مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۴۱۵-۴۳۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2021.37198.1924

گروه‌های لی لورنتسی سوپر-اینشتینی ۳-بعدی

پروانه آتش‌پیکر [×]، علی حاجی‌بدلی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۱۰

چکیده: در این مقاله، گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی به‌عنوان خمینه‌های همگن از بعد سه را بر اساس شرط سوپر-اینشتینی طبقه‌بندی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا طبقه‌بندی کاملی از گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی اینشتینی را ارائه داده، سپس براساس طبقه‌بندی به‌دست آمده شرط سوپر-اینشتینی را روی این گروه‌های لی مطالعه می‌کنیم. در ادامه به‌منظور بررسی برخی توصیف‌های هندسی از طبقه‌بندی ارائه شده شرایط اینشتینی‌گون یعنی شرایط کیلینگ و کودازی را روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر-اینشتینی بررسی می‌کنیم. در انتها، خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک سوپر-اینشتینی را به‌عنوان مثال‌های غیرهمگن ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: گروه لی، سوپر-اینشتینی، کودازی، کیلینگ، همگن انحنایی مرتبه یک.

رده‌بندی ریاضی: 53B30; 53C30; 22E15

۱ مقدمه

فرض کنید (M,g) خمینه لورنتسی سه‌بعدی، ∇ التصاق لوی-سویتا و $\mathcal{R}(X,Y)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}$ تانسور انحنای آن باشد. تانسور ریچی ϱ به‌صورت $\varrho(X,Y)=\mathrm{tr}\{Z\mapsto \mathcal{R}(Z,X)Y\}$ و عملگر ریچی Q متناظر با تانسور ریچی با $\varrho(X,Y)=g(Q(X),Y)$ تعریف می‌شود. ایجاد متر ذاتی روی خمینه در هندسه دیفرانسیل بسیار حائز اهمیت است، از این بین مترهای اینشتینی اغلب به‌عنوان متمایزترین مترها روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر مفروض درنظر گرفته می‌شوند. خمینه شبه‌ریمانی (M,g) اینشتینی نامیده می‌شود، هرگاه تانسور ریچی ϱ به ازای یک مقدار حقیقی c در رابطه $\varrho=cg$ صدق کند. یعنی تانسور ریچی مضرب ثابتی از متر باشد. توجه داشته باشید که هر خمینه با انحنای ثابت اینشتینی است [۱۲].

مفهوم خمینه سوپر-اینشتینی اولین بار توسط گری و ویلمور [۱۰] در چارچوب قضایای مقدار میانگین در هندسه ریمانی معرفی شده است. خمینه اینشتینی سه‌بعدی (M,g)، سوپر-اینشتینی نامیده می‌شود، هرگاه برای $||\mathcal{R}||^۲$ ثابت

$$\check{\mathcal{R}}=\frac{||\mathcal{R}||^{۲}}{n}g, \tag{۱.۱}$$

[×]نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: p.atashpeykar@ubonab.ac.ir (P. Atashpeykar), haji.badali@ubonab.ac.ir (A. Haji-Badali)

برقرار باشد، که در آن نرم تانسور دلخواه به‌صورت $\langle\cdot,\cdot\rangle = \|\cdot\|^{2}$ تعریف می‌شود و $\check{\mathcal{R}}$ میدان تانسوری متقارن از نوع $(0,2)$ است که به‌صورت

$$\check{\mathcal{R}}_{ij} = \mathcal{R}_{iabc}\mathcal{R}_{j}^{abc}, \tag{۲.۱}$$

تعریف می‌شود. میدان تانسوری $\check{\mathcal{R}}$ پایای ریمانی طبیعی ایجاد می‌کند که از لحاظ جبری، ساده‌ترین تانسورها بعد از تانسور ریچی است. اما به نظر می‌رسد که در مقالات توجه زیادی به این تانسور جلب نشده است (برای مثال منبع [۲، صفحه ۱۶۵] را ببینید.). شرط سوپر–اینشتینی توسط چن و ونهک در [۶] در چارچوب کره‌های ژئودوزیک بررسی شده است و مربوط به کلاف‌های کره واحد مماس با انحنای اسکالر ثابت است [۴]. علاوه‌براین، متر اینشتینی فشرده (یا در حالت کلی‌تر، متر با تانسور ریچی موازی) برای تابعک انحنای $\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \|\mathcal{R}\|^{2}$ محدود به مترهای با تابعک حجم یک، بحرانی است اگر و تنها اگر در شرط (۱.۱) صدق کنند [۱].

باتوجه به صفر بودن تانسور ویل در بعد سه، خمینه‌های سه‌بعدی (ریمانی یا شبه ریمانی) از نقطه نظر انحنایی استثنایی‌اند چون تانسور ریچی به‌طور کامل تانسور انحنا را تعیین می‌کند. خمینه‌های لورنتسی با بعد سه در فیزیک نیز از اهمیت بالایی برخوردارند. اگرچه فضا–زمان چهاربعدی است، مطالعه مترهای لورنتسی سه‌بعدی برای درک فضاهای چهاربعدی تاثیر بسزایی دارد. البته حالت لورنتسی نیاز به تحلیل بیشتری دارد چون ممکن است عملگر خودالحاقی فرم نرمال ژوردن غیر بدیهی داشته باشد [۱۲، صفحه ۲۶۱]. کالوارسو نشان داد که خمینه همبند لورنتسی سه‌بعدی همگن، همبند ساده و کامل یا متقارن است، یا با یک گروه لی مجهز به متر چپ پایای لورنتسی ایزومتر است [۵]. خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی با ویژگی‌های متنوع در مقالات زیادی بررسی شده‌اند. برای مثال، خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی ایوانف–پتروفا [۸]، خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی با عملگرهای انحنایی جابه‌جایی [۹] و تقریبا سولیتون ریچی روی خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

با توجه به این‌که خمینه‌های لورنتسی سوپر–اینشتینی در بعد سه تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند. هدف ما در این مقاله، ارائه مثال‌هایی از خمینه‌های لورنتسی همگن و غیرهمگن سوپر–اینشتینی است. بر این اساس در بخش ۲ ابتدا گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی را با ارائه جزئیات دقیق از مولفه‌های تانسور انحنا و ریچی و نیز عملگر انحنا معرفی می‌کنیم. در ادامه دسته‌بندی کاملی از گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی اینشتینی در ۱.۲ ارائه شده است. سپس با در نظرگرفتن نتایج حاصل، گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی در ۲.۲ دسته‌بندی شده‌اند. برای تعمیمی از شرط اینشتینی در زیر بخش ۳.۲ گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی با شرایط اینشتینی‌گون مورد بررسی قرار گرفته است. نهایتا در بخش ۳ خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک سوپر–اینشتینی به‌عنوان مثال غیرهمگن مطالعه شده‌اند.

۲ گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی

در این بخش ابتدا به معرفی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی پرداخته و اطلاعات کاملی از تانسورهای انحنایی آن‌ها ارائه می‌دهیم. با توجه به اطلاعات به‌دست آمده گروه‌های لی لورنتسی اینشتینی، سوپر–اینشتینی و نهایتا به‌عنوان تعمیمی از شرط اینشتینی گروه‌های لی سوپر–اینشتینی را که در شرایط اینشتینی‌گون صدق می‌کنند، ارائه می‌دهیم.

۱.۲ گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی اینشتینی

هر خمینه همگن، همبند ساده و کامل لورنتسی سه‌بعدی به‌صورت یک گروه لی است. فرض کنیم $\times$ ضرب برداری لورنتسی روی فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}^{3}_{1}$ باشد که توسط پاراکواترنیون‌ها (یعنی $u_1 \times u_2 = -u_3, u_2 \times u_3 = u_1, u_3 \times u_1 = u_2$ که در آن $\{u_1, u_2, u_3\}$ پایه متعامد یکه با علامت $(+\,+\,-)$ است.) تولید می‌شود. کروشه لی $[,]$ جبر لی متناظر $\mathfrak{g}$ از یک گروه لی را تعریف می‌کند که تک‌مدولی است اگر و تنها اگر اینومورفیسم L تعریف شده توسط $[X,Y] = L(X \times Y)$ خودالحاقی باشد و غیر تک‌مدولی است اگر و تنها اگر L خودالحاقی نباشد [۱۳]. شایان ذکر است که عملگر ریچی در حالت ریمانی همیشه قطری‌شدنی است اما در هر نقطه از خمینه لورنتسی چهار حالت می‌تواند اتفاق بیفتد. لذا عملگر ریچی در پایه متعامد یکه استاندارد به‌صورت یکی از چهار حالت زیر بیان می‌شود: [۱۲، صفحه ۲۶۱].

