مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۲، ص ۳۵۵-۳۶۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2021.36045.1887

# بررسی ویژگی‌هایی از عملگرهای امید شرطی وزن‌دار

امیر علی‌یان [۱] [×]، یوسف استارمی [۲]، علی عبادیان [۳]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی: ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۹/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۷
دبیر مسئول: امیرحسین صنعت پور

چکیده: در این مقاله، ما با استفاده از روش‌های کارلسون، نرم اساسی عملگرهای امید شرطی وزن‌دار را در فضاهای برگمن تخمین می‌زنیم. به‌عنوان یک نتیجه، ما برای فشردگی این عملگرها یک شرط هم ارزی بدست می‌آوریم. نتایج ما، نتایج مشابهی را که برای عملگرهای ضربی در فضاهای برگمن حاصل‌شده است، گسترش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: اندازه کارلسون شرطی، فضای برگمن، امید شرطی، نرم اساسی.

رده‌بندی ریاضی: 32A36, 47A30, 47L05, 30H20, 30L05

## ۱ مقدمه

برای اولین‌بار کسی که در سال ۱۹۹۳، نظریه احتمال را به‌عنوان شاخه‌ای از نظریه اعداد مطرح کرد کولموگروف، ریاضی‌دان روسی بود. یک نقطه عطف در این مسیر، سخنرانی معروف هیلبرت در پاریس با موضوع مسائل حل‌نشده در ریاضیات بود که وی درخواست یک بررسی نظام‌مند در مورد نظریه احتمال را داد. به اعتقاد هیلبرت فهم کامل نظریه‌های خاص یک علم برای بحث موفقیت‌آمیز مبانی آن، ضروری است. متغیرهای تصادفی تنها به‌عنوان توابع اندازه‌پذیر مرتب‌سازی نمی‌شوند؛ بلکه به‌عنوان عملگرهای روی یک فضای هیلبرت نیز در نظر گرفته می‌شوند. این‌چنین تئوری، توسط فون نیومان نیز مطرح شد که به‌تدریج گسترش یافت. فضاهای نمونه زیادی ناشمارایند که بدون استفاده از ریاضیات پیشرفته، پاسخ‌دادن به بعضی از سؤالات آنها ناممکن است. یکی از راهکارها، محدودکردن خود به مجموعه‌های بنام بورل است. اولین کسی که از مفاهیم متغیرهای تصادفی و امیدهای ریاضی به‌طور کامل استفاده نمود، چبیشف بود. مفهوم امید شرطی که در اصل در نظریه احتمال مطالعه می‌شود یکی از ابزارهای مهمی است که در بررسی رده‌ای از عملگرها مورداستفاده قرار می‌گیرد. نظریه آنالیز تابعی یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که یکی از زیرشاخه مهم آن نظریه عملگرها است. یکی از این عملگرها، عملگر ترکیبی وزن‌دار روی فضای توابع تحلیلی مانند فضای برگمن است. از بین ویژگی‌های عملگرها، کران‌داری، نرم اساسی و خصوصاً فشردگی به‌علت کاربردی که در حل معادلات دیفرانسیل دارند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. کران‌داری عملگر ترکیبی وزن‌دار امید شرطی در [۱] اثبات شده است. نرم اساسی

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: aliyan.amir1404@gmail.com (A. Aliyan ), estaremi@gmail.com (Y. Estaremi ), ebadian.ali@gmail.com (A. Ebadian )

عملگرهای خطی کران‌دار، در فضاهای تابعی و به‌طور گسترده در فضاهای برگمن موردمطالعه قرار گرفته است [۵]. مقالات مهم زیادی درباره نرم‌های اساسی عملگرهای کران‌دار مانند عملگرهای ترکیبی، عملگرهای ضرب و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار در فضاهای برگمن وجود دارد، به‌عنوان‌مثال می‌توان [۲، ۸] را مطالعه نمود. در این مقاله می‌خواهیم با توجه به مفهوم امید شرطی به‌عنوان یک عملگر بین فضای برگمن و ترکیب آن با عملگر ضربی به‌صورت یک عملگر ترکیبی وزن‌دار، به محاسبه نرم اساسی و شرایط فشردگی عملگر ترکیبی وزن‌دار امید شرطی بپردازیم.

## ۲ تعاریف و مقدمات

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$ قرص یکه و دایره یکه را $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ تعریف می‌کنیم. اندازه مساحت نرمالیزه $(A(\mathbb{D}) = ۱)$ در$\mathbb{D}$ را با $dA$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که می‌دانیم $dA(z) = \frac{۱}{\pi}dxdy = \frac{۱}{\pi}rdrd\theta$ که در آن $z = x + iy = re^{i\theta}$.

