سوپرمودولار بحث گردید و براساس آن مقایسه‌های مختلفی بر حسب مقادیر همبستگی انجام شد. ترتیب زیان‌بس دو مجموعه با مولفه‌های SMSN معادل با ترتیب متوسط مقادیر همبستگی مولفه‌ها ارائه شدند. همچنین برای مقایسه‌ی مخاطره رشد نسبی بازگشت یا نسبت قیمت به درآمد در مجموعه‌هایی که دارای توزیعی از خانواده SMSN باشند، بر حسب ساختار همبستگی، ترتیب $\preceq_{plcx}$ معادل با ترتیب مقادیر همبستگی و ترتیب هماهنگی بیان گردیدند. همچنین، ترتیب تصادفی طول عمر دو سیستم سری و موازی برحسب مقدار همبستگی مولفه‌های آنها مورد

بررسی قرار گرفتند. با استفاده از داده‌های انستیتو ورزش استرالیا برخی از نتایج مقاله تفسیر گردید. نتایج بدست آمده در طیف گسترده‌ای از خانواده توزیع‌هایی با درجات مختلفی از چولگی و برجستگی ارائه شده است. در این زمینه، بررسی شرایط جهت مقایسه‌ی تصادفی در خانواده‌های دیگری نظیر خانواده‌های آمیخته مقیاس-شکل چوله-نرمال و چوله-بیضوی نیز می‌تواند جالب توجه باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله ضمن تشکر از اعضای محترم هیئت تحریریه مجله، از پیشنهادها و نظرات ارزشمند داوران و ویراستار محترم مقاله که موجب ارتقاء سطح آن گردید کمال تشکر و قدردانی را دارند.

فهرست منابع

[۱] ق. برمال‌زن، س.م. آیت، ع. اکرمی. مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های لوماکس با مفصل ارشمیدسی ، مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، دوره ۱۰، شماره ۱ (۱۳۹۹) ۱۹۵-۱۷۲.

[۲] ف. قنبری، ق. برمال‌زن، س.ر. هاشمی. مقایسه تصادفی سیستم های (n-k+1) از n با مولفه های مستقل و ناهمگن لگ لجستیک ، مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی (۱۳۹۹) doi:10.22055/JAMM.2020.31100.1760 .

[3] Adcock, C., Eling, M., Loperfido, N., Skewed distributions in finance and actuarial science: a review. The European Journal of Finance **21** (2015) 1253-1281.

[4] Amiri, M., Balakrishnan, N., Jamalizadeh, A., Stochastic ordering of lifetimes of parallel and series systems comprising heterogeneous dependent components with generalized Birnbaum-Saunders distributions. Probability in the Engineering and Informational Sciences (2020) https://doi.org/10.1017/S0269964820000418.

[5] Amiri, M., Izadkhah, S., Jamalizadeh, A., Linear orderings of the scale mixtures of the multivariate skew-normal distribution. Journal of Multivariate Analysis **179** (2020) https://doi.org/10.1016/j.jmva.2020.104647.

[6] Aryal, G., Rao, A. N. V., Reliability model using truncated skew-Laplace distribution. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **63** (2005) 639-646.

[7] Arlotto, A., Scarsini, M., Hessian orders and multinormal distributions. Journal of Multivariate Analysis **100** (2009) 2324-2330.

[8] Azzalini, A, A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian Journal of Statistics **12** (1985) 171-178.

[9] Azzalini, A., Capitanio, A., Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution. Journal of the Royal Statistical Society: Series B **61** (1999) 579-602.

[10] Azzalini, A., Capitanio, A., Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. Journal of the Royal Statistical Society, Series B **65** (2003) 367–389.

[11] Azzalini, A., Regoli, G., Some properties of skew-symmetric distributions. Annals of the Institute of Statistical Mathematics **64** (2012) 857-879.

[12] Bäuerle, N, Inequalities for stochastic models via supermodular orderings. Stochastic Models **13** (1997) 181-201.

[13] Behboodian, J., Balakrishnan, N., Jamalizadeh, A., A new class of skew-Cauchy distributions. Statistics and Probability Letters **76** (2006) 1488–1493.

[14] Branco, M.D., Dey, D.k., A general class of multivariate skew-elliptical distributions. Journal of Multivariate Analysis **79** (2001) 99–113.

[15] Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K., Langlois, H., Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach. The Review of Financial Studies **25** (2012) 3711–3751.

[16] Davidov, O., Peddada, S., The linear stochastic order and directed inference for multivariate ordered distributions. The Annals of Statistics **41** (2013) 1-40.

[17] Denuit, M., Müller, A., Smooth generators of integral stochastic orders. The Annals of Applied Probability **12** (2002) 1174-1184.

[18] Dhaene, J., Goovaerts, M., Dependency of risks and stop-loss order. ASTIN Bulletin, **26** (1996) 201-212.

[19] Fréchet, M., Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés. Annales de l'Université de Lyon, Science **4** (1951) 13–84.

[20] Genton, M.G. Skew-elliptical Distributions and Their Applications: A Journey Beyond Normality, Edited volume, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC,2004.

[21] Gupta, R.C., and Gupta, R.D., Generalized skew-normal model. Test **13** (2004) 501-524.