(۱.الف) عملگر ریچی قطری شدنی باشد، یعنی

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

(۱.ب) عملگر ریچی دارای ریشه مختلط است، یعنی

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda & \circ & \circ\\ \circ & \nu & -\mu\\ \circ & \mu & \nu\end{pmatrix},\qquad \mu\neq\circ.$$

(۲) چند جمله ای مینیمال عملگر ریچی دارای ریشه مضاعف است، یعنی

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda & \circ & \circ\\ \circ & \frac{۱}{۲}+\mu & -\frac{۱}{۲}\\ \circ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}+\mu\end{pmatrix}.$$

(۳) چند جمله ای مینیمال عملگر ریچی دارای ریشه از تکرار سه است، یعنی

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \lambda & \circ\\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \circ & \lambda\end{pmatrix}.$$

در ادامه طبقه‌بندی کاملی از گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی و غیر تک‌مدولی ارائه می‌دهیم.

گروه‌های لی تک‌مدولی

در متر لورنتسی، با بررسی فرم‌های مختلف نرمال ژوردان از ایندومورفیسم خودالحاقی L چهار کلاس زیر را برای جبرهای لی سه‌بعدی تک‌مدولی خواهیم داشت:

نوع۱.الف. L قطری شدنی با مقادیر ویژه $\{\lambda,\mu,\nu\}$ نسبت به پایه متعامد یکه $\{u_۱,u_۲,u_۳\}$ با علامت $(-++)$ باشد. در این حالت جبر لی متناظر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(\mathfrak{g}_{Ia})\quad [u_۱,u_۲]=-\nu u_۳,\qquad [u_۱,u_۳]=-\mu u_۲,\qquad [u_۲,u_۳]=\lambda u_۱.$$

تنها مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{۱۲۱۲}&=\tfrac{۱}{۴}(\lambda^۲+\mu^۲-۳\nu^۲-۲\lambda\mu+۲\lambda\nu+۲\mu\nu),\\ \mathcal{R}_{۱۳۳۱}&=\tfrac{۱}{۴}(\lambda^۲-۳\mu^۲+\nu^۲+۲\lambda\mu-۲\lambda\nu+۲\mu\nu),\\ \mathcal{R}_{۲۳۲۳}&=\tfrac{۱}{۴}(۳\lambda^۲-\mu^۲-\nu^۲-۲\lambda\mu-۲\lambda\nu+۲\mu\nu).\end{aligned}$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\begin{aligned}\varrho_{۱۱}&=\frac{۱}{۲}(-\lambda^۲+(\mu-\nu)^۲),\\ \varrho_{۲۲}&=\frac{۱}{۲}(\lambda-\mu-\nu)(\lambda+\mu-\nu),\\ \varrho_{۳۳}&=\frac{۱}{۲}(-(\lambda-\mu)^۲+\nu^۲).\end{aligned}$$

و عملگر ریچی قطری‌شدنی با مقادیر ویژه زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\lambda_۱&=\frac{۱}{۲}((\mu-\nu)^۲-\lambda^۲),\\ \lambda_۲&=\frac{۱}{۲}(\lambda+\mu-\nu)(\lambda-\mu-\nu),\\ \lambda_۳&=\frac{۱}{۲}((\lambda-\mu)^۲-\nu^۲).\end{aligned}$$

نوع۱.ب. L دارای یک ریشه مختلط باشد، دراین‌صورت نسبت به پایه متعامد یکه $\{u_1, u_2, u_3\}$ با علامت $(- + +)$ داریم

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -\mu \\ 0 & \mu & \nu \end{pmatrix}, \qquad \mu \neq 0,$$

و جبر لی متناظر برابر است با

$$(\mathfrak{g}_{Ib}) \quad [u_1, u_2] = \mu u_2 - \nu u_3, \quad [u_1, u_3] = -\nu u_2 - \mu u_3, \quad [u_2, u_3] = \lambda u_1.$$

در این حالت مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\mathcal{R}_{1212} = \mathcal{R}_{1331} = \frac{1}{4}(\lambda^2 + 4\beta^2),\ \mathcal{R}_{2323} = \frac{3}{4}\lambda^2 + \beta^2 - \lambda\nu,\ \mathcal{R}_{1213} = \mu(\lambda - 2\nu).$$

لذا مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\varrho_{11} = \frac{1}{2}(-\lambda^2 - 4\mu^2),\ \varrho_{22} = -\varrho_{33} = \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2\nu),\ \varrho_{23} = -\mu(\lambda - 2\nu),$$

و عملگر ریچی برابر است با

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\lambda^2 + 4\mu^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2\nu) & -\mu(\lambda - 2\nu) \\ 0 & \mu(\lambda - 2\nu) & \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2\nu) \end{pmatrix}, \qquad \mu \neq 0.$$

اگر $\lambda = 2\nu$، عملگر ریچی، عملگری قطری شدنی با مقادیر ویژه $\{-2(\mu^2 + \nu^2), 0, 0\}$ خواهد بود.

نوع ۲. چندجمله‌ای مینیمال L دارای ریشه مضاعف باشد، دراین‌صورت نسبت به پایه متعامد یکه $\{u_1, u_2, u_3\}$ با علامت $(- + +)$ داریم

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \mu & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \mu \end{pmatrix},$$

و جبر لی متناظر برابر است با

$$(\mathfrak{g}_{II}) \quad [u_1, u_2] = \frac{1}{2}u_2 - (\mu - \frac{1}{2})u_3, \quad [u_1, u_3] = -(\mu + \frac{1}{2})u_2 - \frac{1}{2}u_3, \quad [u_2, u_3] = \lambda u_1.$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1212} &= \tfrac{1}{4}(\lambda^2 - 2\lambda + 4\mu), & \mathcal{R}_{1313} &= \tfrac{1}{4}(\lambda^2 + 2\lambda - 4\mu), \\ \mathcal{R}_{2323} &= \tfrac{1}{4}\lambda(3\lambda - 4\mu), & \mathcal{R}_{1231} &= \tfrac{1}{2}\lambda - \mu. \end{aligned}$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\begin{aligned} \varrho_{11} &= -\tfrac{1}{2}\lambda^2, & \varrho_{22} &= \tfrac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda - 2\mu), \\ \varrho_{23} &= -\tfrac{1}{2}\lambda + \mu, & \varrho_{33} &= -\tfrac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda - 2\mu). \end{aligned}$$

لذا عملگر ریچی به‌صورت

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda - 2\mu) & -\frac{1}{2}\lambda + \mu \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda - \mu & \frac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda - 2\mu) \end{pmatrix},$$

با مقادیر ویژه $-\frac{1}{2}\lambda^2$ و $\frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2\mu)$ با تکرار دو است. واضح است که اگر $\lambda = 0$ و $\mu \neq 0$، در این حالت عملگر ریچی پوچ‌توان مرتبه دو است.

