مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۴۶۳–۴۸۰

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.36874.1906

کاربرد روش موجک لژاندر همراه با قانون مربعی گاوس در حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل کسری

محسن ریاحی بنی [۱] ×
(۱) گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی سراوان، سراوان، ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۱

چکیده: در این مقاله، روشی جدید برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری غیرخطی پیشنهاد شده است. این روش تابع مجهول مسئله را توسط موجک‌های لژاندر تقریب می‌زند. برای انجام این کار، موجک‌های لژاندر به‌همراه قانون مربعی گاوس برای تبدیل مسئله به یک سیستم خطی یا غیرخطی از معادلات جبری استفاده می‌شود که این سیستم به‌سادگی با استفاده از فن‌های برنامه‌نویسی ریاضی قابل‌حل است. علاوه بر این، وجود و یکتایی راه‌حل ارائه‌شده با استفاده از برخی قضایا و لم‌ها اثبات می‌شود. همچنین تخمین خطا و تحلیل همگرایی این روش نشان داده خواهد شد. علاوه بر این، به‌منظور نشان دادن قابلیت و دقت این روش، چند مثال عددی بیان‌شده است و نتایج به‌دست‌آمده از این مثال‌ها با نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های موجک چبیشف، روش توابع کلاهی توسعه‌یافته و روش نیستروم و نیوتن – کانتورویچ مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: موجک لژاندر، مربع‌سازی گاوس، روش هم‌محلی، معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری.

رده‌بندی ریاضی: 47G20; 65T60; 34A08.

۱ مقدمه

اگرچه حسابان کسری سابقه‌ای طولانی دارد، اما در سال‌های اخیر کاربردهای بسیاری از آن در فیزیک و دیگر علوم مشاهده‌شده است. بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با استفاده از حسابان کسری مدل‌سازی کرد. کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری و معادلات انتگرال کسری، حوزه وسیعی از تحقیقات را برای بسیاری از محققان ایجاد کرده است. این محاسبات برای مدل‌سازی نوسان غیرخطی زلزله، دینامیک سیالات، رفتار میرایی وابسته به فرکانس بسیاری از مواد ویسکوالاستیک، مکانیک پیوسته و آماری، مکانیک جامدات، اقتصاد، پردازش سیگنال و نظریه کنترل به‌کار گرفته‌شده است. به‌منظور تحلیل بهتر این سیستم‌ها، لازم است که جواب این معادلات به‌دست آید. اما اغلب حل تحلیلی این معادلات ممکن نیست، بنابراین یافتن راه‌حل‌های عددی دقیق‌تر می‌تواند مفید باشد. در نوشته‌های متعدد، روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری، معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، معادلات انتگرال – دیفرانسیل کسری و سیستم‌های دینامیک با مشتقات کسری مانند روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی (روش تحلیل هموتوپی، روش تجزیه آدومیان و غیره) [۱، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳، ۲۳، ۲۸] و روش‌های عددی

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: m.riahi@saravan.ac.ir (M. Riahi Beni)

(روش‌های تفاضل متناهی، روش هم‌محلی و غیره) [۳، ۴، ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۲۲، ۲۴] ارائه شده است. می‌توانیم روش‌های مشهور دیگری را برای حل عددی این نوع معادلات بیابیم. برای مثال، می‌توان به روش‌هایی ازجمله هم‌محلی اسپلاین [۲۷] ، تبدیل دیفرانسیل کسری [۱۹] ، حداقل مربعات [۱۶] ، تابع هار منطقی [۲۱] ، روش تابع نمایی [۶] و بسیاری دیگر اشاره نمود. روش موجک چبیشف در مرجع [۱۸] برای معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری غیرخطی با شرایط مرزی مختلط استفاده‌شده است. جواب‌های تقریبی معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم از مرتبه کسری بر اساس روش هم‌محلی سینک در [۲] موردبحث قرارگرفته است. در [۱۴]، روش‌های نیستروم و نیوتن – کانتورویچ برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری با شرایط مرزی مختلط توصیف شده‌اند. در مرجع [۲۰] حل عددی معادلات انتگرال–دیفرانسیل کسری غیرخطی با هسته‌های ضعیف منفرد توسط روش توابع کلاهی توسعه‌یافته (MHFs) † مورد بحث قرار گرفته است. در [۲۵] سیستم‌های معادلات انتگرال – دیفرانسیل با استفاده از روش موجک نوع دوم طیفی چبیشف حل شده‌اند. همچنین معادلات غیرخطی انتگرال – دیفرانسیل ولترا مرتبه کسری به‌صورت عددی با استفاده از روش موجک اویلر توسط ونگ حل شده است [۲۶] . در [۷] روش اصلاح‌شده‌ی تجزیه لاپلاس آدومیان برای حل معادلات انتگرال ولترا – فردهلم غیرخطی به‌کار گرفته شده است. عرفانیان و همکارانش [۵] از پایه‌های موجک هار برای حل معادله انتگرال – دیفرانسیل استفاده نموده‌اند. در [۱۲] از توابع بلاک – پالس برنشتاین پیوندی برای حل سیستم معادلات انتگرال – دیفرانسیل کسری استفاده شده است.