برای $۰ < p < +\infty$ و $-۱ < \alpha < +\infty$، فضای برگمن (وزن‌دار) $L_a^{p,\alpha} = L_a^{p,\alpha}(\mathbb{D})$ از $\mathbb{D}$، فضای تمام توابع تحلیلی در $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ است که

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + ۱)(۱ - |z|^۲)^\alpha dA(z).$$

این تعریف جدید را مساحت بر اساس تابع وزن $(\alpha + ۱)(۱ - |z|^۲)^\alpha$ گویند. هر جا که $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$، داریم:

$$\|f\|_{p.\alpha} = \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)\right]^{۱/p}.$$

برای $۱ \leq p < \infty$، فضای $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ با درنظرگرفتن نرم $\|.\|_{p.\alpha}$ یک فضای باناخ است. علاوه بر این، برای $۰ < p < ۱$، باتوجه‌به متر تعریف‌شده توسط $d(f, g) = \|f - g\|_{p.\alpha}^p$ فضای $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ یک فضای متری کامل است.

فرض می‌کنیم $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ فضای اندازه سیگما متناهی کامل و $\mathcal{A}$ یک زیرسیگماجبر از $\mathcal{M}$ بوده به طوری که $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu|_\mathcal{A})$ نیز سیگمامتناهی باشد. خانواده‌ای از (کلاس‌های هم‌ارز مجموعه‌ای از اندازه صفر) $\mathcal{M}$- توابع اندازه‌پذیر مختلط با$L^۰(\mathcal{M})$ در $\mathcal{X}$ مشخص خواهد شد. علاوه بر این، برای $۱ \leq p < \infty$، $L^p(\mathcal{M}) = L^p(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ و $L^p(\mathcal{A}) = L^p(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu|_\mathcal{A})$ را در نظر می‌گیریم. به‌عنوان یک نتیجه از قضیه رادون-نیکودیم برای هر تابع نامنفی $f \in L^۰(\mathcal{M})$، تابع $\mathcal{A}$ - اندازه‌پذیر منحصربه‌فرد نامنفی $E_\mathcal{A}(f) \in L^۰(\mathcal{A})$ وجود دارد بطوری‌که برای همه $\Delta \in \mathcal{A}$، $\int_\Delta f d\mu = \int_\Delta E(f) d\mu$ . تابع $E_\mathcal{A}(f)$ امید شرطی $f$ از نسبت به $\mathcal{A}$ می‌نامند.

اگر در$L^p(\mathbb{D}, \mathcal{M}, \mathcal{A})$ داشته باشیم $E_\mathcal{A} P_\alpha = P_\alpha E_\mathcal{A}$، آنگاه $L_a^p(\mathbb{D}) = L_a^{p,۰}(\mathbb{D})$ تحت عملگر منحصربه‌فرد نامنفی امید شرطی $E_\mathcal{A}$ پایا است، بطوری‌که، $E_\mathcal{A}(L_a^p(\mathbb{D})) \subseteq L_a^p(\mathbb{D})$. فرض می‌کنیم $\mathcal{M}$ سیگماجبر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در $\mathbb{D}$ باشد، $\mathcal{A}$ زیرجبر $\mathcal{M}$ است و $E = E_\mathcal{A}$ عملگر امید شرطی مرتبط است. برای نگاشت خودریخت غیرثابت تحلیلی $\varphi$ در $\mathbb{D}$ و $z \in \mathbb{D}$، هر جا که $\mathbb{D}_۰ = \{\zeta \in \mathbb{D} : \varphi'(z)(\zeta) \neq ۰\}$ تعریف می‌کنیم:

$$c_z = \{\zeta \in \mathbb{D}_۰ : \varphi(\zeta) = \varphi(z)\}.$$

نگاشت$\varphi$ دارای چندگانگی متناهی است اگر بتوانیم $n \in \mathbb{N}$ را پیدا کنیم به‌طوری‌که برای هر $z \in \mathbb{D}$، مجموعه سطح $c_z$ حداکثر از $n$ نقطه تشکیل‌شده باشد.

با استفاده از $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi)$ زیرسیگماجبر تولیدشده به‌وسیله

$$\{\varphi^{-۱}(U) : U \subset \mathbb{C} \text{ باز است}\}$$

را تعریف می‌کنیم. برای اندازه لبگ $m$ در $\mathbb{C}$ ، $h = \frac{dA_۰\varphi^{-۱}}{dm}$ تقریباً همه‌جا متناهی‌مقدار است؛ زیرا اندازه متناهی $A \circ \varphi^{-۱}$ نسبت به $m$ مطلقاً پیوسته است $(A \circ \varphi^{-۱} \ll m)$.

فرض می‌کنیم توابع $f$، $g$ و $\cdots$ اعضایی از دامنه تعریف عملگر امید شرطی $E$ باشند، برخی از ویژگی‌های مهم این عملگر در $L^p$ عبارت‌اند از:

۱) اگر $f$ و $g$ حقیقی مقدار با شرط $f \leq g$ باشند، آنگاه $E(f) \leq E(g)$.

۲) اگر $a$ تابع مختلط مقدار و $f$ تابع $\mathcal{A}$ - اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $E(af) = aE(f)$.