نوع ۳. چند جمله‌ای مینیمال L دارای ریشه با تکرار سه باشد، دراین‌صورت نسبت به پایه متعامد یکه $\{u_{۱}, u_{۲}, u_{۳}\}$ با علامت $(-++)$ داریم

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \lambda & ۰ \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \lambda \end{pmatrix},$$

و جبر لی متناظر برابر است با

$$(\mathfrak{g}_{III}) \quad [u_{۱}, u_{۲}] = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}u_{۱} - \lambda u_{۳}, \quad [u_{۱}, u_{۳}] = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}u_{۱} - \lambda u_{۲},$$
$$[u_{۲}, u_{۳}] = \lambda u_{۱} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}u_{۲} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}u_{۳}.$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\mathcal{R}_{۱۲۱۲} = \tfrac{۱}{۴}(\lambda^{۲} + ۴), \quad \mathcal{R}_{۱۳۱۳} = ۱ - \tfrac{۱}{۴}\lambda^{۲}, \quad \mathcal{R}_{۲۳۳۲} = \tfrac{۱}{۴}\lambda^{۲},$$
$$\mathcal{R}_{۱۲۱۳} = ۱, \qquad \mathcal{R}_{۱۲۳۲} = \mathcal{R}_{۱۳۳۲} = \tfrac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda,$$

و مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\varrho_{۱۱} = -\tfrac{۱}{۲}\lambda^{۲}, \qquad \varrho_{۱۲} = -\tfrac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda, \quad \varrho_{۱۳} = -\tfrac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda,$$
$$\varrho_{۲۲} = -\tfrac{۱}{۲}(\lambda^{۲} + ۲), \quad \varrho_{۲۳} = -۱, \qquad \varrho_{۳۳} = \tfrac{۱}{۲}(\lambda^{۲} - ۲).$$

عملگر ریچی به‌صورت

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲}\lambda^{۲} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda & -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda \\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda & -\frac{۱}{۲}(\lambda^{۲} + ۲) & -۱ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\lambda & ۱ & ۱ - \frac{۱}{۲}\lambda^{۲} \end{pmatrix},$$

است که در آن مقدار ویژه $-\frac{۱}{۲}\lambda^{۲}$ ریشه با تکرار سه، چندجمله‌ای مینیمال است. اگر $\lambda = ۰$ در این‌صورت عملگر ریچی پوچ‌توان مرتبه دو است.

گروه‌های لی غیر تک‌مدولی

در ادامه حالت غیر تک‌مدولی را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم G گروه لی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی با متر لورنتسی چپ پایا باشد. در این صورت هسته غیر تک‌مدولی $\mathfrak{u}$ جبر لی $\mathfrak{g}$ از G به‌صورت

$$\mathfrak{u} = ker\{X \in \mathfrak{g} \mid tr\, ad(X) = ۰\},$$

تعریف می‌شود. کوردرو و پارکر [۷] نشان دادند که جبرهای لی لورنتسی غیر تک‌مدولی از انحنای مقطعی غیرثابت در پایه مناسب $\{u_{۱}, u_{۲}, u_{۳}\}$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(\mathfrak{g}_{IV}) \quad [u_{۱}, u_{۲}] = ۰, \qquad [u_{۱}, u_{۳}] = \lambda u_{۱} + \mu u_{۲}, \qquad [u_{۲}, u_{۳}] = \nu u_{۱} + \kappa u_{۲}, \qquad \lambda + \kappa \neq ۰,$$

که در آن یکی از شرایط زیر برقرار است:

(۱.۴) $\{u_{۱}, u_{۲}, u_{۳}\}$ پایه متعامد یکه با شرایط $-\langle u_{۱}, u_{۱}\rangle = \langle u_{۲}, u_{۲}\rangle = \langle u_{۳}, u_{۳}\rangle = ۱$ و $\lambda\nu - \mu\kappa = ۰$ باشد. در این حالت جبر لی با $IV.a$ نمایش داده می‌شود.

(۲.۴) $\{u_{۱}, u_{۲}, u_{۳}\}$ پایه متعامد یکه با شرایط $\langle u_{۱}, u_{۱}\rangle = \langle u_{۲}, u_{۲}\rangle = -\langle u_{۳}, u_{۳}\rangle = ۱$ و $\lambda\nu + \mu\kappa = ۰$ باشد. در این حالت جبر لی با $IV.b$ نمایش داده می‌شود.

(۳.۴) $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ پایه شبه متعامد یکه با

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{pmatrix},$$

و نیز شرط $\lambda\nu = ۰$ برای ضرایب جبر لی برقرار باشد. در این حالت جبر لی با $IV.c$ نمایش داده می‌شود.

حال فرض کنیم $\mathfrak{g}_{IV}$ جبر لی متناظر با $IV.a$ باشد. در این حالت مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\mathcal{R}_{۱۲۲۱} = \tfrac{۱}{۴}(\mu^۲ + \nu^۲ + ۴\lambda\kappa - ۲\mu\nu),$$
$$\mathcal{R}_{۱۳۳۱} = \tfrac{۱}{۴}(۴\lambda^۲ - ۳\mu^۲ + \nu^۲ + ۲\mu\nu),$$
$$\mathcal{R}_{۲۳۲۳} = \tfrac{۱}{۴}(\mu^۲ - ۳\nu^۲ + ۴\kappa^۲ + ۲\mu\nu).$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\varrho_{۱۱} = \frac{۱}{۲}((\nu^۲ - \mu^۲) + ۲\lambda(\lambda + \kappa)),$$
$$\varrho_{۱۲} = \lambda\nu - \mu\kappa,$$
$$\varrho_{۲۲} = \frac{۱}{۲}((\nu^۲ - \mu^۲) - ۲\kappa(\lambda + \kappa)),$$
$$\varrho_{۳۳} = \frac{۱}{۲}((\nu - \mu)^۲ - ۲(\lambda^۲ + \kappa^۲)).$$

بنابراین عملگر ریچی قطری‌شدنی با مقادیر ویژه زیر است:

$$\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}((\mu^۲ - \nu^۲) - ۲\lambda(\lambda + \kappa)),$$
$$\lambda_۲ = \frac{۱}{۲}((\nu^۲ - \mu^۲) - ۲\kappa(\lambda + \kappa)),$$
$$\lambda_۳ = \frac{۱}{۲}((\mu - \nu)^۲ - ۲(\lambda^۲ + \kappa^۲)).$$

حال اگر $\mathfrak{g}_{IV}$ جبر لی متناظر با $IV.b$ باشد، آن‌گاه مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا به‌صورت زیرند:

$$\mathcal{R}_{۱۲۲۱} = \lambda\kappa - \tfrac{۱}{۴}(\mu + \nu)^۲,$$
$$\mathcal{R}_{۱۳۱۳} = \tfrac{۱}{۴}(۴\lambda^۲ + ۳\mu^۲ - \nu^۲ + ۲\mu\nu),$$
$$\mathcal{R}_{۲۳۳۲} = \tfrac{۱}{۴}(\mu^۲ - ۳\nu^۲ - ۴\kappa^۲ - ۲\mu\nu).$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\varrho_{۱۱} = \frac{۱}{۲}(\mu^۲ - \nu^۲ + ۲\lambda(\lambda + \kappa)),$$
$$\varrho_{۱۲} = \lambda\nu + \mu\kappa,$$
$$\varrho_{۲۲} = -\frac{۱}{۲}(\mu^۲ - \nu^۲ - ۲\kappa(\lambda + \kappa)),$$
$$\varrho_{۳۳} = -\frac{۱}{۲}((\mu + \nu)^۲ + ۲(\lambda^۲ + \kappa^۲)).$$

بنابراین عملگر ریچی قطری‌شدنی با مقادیر ویژه زیر است:

$$\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}(\mu^۲ - \nu^۲ + ۲\lambda(\lambda + \kappa)),$$
$$\lambda_۲ = \frac{۱}{۲}(\nu^۲ - \mu^۲ + ۲\kappa(\lambda + \kappa)),$$
$$\lambda_۳ = \frac{۱}{۲}((\mu + \nu)^۲ + ۲(\lambda^۲ + \kappa^۲)).$$

فرض کنیم $\mathfrak{g}_{IV}$ جبر لی متناظر با $IV.c$ باشد. در این حالت مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنا برابرند با

$$\mathcal{R}_{۱۲۳۱} = \tfrac{۱}{۴}\nu^{۲}, \quad \mathcal{R}_{۱۳۱۳} = \lambda^{۲} - \lambda\kappa + \mu\nu, \quad \mathcal{R}_{۲۳۲۳} = \tfrac{۳}{۴}\nu^{۲}.$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\begin{array}{ll} \varrho_{۱۱} = -\tfrac{۱}{۲}\nu^{۲}, & \varrho_{۱۳} = -\lambda\nu, \\ \varrho_{۲۳} = -(\lambda^{۲} + \mu\nu - \lambda\kappa), & \varrho_{۳۳} = \tfrac{۱}{۲}\nu^{۲}, \end{array}$$

و عملگر ریچی برابر است با

$$Q = \begin{pmatrix} -\tfrac{۱}{۲}\nu^{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \tfrac{۱}{۲}\nu^{۲} & \lambda^{۲} + \mu\nu - \lambda\kappa \\ ۰ & ۰ & \tfrac{۱}{۲}\nu^{۲} \end{pmatrix},$$

که دارای مقادیر ویژه $\lambda_۱ = -\tfrac{۱}{۲}\nu^{۲}$ و $\lambda_۲ = \lambda_۳ = \tfrac{۱}{۲}\nu^{۲}$ است. اگر $\nu = ۰$ باشد، دراین‌صورت عملگر ریچی پوچ‌توان مرتبه دو است مگراین‌که $\lambda(\lambda - \kappa) = ۰$ (در این حالت متر تخت است).