چندجمله‌ای‌ها و توابع متعامد به‌دلیل داشتن برخی ویژگی‌های درخور، برای حل مسایل مختلف مناسب‌اند. این توابع به‌همراه روش‌هایی ازجمله هم‌محلی، گالرکین و تاو برای حل معادلات به‌کار گرفته شده‌اند؛ که باعث می‌شوند معادلات مورد بررسی به یک سیستم از معادلات جبری تبدیل شوند. در این مقاله، موجک‌های لژاندر برای به‌دست آوردن پاسخ معادلات FVFIDEs به‌کار گرفته شده‌اند. این معادلات در یک فضای باناخ به‌شکل زیر داده می‌شوند:

$$\left({}_{\circ}^{C}D_x^{\alpha}y\right)(x)+Vy(x)+Fy(x)=g(x),\quad m-۱<\alpha\leq m,\quad m\in\mathbb{N},\tag{۱.۱}$$

که در آن ${}_{\circ}^{C}D_x^{\alpha}$ مشتق کسری از نوع کاپوتو است، $g(x)$ تابع پیوسته و معلوم است، $x\in J=[a,b]$، $y(x)$ تابع مجهول مسئله و

$$Vy(x)=\int_a^x k_۱(x,\xi)N_۱(y(\xi))\,d\xi,\quad Fy(x)=\int_a^b k_۲(x,\xi)N_۲(y(\xi))\,d\xi,$$

که در آن $k_i:J\times J\to\mathbb{R}$، $i=۱,۲$ توابع پیوسته بوده و $N_i:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $i=۱,۲$ توابع پیوسته غیرخطی لیپ‌شیتزاند. معادله (۱.۱) تحت تسلط شرایط مرزی زیر قرار دارد:

$$\sum_{j=۱}^{m}\left[\lambda_{ij}y^{(j-۱)}(a)+\eta_{ij}y^{(j-۱)}(b)\right]=\gamma_i,\quad i=۱,۲,\ldots,m.\tag{۲.۱}$$

مهم‌ترین مشخصه‌ی این تکنیک این است که این مسایل را به یک سیستم جبری از معادلات تبدیل می‌نماید. این رویکرد مبتنی بر تبدیل معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری (FVFIDEs) ‡ به معادلات انتگرالی ترکیبی ولترا – فردهلم از طریق یکپارچه‌سازی، تقریب جملات مختلف در معادله با استفاده از سری بریده‌شده موجک لژاندر و استفاده از ماتریس‌های عملیاتی برای حذف انتگرال، مشتق و عملگرهای حاصل‌ضرب بنا نهاده شده است.

ادامه مقاله بدین شرح سازمان‌دهی‌شده است: در بخش دوم، برخی مقدمات مهم ریاضی و تعاریف مختلف از حسابان کسری آورده شده است. در بخش سوم، خواص موجک‌های لژاندر و تقریب توابع موردبحث قرارگرفته است. در بخش بعدی، روش موجک لژاندر مربعی گاوس (GQLWM) § برای حل FVFIDEs ساخته شده است. در بخش پنجم، همگرایی و تحلیل خطا از روش GQLWM موردبحث قرارگرفته است. یکتایی و وجود جواب در بخش ششم بیان شده است. در بخش هفتم به‌منظور نشان دادن کارایی و دقت روش بیان‌شده، دو مثال عددی ارائه گردیده و در بخش آخر نیز، به‌طور مختصری نتایج آورده شده است.