۳) اگر $f \in L^p(\Sigma)$، $g \in L^p(\Sigma)$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$، آنگاه $E|fg| \leq (E|f|^p)^{\frac{۱}{p}})(E|g|^q)^{\frac{۱}{q}}$.

۴) $(E|f|)^p \leq E|f|^p$.

۵) $E(۱) = ۱$.

عملگر امید شرطی در $L_a^{p.\alpha}$، با لم و تعریف زیر بیان می شود:

لم ۱.۲. [۴] فرض می‌کنیم برای خودنگاشت چندپارگی‌متناهی $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ داشته باشیم $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\varphi)$، آنگاه برای هر $f \in L_a^p(\mathbb{D})$ داریم:

$$E_{\mathcal{A}}(f)(\zeta) = \frac{\sum_{\zeta_j \epsilon c_z} \frac{f(\zeta_j(w))}{|\varphi'(\xi_j w)|^۲}}{\sum_{\zeta_j \epsilon c_z} \frac{۱}{|\varphi'(\xi_j w)|^۲}}.$$

اگر $EP = PE$، آنگاه $E(L_a^۲(\mathbb{D})) \subseteq L_a^۲(\mathbb{D})$.

همچنین تابع $\omega$ که به‌صورت

$$\omega(\zeta_j) = \frac{\frac{۱}{|\varphi'(\zeta_j(w))|^۲}}{\sum_{\zeta_j \epsilon c_z} \frac{۱}{|\varphi'(\zeta_j(w))|^۲}}$$

تعریف می‌شود، در هر مجموعه سطح، ثابت است. به‌خصوص اگر $EP = PE$، آنگاه $\omega$ در $\mathbb{D}$ ثابت است.

تعریف ۲.۲. فرض می‌کنیم $u$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{D}$ باشد، $\circ < p < \infty$ و $\alpha, \beta > -۱$. اگر $\mathcal{A}$ یک زیرسیگماجبر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه عملگر امید شرطی وزن‌دار $T = M_u E_{\mathcal{A}}$ در $L_a^{p.\alpha}$ بدین‌صورت تعریف می‌شود: $T(f)(z) = u(z)E_{\mathcal{A}}(f)(z)$ که در آن برای هر $f \in L_a^{p.\alpha}$ و $z \in \mathbb{D}_\circ$، $E_{\mathcal{A}}(f)$ یک تابع تحلیلی است.

علاوه بر متر ارائه‌شده فوق، توسط

$$\beta(a,z) = \frac{۱}{۲} log \frac{۱ + \rho(a,z)}{۱ - \rho(a,z)} \qquad a, z \in \mathbb{D}$$

متری دیگری در $\mathbb{D}$ تعریف می‌شود که آن را متر برگمن گویند (در بعضی جاها آن را هایپربولیک برگمن یا متر پوانکاره در $\mathbb{D}$ نیز می‌نامند). ازاین‌رو داریم:

$$\beta(\circ, z) = \frac{۱}{۲} log \frac{۱ + |z|}{۱ - |z|}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

متر برگمن پایا است.

برای هر $a \in \mathbb{D}$ و $r > \circ$، فرض می‌کنیم

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{D} : \ \beta(a,z) < r\}$$

اگر $a$ مرکز دیسک متر برگمن با شعاع $r$ باشد. هرکجا که $s = \tanh r$، با استفاده از $\beta(a,z)$ برای $D(a,r)$ دیسک با مرکز و شعاع اقلیدسی زیر

$$C = \frac{۱ - s^۲}{۱ - s^۲|a|^۲} a, \qquad R = \frac{۱ - |a|^۲}{۱ - s^۲|a|^۲} s$$

تعریف می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم اگر $z \in \mathbb{D}$ باشد، قضیه نمایش ریس نشان می‌دهد که یک تابع منحصربه‌فرد $K_z$ در $L_a^۲(\mathbb{D})$ وجود دارد به‌طوری‌که برای همه $f \in L_a^۲(\mathbb{D})$ داریم

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K_z(w)} dA(w).$$

فرض می کنیم $K(z,a)$ یک تابع در $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ تعریف‌شده به‌وسیله $K(z,a)=\overline{K_z(a)}$ باشد، $K(z,a)$ را هسته برگمن بر $\mathbb{D}$ نامند که $K(z,w)=\frac{۱}{(۱-z\bar{a})^{۲}}$. علاوه بر این توابع

$$K_\alpha(\omega,z)=\frac{۱}{(۱-w\overline{z})^{۲+\alpha}} \qquad z,\omega\in\mathbb{D}$$