یک دسته‌بندی کامل از گروه‌های لی لورنتسی تک‌مدولی و غیر تک‌مدولی اینشتینی به‌صورت زیر است:

لم ۱.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی G اینشتینی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{Ia}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = -\nu u_۳, \quad [u_۱, u_۳] = -\mu u_۲, \quad [u_۲, u_۳] = \lambda u_۱, \\ \mu = \nu, \lambda = ۰, \text{ یا } \lambda = \nu, \mu = ۰, \\ \text{ یا } \lambda = \mu, \nu = ۰, \text{ یا } \lambda = \mu = \nu. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{II}) \left\{ [u_۱, u_۲] = \tfrac{۱}{۲}u_۲ + \tfrac{۱}{۲}u_۳, \qquad [u_۱, u_۳] = -\tfrac{۱}{۲}u_۲ - \tfrac{۱}{۲}u_۳, \qquad [u_۲, u_۳] = ۰. \right.$$

اثبات. برای بررسی شرط اینشتینی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی تمام جبرهای لی تک‌مدولی را بررسی می‌کنیم. برای نمونه ما جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ را بررسی می‌کنیم. اثبات بقیه حالت‌ها به‌همین شکل خواهد بود.

با استفاده از مولفه‌های تانسور ریچی جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ و شرط اینشتینی نتیجه می‌شود که جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ اینشتینی است هرگاه دستگاه معادلات زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases} \lambda^{۲} - \mu^{۲} - \nu^{۲} + ۲(\mu\nu + c) = ۰, \\ \lambda^{۲} - \mu^{۲} + \nu^{۲} - ۲(\lambda\nu + c) = ۰, \\ \lambda^{۲} + \mu^{۲} - \nu^{۲} - ۲(\lambda\mu + c) = ۰. \end{cases}$$

به‌آسانی با حل دستگاه معادلات اخیر نتیجه می‌شود که جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{array}{l} \mu = \nu, \quad \lambda = ۰, \\ \lambda = \nu, \quad \mu = ۰, \\ \lambda = \mu, \quad \nu = ۰, \\ \lambda = \mu = \nu = ۰. \end{array}$$

□

لم ۲.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی G اینشتینی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.a}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = ۰, \qquad [u_۱, u_۳] = \lambda u_۱ + \mu u_۲, \qquad [u_۲, u_۳] = \nu u_۱ + \kappa u_۲, \\ \lambda = \pm\mu, \quad \nu = \pm\kappa, \text{ یا } \lambda = \kappa, \quad \mu = \nu. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.b}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = ۰, \qquad [u_۱, u_۳] = \lambda u_۱ + \mu u_۲, \qquad [u_۲, u_۳] = \nu u_۱ + \kappa u_۲, \\ \lambda = \kappa, \quad \mu = -\nu = ۰, \text{ یا } \lambda = \kappa, \quad \mu = \nu = ۰. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.c}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = ۰, \qquad [u_۱, u_۳] = \lambda u_۱ + \mu u_۲, \qquad [u_۲, u_۳] = \nu u_۱ + \kappa u_۲, \\ \lambda = \nu = ۰, \text{ یا } \lambda = \kappa, \quad \nu = ۰. \end{cases}$$

اثبات. برای بررسی شرط اینشتینی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی تمام جبرهای لی غیر تک‌مدولی را بررسی می‌کنیم. ما تنها جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.a})$ را بررسی می‌کنیم. بقیه حالت‌ها اثباتی مشابه با همین حالت دارند.

مولفه‌های تانسور ریچی جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.a})$ و شرط اینشتینی نشان می‌دهد که جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.a})$ اینشتینی است هرگاه دستگاه معادلات زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases} \mu^۲ - \nu^۲ - ۲(\lambda^۲ + \lambda\kappa + c) = ۰, \\ \mu^۲ - \nu^۲ + ۲(\kappa^۲ + \lambda\kappa + c) = ۰, \\ \mu^۲ + \nu^۲ - ۲(\lambda^۲ + \kappa^۲ + \mu\kappa + c) = ۰. \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات اخیر نتیجه می‌شود که جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.a})$ اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lambda = \pm\mu, \quad \nu = \pm\kappa,$$
$$\lambda = \kappa, \quad \mu = \nu.$$

□

مثال ۳.۲. گروه سه‌بعدی هایزنبرگ $H_۳$ ، گروه ماتریس‌های ۳ × ۳ بالا مثلثی

$$\begin{pmatrix} ۱ & -x & z \\ ۰ & ۱ & y \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},$$

است که در آن $x, y, z \in \mathbb{R}$ است. جبر لی $H_۳$ دارای پایه به‌صورت زیر است:

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z},$$

به‌طوری‌که تنها کروشه غیرصفر آن $[X, Y] = Z$ است. با انتخاب پایه $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ برای $H_۳$ با ضرب داخلی

$$< u_۱, u_۱ >=< u_۲, u_۲ >= - < u_۳, u_۳ >= ۱$$

به‌صورت

$$u_۱ = Z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad u_۲ = Y = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad u_۳ = -X = \frac{\partial}{\partial x},$$

مولفه‌های غیرصفر تانسور ریچی برابرند با

$$\varrho_{۱۱} = \varrho_{۳۳} = \frac{۱}{۲}, \quad \varrho_{۲۲} = -\frac{۱}{۲}.$$

واضح است که $H_۳$ اینشتینی نیست.

۲.۲ گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی

در این‌جا شرط سوپر–اینشتینی را روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی و غیر تک‌مدولی بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی G سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{Ia}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = -\nu u_۳, \quad [u_۱, u_۳] = -\mu u_۲, \quad [u_۲, u_۳] = \lambda u_۱, \\ \mu = \nu, \quad \lambda = ۰, \text{ یا } \lambda = \nu, \quad \mu = ۰, \\ \text{ یا } \lambda = \mu, \quad \nu = ۰. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{II}) \left\{ [u_۱, u_۲] = \tfrac{۱}{۲}u_۲ + \tfrac{۱}{۲}u_۳, \qquad [u_۱, u_۳] = -\tfrac{۱}{۲}u_۲ - \tfrac{۱}{۲}u_۳, \qquad [u_۲, u_۳] = ۰. \right.$$

اثبات. برای بررسی شرط سوپر–اینشتینی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی تمام جبرهای لی تک‌مدولی اینشتینی ارائه‌شده در زیر بخش ۱.۲ را بررسی می‌کنیم.