[22] Gupta, R. C., Brown, N., Reliability studies of the skew-normal distribution and its application to a strength-stress model. Communications in Statistics-Theory and Methods **30** (2001) 2427-2445.

[23] Hürliman, W, On likelihood ratio and stochastic order for skew-symmetric distributions with a common kernel. Int. J. Contemp. Math. Sciences **8** (2013) 957-967.

[24] Jamali, D., Amiri, M., Jamalizadeh, A., Comparison of the multivariate skew-normal random vectors based on the integral stochastic ordering. Communications in Statistics-Theory and Methods (2020) https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1740934.

[25] Jamali, D., Amiri, M., Jamalizadeh, A., & Balakrishnan, N., Integral stochastic ordering of the multivariate normal mean-variance and the skew-normal scale-shape mixture models. Statistics, Optimization & Information Computing **8**(1)(2020) 1-16.

[26] Joe, H, Multivariate concordance. Journal of Multivariate Analysis **35** (1990) 12-30.

[27] Landsman, Z., Tsanakas, A., Stochastic ordering of bivariate elliptical distributions. tatistics and Probability Letters **76**(2006) 488-494.

[28] Meester, L.E., Shanthikumar, J.G., Regularity of stochastic processes: a theory based on directional convexity. Probability in the Engineering and Informational Sciences **7** (1993) 343–360.

[29] Mehrali, Y., Asadi, M., Hamedani, G., Recurrence relations and reliability measures in slash and skew-slash distributions. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **51** (2014) 243-270.

[30] Meyer, M., Strulovici, B., Beyond Correlation, Measuring Interdependence through Complementarities. University of Oxford, England (2015).

[31] Mosler, K, Characterization of some stochastic orderings in multinormal and elliptic distributions, Operations research. Proceeding of the 12-th Annual Meeting in Mannheim **1983** (1984) 520-527.

[32] Motzkin, T.S, Copositive quadratic forms. National Bureau of Standards Report **1952** (1818) 11–22.

[33] Müller, A, Stochastic orders generated by integrals: a unified study. Advances in Applied Probability **29** (1997a) 414-428.

[34] Müller, A, Stop-loss order for portfolios of dependent risks. Insurance: Mathematics and Economics **21** (1997b) 219–223.

[35] Müller, A, Stochastic ordering of multivariate normal distributions. Annals of the Institute of Statistical Mathematics **53** (2001) 567-575.

[36] Müller, A., Stoyan, D. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks, Vol. 389, New York, Wiley, 2002.

[37] Nadarajah, S., Reliability for Laplace distributions. Mathematical Problems in Engineering **2** (2004) 169-183.

[38] Nadeb, H., Torabi, H., dolati, A., Stochastic comparisons of the largest claim amounts from two sets of interdependent heterogeneous portfolios. Mathematical Inequalities & Applications **23** (2020), 35–56.

[39] Pan, X., Qiu, G., Hu, T., Stochastic orderings for elliptical random vectors. Journal of Multivariate Analysis **148** (2016) 83-88.

[40] Sampson, A.R., Whitaker, L.R., Estimation of multivariate distributions under stochastic ordering. Journal of the American Statistical Association **84** (1989) 541–548.

[41] Scarsini, M, Multivariate convex orderings, dependence, and stochastic equality. Journal of Applied Probability**35** (1998) 93-103.

[42] Shaked, M. Shanthikumar, J.G., Stochastic Orders, New York, Springer, 2007.

[43] Sklar, M, Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris **8** (1959) 229–231.

[44] Wang, J., Genton, M.G., The multivariate skew-slash distribution. Journal of Statistical Planning and Inference **136** (2006) 209-220.

Stochastic comparisons in the scale mixture of the multivariate skew-normal family of distributions based on Hessian ordering with some applications

Mehdi Amiri[1] [†] **, Abbas Eftekharian** [1] **, Roohollah Roozegar**[2]

(1) Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, University of Hormozgan, Bandarabbas, Iran.
(2) Department of Mathematics, Faculty of Science, Yasuj University, Yasuj, Iran.

Received: 2020/10/15 Accepted: 2021/4/27

Communicated by: Mohammad Reza Zadkarami

Abstract: In this paper, we compare the random vectors from the scale-mixture of multivariate skew-normal distributions, based on Hessian orderings. The necessary and sufficient conditions for this type of ordering are studied and by considering some convex cones, the results are expressed for some important cases. In the following, the increasing Hessian ordering and necessary and sufficient conditions for some important cases are investigated. Also, the linear orderings, based on usual and convex orderings, have been discussed and it has been shown that these linear orderings in the family of multivariate scale mixture of skew-normal distributions, are of the Hessian order type. The supermodular and concordance orderings, as the important tools of dependence ordering, are obtained as equivalent to the order of correlations and using these results, the order of risk or oscillations of different portfolios in economics is explained as the order of their correlations. In the insurance context, the order of risk of aggregate claims in different portfolios is obtained as equivalent to the order of average of correlations within the portfolios. Also, in the reliability context, the order of lifetimes of parallel and series systems can be expressed in terms of correlations of system components.

Keywords: Hessian orders, Convex cone, Correlation order, Stop-loss order, Parallel system, Series system.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 62E10.

---

† **Corresponding author:** m.amiri@hormozgan.ac.ir