را هسته‌های برگمن (وزن‌دار) از $\mathbb{D}$ گویند. اگر داشته باشیم

$$k_a(z)=\frac{K(z,a)}{\sqrt{K(a,a)}}=\frac{۱-|a|^{۲}}{(۱-\bar{a}z)^{۲}}$$

آنگاه $k_a(z)\in L_a^{۲}(\mathbb{D})$ و آن را هسته‌های نرمال شده از $L_{۲}(\mathbb{D})$ می‌نامند. توابع هسته برگمن به‌طور مستقیم با گروه موبیوس مرتبطاند. به‌راحتی می‌توان دید مشتق $\varphi_a$ در $z$ با $k_a(z)$ برابر است. این نتیجه می‌دهد که برای همه $a,z\in\mathbb{D}$ ، $|\varphi'_a(z)|=|k_a(z)|$.
حال اندازه کارلسون تعمیم‌یافته و اندازه کارلسون شرطی را یادآوری می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mu$ اندازه بورل مثبت متناهی در $\mathbb{D}$ که $p>۰$، باشد. می‌گوییم $\mu$ یک $(L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D}),p)$ – اندازه کارلسون تعمیم‌یافته در $L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D})$ است اگر یک زیرفضای‌بسته $M\subseteq L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای $f\in M$ داریم:

$$\int\limits_{\mathbb{D}}|f(z)|^p d\mu\leq C\,\|f\|^p_{L_a^{\alpha,p}}.$$

علاوه بر این، اگر برای بعضی زیرسیگماجبرهای $\mathcal{A}$، قرار دهیم

$$M=L_a^{\alpha,p}(\mathcal{A})=E_{\mathcal{A}}(L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D}))$$

آنگاه می‌گوییم که $\mu$ یک $(L_a^{\alpha,p},p)$ – اندازه کارلسون شرطی از $L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D})$ است هرگاه یک $C>۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای همه $f\in L_a^{\alpha,p}(\mathbb{D})$

$$\int_{\mathbb{D}_{۰}}|E_{\mathcal{A}}(f)(z)|^p d\mu\leq C\,\|f\|^p_{L_a^{p,\alpha}}.$$

ملاحظه ۳.۲. نشان‌دادن این‌که عملگر $M_uE$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ کران‌دار است اگر و تنها اگر $\mu_u^\beta$ یک $(L_a^{\alpha,p},p)$ – اندازه کارلسون شرطی در $L_a^{\alpha,p}$ باشد، آسان است. فرض می‌کنیم $۱<p<\infty$ و $\alpha>-۱$. تابع $\Psi_a^\alpha(\mu)(z)$ را که به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم خوش تعریف است:

$$\Psi_a^\alpha(\mu)(z)=\int_{\mathbb{D}_{۰}}\left(\frac{۱-|a|^{۲}}{|۱-\bar{a}z|^{۲}}\right)^{(۲+\alpha)}d\mu(z).$$

در ادامه برخی از شرایط معادل را برای کران‌داری در فضاهای برگمن ثابت می‌کنیم. در اینجا نتایجی از [۱، ۹] را یادآوری می‌کنیم.

لم ۴.۲. [۱] فرض می‌کنیم $u$ یک تابع تحلیلی و $\mu$ یک اندازه کران‌دار بورل در $\mathbb{D}$ باشد و $۰<p<\infty$، $\alpha,\beta>-۱$. همچنین، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\varphi)$ که در آن $\varphi$ یک نگاشت خودریختی تحلیلی غیرثابت بر $\mathbb{D}$ است، آنگاه عملگر امید شرطی وزن‌دار $M_uE$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ کران‌دار است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $C$ برای $a,z\in\mathbb{D}_{۰}=\{z\in\mathbb{D}:\varphi'(z)\neq ۰\}$ به‌طوری‌که

$$\limsup_{|a|\to ۱}\int\limits_{\mathbb{D}_{۰}}\left(\frac{(۱-|a|^{۲})}{|۱-\bar{a}z|^{۲}}\right)^{(\alpha+۲)}d\mu_u^\beta(z)\leq C.$$

لم ۵.۲. [۹] فرض می‌کنیم $X$ یک فضای باناخ از توابع تحلیلی در $\mathbb{D}$ است با این ویژگی که چندجمله‌ای‌ها در $X$ چگال باشند، آنگاه برای هر $f\in X$، $\|f_n-f\|\to ۰\ (n\to+\infty)$ اگر و فقط اگر یک ثابت مثبت $C>۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $n>۱$، $\|S_n\|<C$ که عملگر $S_n$ با ضابطه $S_nf=f_n$ در $X$ تعریف‌شده است.

لم ۶.۲. [۹] فرض می‌کنیم $۱<p<+\infty$ و $\alpha>-۱$، آنگاه سری تیلور هر تابع متعلق به $L_a^p(dA_\alpha)$ به نرمش همگرا می‌شود.