نوع۱.الف. ابتدا با استفاده از تانسور انحنای جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ تانسور $\check{\mathcal{R}}$ را با استفاده از رابطه (۲.۱) محاسبه می‌کنیم. مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$
\begin{aligned}
\check{\mathcal{R}}_{11} &= \frac{1}{4}(\lambda^4 + 5(\mu^4 + \nu^4)) - \mu^3(2\lambda + \nu) + \frac{1}{2}\mu^2(\lambda^2 - \nu^2 + 4\lambda\nu) \\
&\quad - \mu\nu(\nu - \lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda\nu^2(\lambda - 4\nu), \\
\check{\mathcal{R}}_{22} &= \frac{1}{4}(5(\lambda^4 + \nu^4) + \mu^4) - \lambda^3(2\mu + \nu) + \frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2 - \nu^2 + 4\mu\nu) \\
&\quad - \lambda\nu(\nu - \mu)^2 + \frac{1}{2}\mu\nu^2(\mu - 4\nu), \\
\check{\mathcal{R}}_{33} &= -\frac{1}{4}(5(\lambda^4 + \mu^4) + \nu^4) + \lambda^3(\mu + 2\nu) + \frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2 - \nu^2 - 4\mu\nu) \\
&\quad + \lambda\mu(\nu - \mu)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\nu(4\mu - \nu).
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\|^2 &= \frac{11}{4}\lambda^4 - 3\lambda^3(\mu + \nu) + \frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2 + \nu^2 + 6\mu\nu) - 3\lambda(\nu + \mu)(\nu - \mu)^2 \\
&\quad + \frac{11}{4}(\lambda^2 + \frac{10}{11}\mu\nu + \mu^2)(\nu - \mu)^2.
\end{aligned}
$$

بنابراین جبر لی $(\mathfrak{g}_{Ia})$ سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$
\begin{aligned}
&\mu = \nu, \quad \lambda = 0, \\
&\lambda = \nu, \quad \mu = 0, \\
&\lambda = \mu, \quad \nu = 0.
\end{aligned}
$$

نوع۲. مولفه‌های تانسور انحنای جبر لی $(\mathfrak{g}_{II})$ نشان می‌دهد که مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$
\begin{aligned}
\check{\mathcal{R}}_{11} &= \frac{1}{4}\lambda^4, \\
\check{\mathcal{R}}_{22} &= \frac{5}{4}\lambda^4 - \lambda^3(3\mu + \frac{1}{2}) + \lambda^2\mu(2\mu + 1), \\
\check{\mathcal{R}}_{23} &= \frac{1}{2}\lambda^2(\lambda - 2\mu), \\
\check{\mathcal{R}}_{33} &= -\frac{5}{4}\lambda^4 - \lambda^3(3\mu - \frac{1}{2}) - \lambda^2\mu(2\mu - 1).
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم

$$
\|\mathcal{R}\|^2 = \frac{11}{4}\lambda^4 - 6\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2.
$$

بنابراین جبر لی $(\mathfrak{g}_{II})$ سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$
\lambda = \mu = 0.
$$

$\square$

قضیه ۵.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی G سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.a}})\begin{cases} [u_۱,u_۲]=۰, & [u_۱,u_۳]=\lambda u_۱+\mu u_۲, \qquad [u_۲,u_۳]=\nu u_۱+\kappa u_۲,\\ \lambda=\pm\mu, \quad \nu=\pm\kappa, \text{ یا } \lambda=\kappa, \quad \mu=\nu. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.b}})\begin{cases} [u_۱,u_۲]=۰, & [u_۱,u_۳]=\lambda u_۱+\mu u_۲, \qquad [u_۲,u_۳]=\nu u_۱+\kappa u_۲,\\ \lambda=\kappa, \quad \mu=-\nu. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.c}})\begin{cases} [u_۱,u_۲]=۰, & [u_۱,u_۳]=\lambda u_۱+\mu u_۲, \qquad [u_۲,u_۳]=\nu u_۱+\kappa u_۲,\\ \lambda=\nu=۰, \text{ یا } \lambda=\kappa, \quad \nu=۰. \end{cases}$$

اثبات. برای بررسی شرط سوپر–اینشتینی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی تمام جبرهای لی غیر تک‌مدولی اینشتینی ارائه‌شده در زیر بخش ۱.۲ را بررسی می‌کنیم.

نوع۲.الف. ابتدا با استفاده از تانسور انحنای جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.a})$ تانسور $\check{\mathcal{R}}$ را محاسبه می‌کنیم. مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$\begin{aligned}
\check{\mathcal{R}}_{۱۱} &= -\frac{۱}{۴}(۸\lambda^۴+۵\mu^۴+\nu^۴)-\lambda^۲(۳\mu^۲+\nu^۲-۲\kappa^۲-۲\mu\nu)\\
&\quad -\lambda\kappa(\mu+\nu)^۲-\frac{۱}{۲}\mu^۲(\nu^۲-۴\kappa^۲)+۲\mu^۳\nu,\\
\check{\mathcal{R}}_{۱۲} &= (\lambda\nu-\kappa\mu)(-۲\lambda^۲+\mu^۲+\nu^۲-۲\kappa^۲-۲\mu\nu),\\
\check{\mathcal{R}}_{۲۲} &= \frac{۱}{۴}(\mu^۴+۵\nu^۴+۸\kappa^۴)+\nu^۲(-۲\lambda^۲+\frac{۱}{۲}\mu^۲-۳\kappa^۲+\lambda\kappa)\\
&\quad +۲\mu\nu\kappa(\lambda+\kappa)+\kappa^۲(۲\lambda^۲-\mu^۲)-\mu(۲\nu^۳-\lambda\mu\kappa),\\
\check{\mathcal{R}}_{۳۳} &= ۲(\lambda^۴+\kappa^۴)+\frac{۵}{۴}(\mu^۴+\nu^۴)-\mu^۲(۳\lambda^۲+\frac{۱}{۲}\nu^۲+۳\kappa^۲)\\
&\quad -\mu\nu(۲\lambda^۲-\nu^۲+۲\kappa^۲+۸\lambda\kappa)-۳\nu^۲(\lambda^۲+\kappa^۲)-\mu^۳\nu.
\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\|^۲ &= ۴(\lambda^۴+\kappa^۴)+\frac{۱۱}{۴}(\mu^۴+\nu^۴)-\mu^۲(۶\lambda^۲-\frac{۱}{۲}\nu^۲+۶\kappa^۲-۲\lambda\kappa)-\nu^۲(۶\lambda^۲+۶\kappa^۲-۸\lambda\kappa)\\
&\quad +\mu\nu(۴\lambda^۲-۳\nu^۲+۱۲\lambda\kappa-۴\kappa^۲)+۴\lambda^۲\kappa^۲-۳\mu^۳\nu.
\end{aligned}$$

بنابراین جبر لی $(\mathfrak{g}_{Iv.a})$ سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&\lambda=\pm\mu, \quad \nu=\pm\kappa\\
&\lambda=\kappa, \quad \mu=\nu.
\end{aligned}$$

نوع۲.ب. مولفه‌های تانسور انحنای جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.b})$ نشان می‌دهد که مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$\begin{aligned}
\check{\mathcal{R}}_{۱۱} &= \frac{۱}{۴}(۸\lambda^۴+۵\mu^۴+\nu^۴)+\lambda^۲(۳\mu^۲+\nu^۲+۲\kappa^۲+۲\mu\nu)\\
&\quad -\lambda\kappa(\nu-\mu)^۲+\frac{۱}{۲}\mu^۲(\nu^۲+۴\kappa^۲)+۲\mu^۳\nu,\\
\check{\mathcal{R}}_{۱۲} &= (\lambda\nu+\kappa\mu)(۲\lambda^۲+\mu^۲+\nu^۲+۲\kappa^۲+۲\mu\nu),\\
\check{\mathcal{R}}_{۲۲} &= \frac{۱}{۴}(\mu^۴+۵\nu^۴+۸\kappa^۴)+\nu^۲(۲\lambda^۲+\frac{۱}{۲}\mu^۲+۳\kappa^۲-\lambda\kappa)\\
&\quad +۲\mu\nu\kappa(\lambda+\kappa)+\kappa^۲(۲\lambda^۲+\mu^۲)+\mu(۲\nu^۳-\lambda\mu\kappa),\\
\check{\mathcal{R}}_{۳۳} &= -۲(\lambda^۴+\kappa^۴)-\frac{۵}{۴}(\mu^۴+\nu^۴)-\mu^۲(۳\lambda^۲-\frac{۱}{۲}\nu^۲-۳\kappa^۲)\\
&\quad -\mu\nu(۲\lambda^۲+\nu^۲+۲\kappa^۲+۸\lambda\kappa)-۳\nu^۲(\lambda^۲+\kappa^۲)-\mu^۳\nu.
\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}\|^{۲} &= ۴(\lambda^{۴}+\kappa^{۴})+\frac{۱۱}{۴}(\mu^{۴}+\nu^{۴})+\mu^{۲}(۶\lambda^{۲}+\frac{۱}{۲}\nu^{۲}+۶\kappa^{۲}-۲\lambda\kappa)+\nu^{۲}(۶\lambda^{۲}+۶\kappa^{۲}-۸\lambda\kappa)\\ &\quad+\mu\nu(۴\lambda^{۲}+۳\nu^{۲}+۱۲\lambda\kappa+۴\kappa^{۲})+۴\lambda^{۲}\kappa^{۲}-۳\mu^{۳}\nu.\end{aligned}$$