۲ تعاریف پایه‌ای و اطلاعاتی از حسابان کسری

در این بخش، به بیان برخی خواص و تعاریف از محاسبات کسری که در ادامه مقاله مورد نیازند، خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۲. تابع گاما ذاتا با حسابان کسری گره خورده است. تعریف این تابع به‌شکل زیر است:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-\xi}\xi^{\alpha-۱}d\xi,\quad \mathrm{Re}(\alpha)>\circ.$$

† Modification of hat functions

‡ Fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations

§ Gauss quadrature Legendre wavelet method

تعریف ۲.۲. برای هر $x > \circ$ و $\theta \in \mathbb{R}$ گوییم تابع حقیقی $g(x)$، در فضای C_θ قرارگرفته است اگر عددی حقیقی چون $p > \theta$ موجود باشد به‌طوری که $g(x) = x^p g_1(x)$، که در آن $g_1(x) \in C[\circ, \infty)$ و می‌گوییم تابع $g(x)$ در فضای C_θ^k قرار دارد هرگاه $g^{(k)} \in C_\theta$ که در آن $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\circ\}$.

تعریف ۳.۲. انتگرال کسری ریمان – لیوویل از مرتبه $\alpha > \circ$، از تابع $g \in C_\theta$، $\theta \geq -1$ به‌صورت زیر تعریف‌شده است:

$$ {}_\circ I_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\circ^x (x-\xi)^{\alpha-1} g(\xi) d\xi. $$

برخی خواص انتگرال کسری ریمان – لیوویل به‌صورت زیر قابل بیان‌اند:

۱. ${}_\circ I_x^\circ g(x) = g(x)$

۲. $\left({}_\circ I_x^\alpha {}_\circ I_x^\beta g\right)(x) = \left({}_\circ I_x^\beta {}_\circ I_x^\alpha g\right)(x) = \left({}_\circ I_x^{\alpha+\beta} g\right)(x)$

۳. ${}_\circ I_x^\alpha (x-\mu)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} (x-\mu)^{\alpha+\lambda}$

۴. مشابه با انتگرال‌گیری مرتبه صحیح، انتگرال کسری ریمان – لیوویل یک عملگر خطی است، بدین معنی که

$$ {}_\circ I_x^\alpha \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^m c_i \left({}_\circ I_x^\alpha f_i(x) \right), $$

که در آن $\{c_i\}_{i=1}^m$ ثابت‌اند.

تعریف ۴.۲. مشتق کسری تابع $g(x)$ در مفهوم کاپوتو برای هر $n - 1 < \alpha \leq n$، $n \in \mathbb{N}$، $x > \circ$ و $g \in C_{-1}^n$ به‌شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$ {}_\circ^C D_x^\alpha g(x) = {}_\circ I_x^{n-\alpha} g^{(n)}(x). $$

روابط بین عملگر ریمان – لیوویل و عملگر کاپوتو در لم زیر آورده شده است.

لم ۵.۲. اگر $n - 1 < \alpha \leq n$، $n \in \mathbb{N}$، آنگاه

$$ {}_\circ^C D_x^\alpha {}_\circ I_x^{n-\alpha} g(x) = g(x), $$

و

$$ {}_\circ I_x^{n-\alpha} {}_\circ^C D_x^\alpha g(x) = g(x) - \sum_{k=\circ}^{n-1} g^{(k)}(\circ^+) \frac{x^k}{k!}, \quad x > \circ. $$

۳ موجک‌های لژاندر و تقریب توابع

موجک‌ها خانواده بزرگی از توابع‌اند که توسط اتساع و انتقال از یک تابع منفرد، به‌نام موجک مادر تولید می‌شوند. زمانی که پارامتر اتساع a و پارامتر انتقال b پیوسته باشند، خانواده موجک‌های پیوسته به‌صورت زیر را خوهیم داشت:

$$ \Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq \circ. $$

اگر پارامترهای a و b را محدود به مقادیر گسسته‌ی $a = a_\circ^{-k}$ و $b = nb_\circ a_\circ^{-k}$ نماییم، (که در آن $a_\circ > \circ$، $b_\circ > \circ$ و n، k اعداد صحیح و مثبت‌اند) خانواده‌ی موجک‌های گسسته به‌فرم زیر به‌دست خواهد آمد:

$$ \psi_{k,n}(x) = |a_\circ|^{\frac{k}{2}} \psi(a_\circ^k x - nb_\circ), $$

که در آن $\psi_{k,n}(x)$ شکل پایه موجک در $L^2(\mathbb{R})$ است. به‌طور خاص، با مقادیر $a_\circ = 2$ و $b_\circ = 1$، $\psi_{k,n}(x)$ فرم پایه متعامد یکه است. موجک‌های لژاندر $\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x)$ چهار پارامتر دارند؛ برای $\hat{n} = 2n - 1$ $n = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$،