اگر $p \in (1, \infty)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آنگاه در ادامه تعمیمی از نامساوی کوشیشوارتس را داریم که گاهی اوقات نابرابری هولدر نامیده می‌شود:

$$\left| \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) \right| \leq \left[ \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right]^{\frac{1}{q}}.$$

لم ۷.۲. [۳] فرض می‌کنیم $0 < r < 1$ و $\mu$ یک اندازه مثبت بورل در $\mathbb{D}$ باشد و همچنین داشته باشیم

$$N_r^* = \sup_{|a| \geq r} \int_{\mathbb{D}} \left( \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \right)^{\frac{(2+\alpha)q}{p}} d\mu(z).$$

اگر $\mu$ یک $(L_a^{p,\alpha}, q)$ – اندازه کارلسون و تعریف $D_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| < r\}$ را داشته باشیم، آنگاه برای $0 < p \leq q < \infty$ داریم $\mu_r = \mu \mid_{\mathbb{D} \setminus D_r}$. علاوه بر این اگر $M$ یک ثابت مطلق باشد، آنگاه داریم $\|\mu_r\| \leq M N_r^*$ .

ملاحظه ۸.۲. فرض می‌کنیم $a_n$ یک دنباله در $\mathbb{D}$ باشد به‌طوری‌که $|a_n| \to 1$، آنگاه برای توابع $f_{a_n}^{p,\alpha}(z) = \frac{\left(1-|a_n|^2\right)^{(2+\alpha)/p}}{(1-\bar{a}_n z)^{2(2+\alpha)/p}}$ داریم $f_{a_n}^{p,\alpha} \to 0$ و $\left\|f_{a_n}^{p,\alpha}\right\|_{L_a^{p,\alpha}} = 1$.

برای تابع تحلیلی $f$ در $\mathbb{D}$، $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ را داریم، فرض می‌کنیم هر جا که $If = f$ نگاشت همانی باشد، آنگاه $K_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ و $R_n = I - K_n$ را تعریف می‌کنیم ازاین‌رو $R_n f(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$. دراین خصوص لم‌های زیر برقرارند.

لم ۹.۲. [۷] اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L_a^p(vdA)$ ، آنگاه $\|K_n f - f\|_v \longrightarrow 0$.

لم ۱۰.۲. [۷] اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L_a^p(vdA)$، آنگاه $\|R_n f\|_v \longrightarrow 0$. علاوه بر این

$$sup\{\|R_n f\| : n \geq 1\} < \infty.$$

در اینجا قصد داریم نرم اساسی عملگر شرطی وزن‌دار $M_u E$ را در فضاهای برگمن تخمین بزنیم. یادآوری می‌کنیم که نرم اساسی یک عملگر خطی $T$ فاصله از $T$ تا عملگرهای فشرده می‌باشد، یعنی

$$\|T\|_e = inf\{\|T - K\| : K \; is \; compact\}.$$

نرم اساسی یک عملگر خطی $T$ رابطه مستقیم با کران‌داری و فشردگی عملگر $T$ دارد.
می‌دانیم که $\|T\|_e < +\infty$ اگر و تنها اگر $T$ کران‌دار باشد و $\|T\|_e = 0$ اگر و تنها اگر $T$ فشرده باشد، بنابراین تخمین‌زدن $\|T\|_e$منجر به برقراری شرایط کران‌داری و فشردگی $T$ می‌شود. واضح است $\|T\|_e \leq \|T\|$.
فرض می‌کنیم $X$ یک عملگر خطی کران‌دار از $X$ به $Y$ و $Y$ فضای باناخ انعکاسی باشد، آنگاه محاسبات مستقیم نشان می‌دهد که $\|T\|_e = \|T^*\|_e$. همان‌طور که در [۶] داریم، نرم اساسی نقش جالبی را در مشکل فشردگی عملگرها بازی می‌کند. ازآنجاکه فضاهای برگمن انعکاسی‌اند و $(EM_u)^* = M_{\bar{u}}E$، پس $\|(EM_u)^*\|_e = \|M_{\bar{u}}E\|_e$.
ابتدا یک کران بالا برای $|M_u E|_e$ در قضیه بعدی پیدا می‌کنیم.

## ۳ نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. فرض می‌کنیم $u$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{D}$ باشد، $1 < p < \infty$ و $\alpha, \beta > -1$ . اگر $M_u E$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{q,\beta}$ کران‌دار باشد،، آنگاه

$$\|M_u E\|_e \leq \liminf_{n \to \infty} \|M_u E R_n\| .$$

اثبات. چون $(R_n + K_n)f = f$ و $K_n$ فشرده است، با استفاده از لم‌های ۹.۲ و ۱۰.۲ برای هر $n$ داریم،

$$\|M_u E\|_e \leq \|M_u E R_n + M_u E K_n\|_e \leq \|M_u E R_n\|_e \leq \|M_u E R_n\| .$$

ازاین‌رو $\|M_u E\|_e \leq \liminf_{n \to \infty} \|M_u E R_n\|$ . □

اکنون، در قضیه بعدی، کران‌های بالا و پایین را برای نرم اساسی عملگر کران‌دار $M_uE$ در فضاهای برگمن به دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۳. فرض می‌کنیم $u$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{D}$ باشد، $1 < p < \infty$ و $\alpha, \beta > -1$. اگر $M_uE$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ کران‌دار باشد، آنگاه مقدار ثابت $C > 1$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $\{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) \neq 0\} = \mathbb{D}_0 \ni a, z$،

$$\limsup_{|a|\to 1} \int_{\mathbb{D}_0} \left(\frac{(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}\right)^{(\alpha+2)} d\mu_u^\beta(z) \leq \|M_uE\|_e \leq C \limsup_{|a|\to 1} \int_{\mathbb{D}_0} \left(\frac{(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}\right)^{(\alpha+2)} d\mu_u^\beta(z).$$