بنابراین جبر لی $(\mathfrak{g}_{Iv.b})$ سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\lambda=\kappa,\quad \mu=-\nu.$$

نوع۲.ج. مولفه‌های تانسور انحنای جبر لی $(\mathfrak{g}_{IV.c})$ نشان می‌دهد که مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{R}}_{۱۱}&=\frac{۱}{۴}\nu^{۴},\\ \check{\mathcal{R}}_{۱۳}&=-\lambda\nu^{۳},\\ \check{\mathcal{R}}_{۲۳}&=-\frac{۵}{۴}\nu^{۴},\\ \check{\mathcal{R}}_{۳۳}&=\nu^{۲}(\mu\nu-\lambda(\lambda+\kappa)).\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\|\mathcal{R}\|^{۲}=\frac{۱۱}{۴}\nu^{۴}.$$

بنابراین جبر لی $(\mathfrak{g}_{Iv.c})$ سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}&\lambda=\nu=\circ,\\ &\lambda=\kappa,\quad \nu=\circ.\end{aligned}$$

□

مثال ۶.۲. گروه لی سه‌بعدی $E(۲)$ با شرط $\lambda=\mu>\circ$ و گروه لی سه‌بعدی $E(۱,۱)$ با شرط $\lambda=\nu>\circ$ سوپر–اینشتینی‌اند.

۳.۲ گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی کودازی و کیلینگ

شرایط اینشتینی‌گون ، یعنی شرایط دوری موازی و کودازی به‌عنوان توسیعی از شرط اینشتینی هستند. در این بخش شرط کیلینگ و کودازی را برای گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی بررسی و مثال‌های غیربدیهی را ارائه می‌دهیم. باید توجه کرد که در بعد سه شرط کودازی معادل با موضعا همدیس تخت بودن
است. خمینه لورنتسی (M,g) دوری موازی است هرگاه تانسور ریچی ϱ کیلینگ باشد؛ یعنی به‌ازای هر میدان برداری X داشته باشیم $(\nabla_X\varrho)(X,X)=\circ$ و کودازی است هرگاه به‌ازای هر میدان برداری X,Y,Z داشته باشیم $(\nabla_X\varrho)(Y,Z)=(\nabla_Y\varrho)(X,Z)$.

قضیه ۷.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی سوپر–اینشتینی G دوری موازی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{Ia}})\begin{cases}[u_{۱},u_{۲}]=-\nu u_{۳},\quad [u_{۱},u_{۳}]=-\mu u_{۲},\quad [u_{۲},u_{۳}]=\lambda u_{۱},\\ \mu=\nu,\quad \lambda=\circ,\ \text{یا}\ \lambda=\nu,\quad \mu=\circ,\\ \text{یا}\ \lambda=\mu,\quad \nu=\circ.\end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{II})\left\{\ [u_{۱},u_{۲}]=\tfrac{۱}{۲}u_{۲}+\tfrac{۱}{۲}u_{۳},\qquad [u_{۱},u_{۳}]=-\tfrac{۱}{۲}u_{۲}-\tfrac{۱}{۲}u_{۳},\qquad [u_{۲},u_{۳}]=\circ.\right.$$

اثبات. برای بررسی شرط دوری موازی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی سوپر–اینشتینی، جبرهای لی تک‌مدولی سوپر–اینشتینی قضیه ۴.۲ را بررسی می‌کنیم.

نوع۱.الف. ابتدا مشتق کواریان تانسور ریچی را محاسبه می‌کنیم. به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳$ داریم $\nabla_i \varrho_{ii} = ۰$ و با توجه به متقارن بودن تانسور انحنای ریچی داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_۱ \varrho_{۲۳} &= -\frac{۱}{۲}(\mu - \nu)(-\lambda + \mu + \nu)^۲,\\
\nabla_۲ \varrho_{۱۳} &= \frac{۱}{۲}(\lambda - \nu)(\lambda - \mu + \nu)^۲,\\
\nabla_۳ \varrho_{۱۲} &= -\frac{۱}{۲}(\lambda - \mu)(\lambda + \mu - \nu)^۲.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $X = au_۱ + bu_۲ + cu_۳$ میدان برداری دلخواه باشد که در آن a, b, c مقادیر حقیقی دلخواه‌اند. داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_X \varrho_{XX} &= a\nabla_۱ \varrho_{XX} + b\nabla_۲ \varrho_{XX} + c\nabla_۳ \varrho_{XX}\\
&= a^۳\nabla_۱\varrho_{۱۱} + ۲a^۲b\nabla_۱\varrho_{۱۲} + ۲a^۲c\nabla_۱\varrho_{۱۳}\\
&+ ab^۲\nabla_۱\varrho_{۲۲} + ۲abc\nabla_۱\varrho_{۲۳} + ac^۲\nabla_۱\varrho_{۳۳}\\
&+ a^۲b\nabla_۲\varrho_{۱۱} + ۲ab^۲\nabla_۲\varrho_{۱۲} + ۲abc\nabla_۲\varrho_{۱۳}\\
&+ b^۳\nabla_۲\varrho_{۲۲} + ۲b^۲c\nabla_۲\varrho_{۲۳} + bc^۲\nabla_۲\varrho_{۳۳}\\
&+ a^۲c\nabla_۳\varrho_{۱۱} + ۲abc\nabla_۳\varrho_{۱۲} + ۲ac^۲\nabla_۳\varrho_{۱۳}\\
&+ b^۲c\nabla_۳\varrho_{۲۲} + ۲bc^۲\nabla_۳\varrho_{۲۳} + c^۳\nabla_۳\varrho_{۳۳}.
\end{aligned} \tag{۱.۲}$$

با جایگذاری $\nabla_i \varrho_{jk}$ در فرمول (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_X \varrho_{XX} = ۲abc(&-\frac{۱}{۲}(\mu - \nu)(-\lambda + \mu + \nu)^۲\\
&+ \frac{۱}{۲}(\lambda - \mu)(\lambda - \mu + \nu)^۲\\
&- \frac{۱}{۲}(\lambda - \mu)(\lambda + \mu - \nu)^۲).
\end{aligned}$$

بنابراین جبر لی $\mathfrak{g}_{Ia}$ دوری موازی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&\mu = \nu, \quad \lambda = ۰,\\
&\lambda = \nu, \quad \mu = ۰,\\
&\lambda = \mu, \quad \nu = ۰.
\end{aligned}$$

در این حالت جبر لی سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر دوری موازی باشد.

نوع۲. در این حالت به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳$ داریم $\nabla_i \varrho_{ii} = ۰$ و با توجه به متقارن بودن تانسور ریچی داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_۱\varrho_{۲۲} = \nabla_۱\varrho_{۳۳} = -\nabla_۱\varrho_{۲۳} &= \frac{۱}{۲}(\lambda - ۲\mu)^۲\\
\nabla_۲\varrho_{۱۲} = \nabla_۳\varrho_{۱۳} &= \frac{۱}{۴}\lambda(۳\lambda - ۴\mu),\\
\nabla_۲\varrho_{۱۳} &= \frac{۱}{۴}\lambda(\lambda(-۳ + ۲\lambda - ۲\mu) + ۴\mu),\\
\nabla_۳\varrho_{۱۲} &= \frac{۱}{۴}\lambda(-\lambda(۳ + ۲\lambda) + ۲(۲ + \lambda)\mu).
\end{aligned}$$

با جایگذاری $\nabla_i \varrho_{jk}$ در فرمول (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X \varrho_{XX} &= ab^۲(\frac{۱}{۲}(\lambda - ۲\mu)^۲ + \frac{۱}{۲}\lambda(۳\lambda - ۴\mu))\\ &+ ac^۲(\frac{۱}{۲}(\lambda - ۲\mu)^۲ + \frac{۱}{۲}\lambda(۳\lambda - ۴\mu))\\ &+ abc(-(\lambda - ۲\mu)^۲ + \frac{۱}{۲}\lambda(\lambda(-۳ + ۲\lambda - ۲\mu) + ۴\mu)\\ &+ \frac{۱}{۲}\lambda(-\lambda(۳ + ۲\lambda) + ۲(۲ + \lambda)\mu)).\end{aligned}$$

بنابراین جبر لی $\mathfrak{g}_{II}$ دوری موازی است اگر و تنها اگر $\lambda = \mu = ۰$. لذا جبر لی متناظر سوپر–اینشتینی است اگر و تنها اگر دوری موازی باشد.