$k \in \mathbb{Z}^+$، عدد m به‌عنوان درجه چندجمله‌ای‌های لژاندر و x که بیان‌گر زمان نرمال‌شده است. این چندجمله‌ای‌ها در بازه $[0, 1)$ تعریف شده و به‌شکل زیرند:

$$\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}}(2m+1)^{\frac{1}{2}} L_m^*(x), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \le x < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, \text{otherwise}, \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که در آن $m = 0, 1, \ldots, M-1$، $n = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ و اعداد $a = 2^{-k}$ و $b = \hat{n}2^{-k}$ به‌ترتیب پارامترهای اتساع و انتقال نامیده می‌شوند. $L_m^*(x) = L_m(2^k x - \hat{n})$ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته در بازه $[0, 1)$ اند که نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ در این بازه متعامدند. همچنین، L_m-ها توسط فرمول بازگشتی زیر قابل محاسبه اند:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x,$$
$$L_{m+1}(x) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right) x L_m(x) - \left(\frac{m}{m+1}\right) L_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

۱.۳ تقریب توابع توسط موجک‌های لژاندر

تابع انتگرال‌پذیر $y(x)$ در بازه $[0, 1)$ را می‌توان توسط موجک‌های لژاندر به‌شکل صریح

$$y(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}} y_{n,m}\psi_{n,m}(x), \tag{۲.۳}$$

بیان نمود. که در آن $y_{n,m} = \langle y(x), \psi_{n,m}(x)\rangle$ و $<., .>$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی است. اگر سری نامتناهی بیان‌شده در فرمول (۲.۳) قطع شود، آنگاه تابع $y(x)$ به‌طور تقریبی با فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$y(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} y_{n,m}\psi_{n,m}(x) = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x), \tag{۳.۳}$$

که در آن بردار ضرایب $\mathbf{Y}$ و تابع برداری $\mathbf{\Psi}(x)$ به‌شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{Y} = [y_{1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,M-1}, y_{2,0}, y_{2,1}, \ldots, y_{2,M-1}, \ldots, y_{2^{k-1},0}, y_{2^{k-1},1}, \ldots, y_{2^{k-1},M-1}]^T, \tag{۴.۳}$$
$$\mathbf{\Psi}(x) = [\psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \ldots, \psi_{1,M-1}(x), \ldots, \psi_{2^{k-1},0}(x), \psi_{2^{k-1},1}(x), \ldots, \psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T. \tag{۵.۳}$$

به‌طور مشابه می‌توان توابع $k_i(x, \xi) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ را به فرم زیر به‌طور تقریبی به‌دست آورد:

$$k_i(x, \xi) = \mathbf{\Psi}(x)^T \mathbf{K}_i \mathbf{\Psi}(\xi), \tag{۶.۳}$$

که در آن $\mathbf{K}_i$-ها برای $i = 1, 2$ ماترس‌هایی با بعد $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ اند.

۴ روش موجک لژاندر مربعی گاوس برای حل FVFIDEs

معادله غیرخطی (۱.۱) را تحت شرایط مرزی مرکب (۲.۱) در نظر می‌گیریم. به‌منظور تقریب توابع $y(x)$ و $g(x)$ به‌ترتیب با رابطه‌های $y(x) = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x)$ و $g(x) = \mathbf{G}^T\mathbf{\Psi}(x)$، فرض کنیم:

$$N_1(y(\xi)) = u(\xi), \quad N_2(y(\xi)) = v(\xi), \tag{۱.۴}$$

که در این رابطه $u(\xi)$ و $v(\xi)$ به‌شکل:

$$u(\xi) = \mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}(\xi), \quad v(\xi) = \mathbf{V}^T\mathbf{\Psi}(\xi), \tag{۲.۴}$$

بیان شده‌اند و $\mathbf{U}^T$ و $\mathbf{V}^T$ به‌طور مشابه با رابطه (۴.۳) قابل تعریف‌اند. با به‌کارگیری عملگر I_x^α در دو سوی معادله (۱.۱) نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$y(x)-\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(0^+)\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}g(\tau)d\tau \tag{۳.۴}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau k_1(\tau,\xi)u(\xi)d\tau d\xi$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}\int_0^1 k_2(\tau,\xi)v(\xi)d\tau d\xi. \tag{۴.۴}$$