اثبات. ابتدا کران بالا را ثابت می‌کنیم. با استفاده از قضیه ۱.۳ داریم:

$$\|M_uE\|_e \leq \liminf_{n\to\infty} \|M_uER_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{L_a^{p,\alpha}}\leq 1} \|(M_uER_n)f\|_{L_a^{p,\beta}}.$$

همچنین با استفاده از ویژگی‌های امید شرطی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|(M_uER_n)f\|^p_{L_a^{p,\beta}} &= \int_{\mathbb{D}_0} |u(z)|^p |ER_nf(z)|^p dA_\beta(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}_0} |ER_nf(z)|^p d\mu_u^\beta(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}_0} |R_nf(z)|^p d\mu_u^\beta(z). \end{aligned}$$

برای هر $0 < r < 1$ ثابت داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}_0} |R_nf(z)|^p d\mu_u^\beta(z) &= \int_{\mathbb{D}_0 \setminus (0,r)} |R_nf(z)|^p d\mu_u^\beta(z) + \int_{D(0,r)} |R_nf(z)|^p d\mu_u^\beta(z) \\ &= M^r_{1,n} + M^r_{2,n}. \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم $K_w(z) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{(2+\alpha)}}$ را هسته برگمن می‌نامند و با استفاده از دوگان فضای برگمن و لم ۶.۲ ازآنجاکه، $R_n$ خودالحاق است و با استفاده از نامساوی هولدر داریم:

$$\begin{aligned} |R_nf(z)|^p &= |\langle R_nf, K_z\rangle|^p \\ &= |\langle f, {R_n}^*K_z\rangle|^p \\ &= |\langle f, R_nK_z\rangle|^p \\ &\leq \|f\|^p_{L_a^{p,\alpha}} \|R_nK_z\|^p_{L_a^{\frac{p}{p-1},\alpha}}. \end{aligned}$$

اگر $0 < r < 1$ ثابت باشد و $z \in \mathbb{D}$، برای به‌دست‌آوردن برآورد $|R_nK_z(w)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)r^k$ از سری تیلور

$$K_z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\overline{z}^k w^k$$

استفاده می‌کنیم. ازاین‌رو، برای هر $\varepsilon > 0$، $n$ به‌اندازه کافی بزرگی وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_{\mathbb{D}_0} |R_nK_z(w)|^p dA_\alpha(z) < \varepsilon^p$$

و

$$|R_nf(z)|^p \leq \varepsilon^p \|f\|^p_{L_a^{p,\alpha}}.$$

چون $M_uE$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ کران‌دار است، $\mu_u^\beta$ یک $(L_a^{\alpha,p}, p)$ – اندازه کارلسون شرطی $L_a^{\alpha,p}$ است. بدین ترتیب

$$M^r_{2,n} \leq \varepsilon^p \|f\|^p_{L_a^{p,\alpha}} \mu_u(D_r) \leq \varepsilon^p \|f\|^p_{L_a^{p,\alpha}} \|u\|^p_{L_a^{\frac{p}{p-1},\beta}}.$$

ازاین‌رو برای $r$ ثابت و $n \longrightarrow \infty$ داریم:

$$\sup_{\|f\|_{L_a^{p,\beta}} \leq ۱} M_{۲,n}^r \longrightarrow ۰.$$

از طرف دیگر، اگر از برابری $\mu_{u,r}^\beta = \mu_u^\beta|_{\mathbb{D}_۰ \setminus D_r}$، قضیه ۲.۳ و لم ۷.۲ استفاده کنیم داریم:

$$M_{۱,n}^r = \int_{\mathbb{D}_۰ \setminus D_r} |R_n f(z)|^p d\mu_{u,r}^\beta(z) \leq K\|\mu_{u,r}^\beta\| \|R_n f\|_{L_a^{p,\beta}}^p \leq KCMN_r^* \|f\|_{L_a^{p,\beta}}^p.$$

که در آن $K$، $C$ و $M$ ثابت‌های مستقل از $u$ و $r$ و $N_r^*$ در لم ۷.۲ تعریف‌شده‌اند.
در اینجا نیز از نابرابری $\|R_n f\|_{L_a^{p,\beta}}^p \leq C\|f\|_{L_a^{p,\beta}}^p$، که از نابرابری مثلث و نابرابری $\|K_n f\|_{L_a^{p,\beta}}^p \leq C\|f\|_{L_a^{p,\beta}}^p$ حاصل از لم‌های ۵.۲ و ۶.۲ به‌دست‌آمده، استفاده می‌کنیم. ماکزیمم $\|(M_u E R_n) f\|_{L_a^{p,\beta}}^p$ با توابع فضای $L_a^p$ حاصل شده و اگر $n \to \infty$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \sup_{\|f\|_{L_a^{p,\beta}} \leq ۱} \|(M_u E R_n) f\|_{L_a^{p,\beta}} &\leq K\|\mu_{u,r}^\beta\| \|R_n f\|_{L_a^{p,\beta}}^p \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} KCMN_r^* \\
&= KCMN_r^*.
\end{aligned}$$