□

قضیه ۸.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی سوپر–اینشتینی G دوری موازی است اگر و تنها اگر توسط جبر لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{IV.c}}) \begin{cases} [u_۱, u_۲] = ۰, \qquad [u_۱, u_۳] = \lambda u_۱ + \mu u_۲, \qquad [u_۲, u_۳] = \nu u_۱ + \kappa u_۲,\\ \lambda = \nu = ۰, \text{ یا } \lambda = \kappa, \quad \nu = ۰.\end{cases}$$

اثبات. برای بررسی شرط دوری موازی روی گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی غیر تک‌مدولی سوپر–اینشتینی، جبرهای لی غیر تک‌مدولی سوپر–اینشتینی قضیه ۵.۲ را بررسی می‌کنیم.

نوع۲.الف. در این حالت به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳$ داریم $\nabla_i \varrho_{ii} = ۰$ و با توجه به متقارن بودن تانسور ریچی داریم

$$\begin{aligned}\nabla_۱ \varrho_{۱۳} &= \lambda((\mu - \nu)\nu - \lambda\delta + \delta^۲),\\ \nabla_۱ \varrho_{۲۳} &= \frac{۱}{۲}(\mu + \nu)(\lambda^۲ + (\mu - \nu)\nu + \lambda\delta + ۲\delta^۲),\\ \nabla_۲ \varrho_{۱۳} &= \frac{۱}{۲}(\mu + \nu)((\mu - \nu)\nu - \lambda\delta + \delta^۲),\\ \nabla_۲ \varrho_{۲۳} &= \delta(\lambda^۲ + \nu(\mu - \nu) + \lambda\delta + ۲\delta^۲),\\ \nabla_۳ \varrho_{۱۲} &= -\frac{۱}{۲}(\mu - \nu)(\lambda + \delta)^۲.\end{aligned}$$

لذا جبر لی $\mathfrak{g}_{IV.a}$ دوری موازی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}&\lambda = \mu = \nu = ۰, \quad \kappa \neq ۰,\\ &\mu = \nu = \kappa = ۰, \quad \lambda \neq ۰.\end{aligned}$$

در این حالت جبر لی دوری موازی، سوپر–اینشتینی نیست.

نوع۲.ب. در این حالت به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳$ داریم $\nabla_i \varrho_{ii} = ۰$ و همچنین با توجه به متقارن بودن تانسور ریچی داریم

$$\begin{aligned}\nabla_۱ \varrho_{۱۳} &= \lambda(\nu(\mu + \nu) - \lambda\delta + \delta^۲),\\ \nabla_۱ \varrho_{۲۳} &= \frac{۱}{۲}(\mu + \nu)(\lambda^۲ + \mu(\mu + \nu) - \lambda\delta),\\ \nabla_۲ \varrho_{۱۳} &= \frac{۱}{۲}(\mu + \nu)(\lambda^۲ + \nu(\mu + \nu) - \lambda\delta + \delta^۲),\\ \nabla_۲ \varrho_{۲۳} &= \delta(\lambda^۲ + \mu(\mu + \nu) - \lambda\delta),\\ \nabla_۳ \varrho_{۱۲} &= -\frac{۱}{۲}(\mu - \nu)(\lambda^۲ + \mu^۲ - \nu^۲ - \delta^۲).\end{aligned}$$

لذا جبر لی $\mathfrak{g}_{IV.b}$ دوری موازی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lambda = \mu = \nu = 0, \quad \kappa \neq 0,$$
$$\mu = \nu = \kappa = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

جبر لی دوری موازی متناظر سوپر-اینشتینی نیست.

نوع۲.ج. در این حالت به‌ازای هر $i = 1, 2$ داریم $\nabla_i \varrho_{ii} = 0$. همچنین داریم

$$\nabla_3 \varrho_{33} = -2\delta(-\mu\nu + \lambda(-\lambda + \delta)),$$

و

$$\nabla_1 \varrho_{33} = -\mu\nu^2,$$
$$\nabla_2 \varrho_{13} = \frac{1}{2}\nu^3,$$
$$\nabla_3 \varrho_{13} = -\frac{3}{2}\mu\nu^2,$$
$$\nabla_3 \varrho_{21} = -\frac{1}{2}\nu^3.$$

لذا جبر لی $\mathfrak{g}_{IV.c}$ دوری موازی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lambda = \kappa, \quad \nu = 0,$$
$$\lambda = \nu = 0,$$
$$\nu = \kappa = 0.$$

در این حالت جبر لی دوری موازی $\mathfrak{g}_{IV.c}$ سوپر-اینشتینی است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\lambda = \kappa, \quad \nu = 0,$$
$$\lambda = \nu = 0.$$

□

با روندی مشابه، نتیجه زیر را برای گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی سوپر-اینشتینی کودازی داریم.

نتیجه ۹.۲. گروه لی لورنتسی سه‌بعدی تک‌مدولی سوپر-اینشتینی G کودازی است اگر و تنها اگر توسط یکی از جبرهای لی زیر بیان شود:

$$(\mathfrak{g}_{\mathrm{Ia}}) \begin{cases} [u_1, u_2] = -\nu u_3, \quad [u_1, u_3] = -\mu u_2, \quad [u_2, u_3] = \lambda u_1, \\ \mu = \nu, \lambda = 0, \text{ یا } \lambda = \nu, \mu = 0, \\ \text{ یا } \lambda = \mu, \nu = 0. \end{cases}$$
$$(\mathfrak{g}_{II}) \left\{ [u_1, u_2] = \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3, \qquad [u_1, u_3] = -\tfrac{1}{2}u_2 - \tfrac{1}{2}u_3, \qquad [u_2, u_3] = 0. \right.$$

۳ خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی سوپر-اینشتینی همگن انحنایی مرتبه یک

خمینه لورنتسی (M, g) همگن انحنایی مرتبه k است اگر به‌ازای هر دو نقطه $p, q \in M$، ایزومتری خطی $\phi : T_pM \to T_qM$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \leq k$، $\phi^*(\nabla^i \mathcal{R}(q)) = \nabla^i \mathcal{R}(p)$. هر فضای موضعاهمگن
، همگن انحنایی مرتبه k است. برعکس اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد، همگن انحنایی مرتبه k موضعاهمگن بودن را نتیجه می‌دهد.
در این بخش شرط سوپر-اینشتینی را روی خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک بررسی می‌کنیم. خمینه‌های لورنتسی

سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک به‌طور کامل در [۳] دسته‌بندی شده‌اند. دقیقا دو کلاس از خمینه‌های لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک وجود دارد که با M_{Ia} و M_{II} نمایش داده می‌شوند.