بنابراین $\|M_u E\|_e^p \leq KCMN_r^*$. اگر $r \longrightarrow ۱$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
\|M_u E\|_e^p &\leq KCM \lim_{r\to ۱} N_r^* \\
&\leq KCM \sup_{|a|\longrightarrow ۱} \int_{\mathbb{D}_۰} \left(\frac{۱-|a|^۲}{|۱-\bar{a}z|^۲}\right)^{(۲+\alpha)} d\mu_u^\beta(z).
\end{aligned}$$

اکنون کران پایین را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f_a = k_a^{p,\alpha}$ و با استفاده از ملاحظه ۸.۲ عملگر فشرده ثابت $H$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $|a| \to ۱$، آنگاه $\|Hf_a\|_{L_a^{p,\beta}} \to ۰$، درنتیجه

$$\begin{aligned}
\|M_u E - H\| &\geq \limsup_{|a|\to ۱} \|(M_u E - H)(f_a^{;\alpha})\|_{L_a^{p,\beta}} \\
&\geq \limsup_{|a|\to ۱} (\|M_u E(f_a^{p,\alpha})\|_{L_a^{p,\beta}} - \|H(f_a)\|_{L_a^{p,\beta}}) \\
&= \limsup_{|a|\to ۱} \|M_u E(f_a^{p,\alpha})\|_{L_a^{p,\beta}}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|M_u E\|_e^q &\geq \limsup_{|a|\to ۱} \|M_u E(f_a^{p,\alpha})\|_{L_a^{p,\beta}}^p \\
&\approx \limsup_{|a|\to ۱} \int_{\mathbb{D}_۰} \left(\frac{(۱-|a|^۲)}{|۱-\bar{a}z|^۲}\right)^{(\alpha+۲)} d\mu_u^\beta(z)\, \|f_a^{p,\alpha}\|_{L_a^{p,\beta}}^p.
\end{aligned}$$

□

با استفاده از لم‌ها و قضیه‌های قبل در ادامه نتیجه زیر می‌شود.

نتیجه ۳.۳. فرض می‌کنیم $u$ در $\mathbb{D}$ یک تابع تحلیلی، $۰ < p < \infty$ و $\alpha, \beta > -۱$ باشد. اگر $M_u E$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ کران‌دار باشد، عملگر امید شرطی وزن‌دار $M_u E$ از $L_a^{p,\alpha}$ به $L_a^{p,\beta}$ فشرده است اگر و تنها اگر

$$\limsup_{|a|\to ۱} \int_{\mathbb{D}_۰} \left(\frac{(۱-|a|^۲)}{|۱-\bar{a}z|^۲}\right)^{(\alpha+۲)} d\mu_u^\beta(z) = ۰.$$

## مثال

مثال ۴.۳. فرض می‌کنیم $p = \alpha = ۰$ و $E_n$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$E_n = \{z \in \mathbb{D}_۰ : \left|z - \frac{a}{|a|}\right| < ۲^{n+۱}(۱ - |a|)\} \qquad n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

در این‌صورت برای هر $a \in \mathbb{D}$ که $|a| > \frac{۳}{۴}$، نامساوی‌های زیر برقراراند:

$$\frac{۱ - |a|^۲}{|۱ - \bar{a}z|^۲} \leq \frac{۲}{۱ - |a|^۲} \qquad a \in E_۱$$

$$\frac{۱ - |a|^۲}{|۱ - \bar{a}z|^۲} \leq \frac{۲}{۲^{۲n}(۱ - |a|^۲)} \qquad a \in E_n \setminus E_{n-۱}.$$