خمینه (ناهمگن) لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک M_{Ia} که عملگر ریچی آن قطری‌شدنی است در پایه متعامد یکه $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ با $u_۳$ زمان‌گون به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
[u_۱, u_۲] &= -u_۲ - (\alpha + ۲)u_۳,\\
[u_۱, u_۳] &= -\alpha u_۲ + u_۳,\\
[u_۲, u_۳] &= ۲(\alpha + ۱)\, u_۱ - \varphi u_۲ - \varphi u_۳,
\end{aligned}$$

که در آن φ تابع دلخواه، α ثابت است و $u_۱(\varphi) = (\alpha + ۱)\varphi$. M_{Ia} موضعا همگن است اگر و تنها اگر تابع φ ثابت باشد. مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنای ریمان M_{Ia} برابرند با

$$\mathcal{R}_{۱۲۱۲} = (\alpha + ۱)^۲, \qquad \mathcal{R}_{۱۳۱۳} = -(\alpha + ۱)^۲, \qquad \mathcal{R}_{۲۳۲۳} = (\alpha + ۱)^۲ - (u_۲ + u_۳)(\varphi).$$

بنابراین، عملگر ریچی آن به‌صورت زیر است:

$$Q_{M_{Ia}} = \begin{pmatrix} -۲(\alpha + ۱)^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -(u_۲ + u_۳)(\varphi) & ۰ \\ ۰ & ۰ & -(u_۲ + u_۳)(\varphi) \end{pmatrix}.$$

پس مقادیر ویژه عملگر ریچی M_{Ia} برابرند با $\lambda_۱ = -۲(\alpha + ۱)^۲,\ \lambda_۲ = \lambda_۳ = -(u_۲ + u_۳)(\varphi)$. اگر $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳$، دراین‌صورت M_{Ia} اینشتینی خواهد بود.

خمینه (ناهمگن) لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک M_{II} که چندجمله‌ای مینیمال عملگر ریچی آن دارای ریشه مضاعف است در پایه متعامد یکه $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ با $u_۳$ زمان‌گون به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
[u_۱, u_۲] &= -(\theta + \gamma)u_۲ + \varepsilon(\beta - \theta)u_۳,\\
[u_۱, u_۳] &= \varepsilon(\beta + \theta)u_۲ + (\theta - \gamma)u_۳,\\
[u_۲, u_۳] &= ۰,
\end{aligned}$$

و

$$u_۱(\theta) = \varepsilon - ۲(\beta + \gamma)\theta, \quad (u_۲ + \varepsilon u_۳)(\theta) = ۰,$$

که در آن θ تابع، β و γ هر دو ثابت‌اند و $\varepsilon^۲ = ۱$. M_{II} موضعاهمگن است اگر و تنها اگر تابع θ ثابت باشد و یا $\beta = \gamma = ۰$ و در نتیجه θ در

$$u_۱(\theta) = \varepsilon, \quad (u_۲ + \varepsilon u_۳)(\theta) = ۰,$$

صدق کند. مولفه‌های غیرصفر تانسور انحنای ریمان M_{II} برابرند با

$$\mathcal{R}_{۱۲۱۲} = \gamma^۲ + \varepsilon, \quad \mathcal{R}_{۱۲۱۳} = -۱, \quad \mathcal{R}_{۱۳۱۳} = -\gamma^۲ + \varepsilon, \quad \mathcal{R}_{۲۳۲۳} = -\gamma^۲,$$

لذا عملگر ریچی متناظر برابر است با

$$Q_{M_{II}} = \begin{pmatrix} -۲\gamma^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲\gamma^۲ - \varepsilon & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۲\gamma^۲ + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^۲ = ۱.$$

قضیه ۱.۳. خمینه (ناهمگن) لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک M_{Ia} سوپر-اینشتینی است اگر و تنها اگر

$$(u_۲ + u_۳)(\varphi) = ۲(\alpha + ۱)^۲.$$

اثبات. ابتدا با استفاده از مولفه‌های تانسور انحنای خمینه (ناهمگن) لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک M_{Ia} و رابطه (۲.۱) تانسور $\check{\mathcal{R}}$ را محاسبه می‌کنیم. مولفه‌های غیرصفر تانسور $\check{\mathcal{R}}$ برابرند با

$$\begin{aligned}
\check{\mathcal{R}}_{11} &= 4(\alpha+1)^4,\\
\check{\mathcal{R}}_{22} &= 2(\alpha+1)^4 + 2[(\alpha+1)^4 - (u_2+u_3)(\varphi)]^2,\\
\check{\mathcal{R}}_{33} &= -2(\alpha+1)^4 - 2[(\alpha+1)^4 - (u_2+u_3)(\varphi)]^2.
\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\|\mathcal{R}\|^2 = 8(\alpha+1)^4 + 4[(\alpha+1)^4 - (u_2+u_3)(\varphi)]^2.$$

بنابراین M_{Ia} سوپر–اینشتینی است اگر و تنها

$$(u_2+u_3)(\varphi) = 2(\alpha+1)^2.$$

□

تذکر ۲.۳. عملگر ریچی خمینه (ناهمگن) لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک M_{II} نشان می‌دهد که این خمینه در شرط اینشتینی صدق نمی‌کند لذا سوپر–اینشتینی هم نیست.

۴ نتایج و بحث

در این کار یک خانواده از مثال‌های همگن سه‌بعدی را در قالب گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی طبقه‌بندی کردیم. علاوه‌براین، با توجه به این‌که شرط اینشتینی‌گون به عنوان توسیعی از شرط اینشتینی است، کلاس‌بندی به‌دست آمده برای گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی سوپر–اینشتینی را با شرایط اضافی کیلینگ و کودازی بررسی کردیم. درنهایت، به‌عنوان مثال غیرهمگن گروه‌های لی لورنتسی سه‌بعدی همگن انحنایی مرتبه یک با خاصیت سوپر–اینشتینی مطالعه شده است.

فهرست منابع

[1] Besse A. L. *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grengebiete 10. Springer, Berlin, New York (1987).

[2] Besse A. L. *Manifolds all of whose Geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grengebiete 93. Springer, Berlin, New York (1978).

[3] Bueken P, Djorić M. *Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one*, Ann. Global Anal. Geom. 18 (2000), 85–103.

[4] Boeckx E. Vanhecke L. *Unite tangent sphere bundeles with constant scalar curvature*, Czech. Math. J. 52(126), (2001), 523–544.

[5] Calvaruso G. *Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds*, J. Geom. Phys. 57 (2007), 1279–1291.

[6] Chen B.Y. Vanhecke L. *Differential geometry of geodesic spheres*, J. Reine Angew. Math. 325, (1981), 28–67.

[7] Cordero L. A, Parker Ph. *Left-invariant Lorentzian metrics on three-dimensional Lie gropus*, Rend. Mat. VII 17 (1997), 129–155.

[8] García-Río E, Haji-Badali A, Vázquez-Lorenzo R. *Lorentzian 3-manifolds with special curvature operators*, Classical Quantum Gravity. 25 (2008), 015003 (13pp).

[9] García-Río E, Haji-Badali A, Vázquez-Abal zm. E, Vázquez-Lorenzo R. *Lorentzian 3-manifolds with commuting curvature operators*, Int. J. Geom. Meth. Modern Phys. 5 (4) (2008), 557–572.

[10] Gray A, Willmore T. J. *Mean-value theorems for Riemannian manifolds*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 92 (1982), 343–364.

[11] Haji-Badali A. *Ricci almost soliton on three-dimensional manifolds with recurrent curvature*, Mediterr. J. Math. 14: 4. (2017), 1–9.

[12] O'Neill B. *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press, New York, (1983).

[13] Rahmani S. *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension trois*, J. Geom. Phys. 9 (1992), 295–302.

Three-dimensional super-Einstein Lorentzian Lie groups

P. Atashpeykar †, **A. Haji-Badali**

Department of Mathematics, Basic Sciences Faculty, University of Bonab, Bonab, Iran.

Communicated by: F. Azarpanah

Received: 2021/4/19 Accepted: 2021/8/1

Abstract:
In this paper, we classify three-dimensional super-Einstein Lorentzian Lie groups as homogeneous manifolds. For this, at first level we present a complete classification of Einstein Lorentzian Lie groups, then we complete this classification by super-Einstein condition. For some of the geometric descriptions of the classification, we study the Einstein-like conditions, that is, the Killing and Codazzi conditions, on the three-dimensional super-Einstein Lorentzian Lie groups. Finally, we present the three-dimensional super-Einstein curvature homogeneous Lorentzian manifolds of order one, for non-homogeneous examples.

Keywords: Lie group, Super-Einstein, Codazzi, Killing, Curvature homogeneous up to order one

†Corresponding author.
E-mail addresses: p.atashpeykar@ubonab.ac.ir (P. Atashpeykar), haji.badali@ubonab.ac.ir (A. Haji-Badali).