اگر $f(z) = \frac{۱-|a|^۲}{(۱-\bar{a}z)^۲}$، در این‌صورت برای هر $\beta$ و تابع تحلیلی $u$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|M_uE\|_e \leq \|M_uE\| &\leq \|M_uE_{\mathcal{A}}(\frac{۱ - |a|^۲}{(۱ - \bar{a}z)^۲})\|^۲_{L^{۲,\beta}_a} \\
&= \int_{\mathbb{D}_۰} |E(\frac{۱ - |a|^۲}{(۱ - \bar{a}z)^۲})|^۲ |u(z)|^۲ dA_\beta(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}_۰} |E(\frac{۱ - |a|^۲}{(۱ - \bar{a}z)^۲})|^۲ d\mu_u^\beta(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}_۰} E(\left|\frac{۱ - |a|^۲}{(۱ - \bar{a}z)^۲}\right|^۲) d\mu_u^\beta(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}_۰} \left(\frac{۱ - |a|^۲}{|۱ - \bar{a}z|^۲}\right)^۲ d\mu_u^\beta(z) \\
&\leq \int_{E_۱} \left(\frac{۱ - |a|^۲}{|۱ - \bar{a}z|^۲}\right)^۲ E(۱) d\mu_u^\beta(z) \\
&+ \sum_{n=۲}^{\infty} \int_{E_n \setminus E_{n-۱}} \left(\frac{۱ - |a|^۲}{|۱ - \bar{a}\omega|^۲}\right)^۲ d\mu_u^\beta(z) \\
&\leq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{(۲^{۲n}(۱ - |a|^۲))^۲} \int_{\mathbb{D}_۰} d\mu_u^\beta(z) \\
&= \frac{۴}{۱۵(۱ - |a|^۲)^۲} \int_{\mathbb{D}_۰} d\mu_u^\beta(z). \qquad (۱)
\end{aligned}$$

که در آن $\mu_u^\beta$ به‌صورت $\int_{\mathbb{D}} |u(z)|^p dA_\beta(z)$ تعریف شده است.

از طرفی دیگر تساوی زیر برای دیسک‌های برگمن بر $\mathbb{D}_۰$ را داریم:

$$\sup_{z \in D(a,r)} \left|\frac{۱ - |a|^۲}{(۱ - \bar{a}z)^۲}\right|^۲ = \frac{(۱ + tanh(r)\,|a|)^۴}{(۱ - |a|^۲)^۲},$$

آنگاه

$$\limsup_{|a|\to ۱} \int_{\mathbb{D}_{\circ}} \left(\frac{(۱-|a|^{۲})}{|۱-\bar{a}z|^{۲}}\right)^{(\alpha+۲)} d\mu_u^{\beta}(z) = \frac{(۱+tanh(r)\,|a|)^{۴}}{(۱-|a|^{۲})^{۲}} \int_{\mathbb{D}_{\circ}} d\mu_u^{\beta}(z). \qquad (۲)$$

برای $۱ > r \leq ۰$، رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌دهند که

$$\frac{۴}{۱۵} \leq (۱+tanh(r)\,|a|)^{۴}.$$

## فهرست منابع


[1] Aliyan A. Estaremi Y. Ebadian A., *Conditional Carleson Measures and Related Operators on Bergman Spaces*, Bull. Iran. Math., 45 (2019), 997–1010.

[2] Chen Z., Jiang L. and Yan Q., *An upper bound of the essential norm of composition operators between weighted Bergman spaces*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)., 34 (2014), 1145–1156.

[3] Cuckovic Z. and Zhao R., *Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces*, Illi.Jour. Math., 51 (2007) 479-498.

[4] Jabbarzadeh M.R and Hassanloo M., *Conditional Expectation Operators on the Bergman Spaces*, J. Math. Anal. Appl., 385 (2012), 322-25.

[5] Lindström M. and Saukko E., *Essential norm of weighted composition operators and difference of composition operators between standard weighted Bergman spaces*, Complex Anal. Oper. Theory., 9 (2015), 1411–1432.

[6] Shapiro J.H., *The essential norm of a composition operator*, Ann. Math., 125 (1987), 375–404.

[7] Sharma A.K., and Ueki S.-i., *Composition operators between weighted Bergman spaces with admissible BÃ©kollÃ© weights*, Banach J. Math. Anal, 8 (2014), 64-88.

[8] Zhou Z.H, Liang Y. X. and Zeng H.G, *Hong Gang Essential norms of weighted composition operators from weighted Bergman space to mixed-norm space on the unit ball*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)., 29 (2013), 547–556.

[9] Zhu K.H., *Duality of Bloch spaces and norm convergence of Taylor series*, Mich. Math. Jour., 38 (1991), 89-101.

# Investigation of some properties of weighted conditional expectation operators

**Amir Aliyan**[1, †] **, Ysef Estaremi**[2]**,Ali Ebadian**[3]

(1) Department of Mathematics, Payame Noor University, P. O. Box 19395-3697, Tehran, Iran
(2) Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran
(3) Department of Mathematics, Faculty of Science, Urmia University, Urmia, Iran

Received: 2020/12/19 Accepted: 2021/3/27

Communicated by: Amir H. Sanatpour

**Abstract:** In this paper, we estimate the essential norm of weighted conditional expectation operators on Bergman spaces by means of related Carleson measures. As a consequence, we get an equivalence condition for compactness of these operators And we will mention an example. Our results extend similar results that were proven for multiplication operators on Bergman spaces.

**Keywords**: Conditional Carleson measure, Bergman space, Conditional expectation, Essential norm.



†Corresponding author.
*E-mail addresses:* aliyan.amir1404@gmail.com (A. Aliyan ), estaremi@gmail.com (Y. Estaremi ), ebadian.ali@gmail.com (A. Ebadian )