با قرار دادن $\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x)$ به‌جای جواب دقیق $y(x)$ و استفاده از تقریبات آنها و معادلات (۳.۳) و (۶.۳)-(۲.۴)، خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}^{(k)}(0^+)\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}\mathbf{G}^T\mathbf{\Psi}(\tau)d\tau$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau \mathbf{\Psi}(\tau)^T\mathbf{K}_1\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\tau d\xi$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}\int_0^1 \mathbf{\Psi}(\tau)^T\mathbf{K}_2\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{V}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\tau d\xi. \tag{۵.۴}$$

با قرار دادن $M2^{k-1}$ نقطه‌ی هم‌محلی x_j، $j=1,2,\dots,M2^{k-1}$ در معادله (۵.۴) بر بازه $[0,1)$، به سیستم زیر دست خواهیم یافت:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x_j)-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}^{(k)}(0^+)\frac{x_j^k}{k!}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_j}(x_j-\tau)^{\alpha-1}\mathbf{G}^T\mathbf{\Psi}(\tau)d\tau$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_j}(x_j-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau \mathbf{\Psi}(\tau)^T\mathbf{K}_1\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\tau d\xi$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_j}(x_j-\tau)^{\alpha-1}\int_0^1 \mathbf{\Psi}(\tau)^T\mathbf{K}_2\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{V}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\tau d\xi. \tag{۶.۴}$$

با راه حل مشابهی، شرایط مرزی مرکب (۲.۱) به‌شکل زیر تقریب خواهند شد:

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\lambda_{ij}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}^{(j-1)}(0)+\eta_{ij}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}^{(j-1)}(1)\right]=\gamma_i,\quad i=1,2,\dots,m. \tag{۷.۴}$$

اکنون به‌منظور تقریب انتگرال ظاهرشده در معادله (۶.۴) روش مربعی گاوس به‌کار گرفته می‌شود. (که با استفاده از تعداد $M2^{k-1}$ نقطه گاوس - لژاندر برای چندجمله‌ای‌های از درجه کوچکتر یا مساوی $M2^k+1$ دقیق‌اند) برای انجام این مهم، تعداد $M2^{k-1}$ بازه‌ی $[0,x_j]$ را توسط تبدیل $\tau=(x_j/2)(s+1)$ به بازه‌ی $[-1,1]$ انتقال می‌دهیم. با روش مربعی گاوس، سیستم معادلات (۶.۴) به معادلات زیر تبدیل خواهد شد:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x_j)-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}^{(k)}(0^+)\frac{x_j^k}{k!}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_j}(x_j-\tau)^{\alpha-1}\mathbf{G}^T\mathbf{\Psi}(\tau)d\tau$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{x_j}{2}\sum_{l=1}^{M2^{k-1}}w_l\left(\frac{x_j}{2}(1-s_l)\right)^{\alpha-1}\int_0^\sigma[\mathbf{\Psi}(\sigma)]^T\mathbf{K}_1\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\xi$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{x_j}{2}\sum_{l=1}^{M2^{k-1}}w_l\left(\frac{x_j}{2}(1-s_l)\right)^{\alpha-1}\int_0^1[\mathbf{\Psi}(\sigma)]^T\mathbf{K}_2\mathbf{\Psi}(\xi)\mathbf{V}^T\mathbf{\Psi}(\xi)d\xi, \tag{۸.۴}$$

که در این معادله $\sigma = \frac{x_j}{۲}(s_l + ۱)$ و w_l برای هر $l = ۱, ۲, \cdots, M۲^{k-۱}$ توابع وزن در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ اند. با درنظر گرفتن معادلات (۱.۴)-(۲.۴) و استفاده از نقاط هم‌محلی x_j، $j = ۱, ۲, \cdots, M۲^{k-۱}$، خواهیم داشت:

$$N_۱(\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x_j)) = \mathbf{U}^T\mathbf{\Psi}(x_j), \quad N_۲(\mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x_j)) = \mathbf{V}^T\mathbf{\Psi}(x_j). \tag{۹.۴}$$

با ترکیب معادلات (۷.۴)-(۹.۴)، مسئله‌ی اصلی تبدیل به یک سیستم از معادلات جبری خواهد شد. با حل این سیستم جبری، مقدار مجهول $\mathbf{Y}^T$ به‌دست خواهد آمد؛ که با قرار دادن آن در رابطه (۳.۳) تقریبی از جواب سیستم معادلات (۱.۱) به‌دست می‌آید.

۵ همگرایی و تحلیل خطا

در این بخش، تقریبی از کران خطا را برای روش بیان‌شده به‌دست خواهیم آورد. همچنین، همگرایی روش موردبحث قرار می‌گیرد. بدین منظور، فرض کنیم که

$$L_m^*(x) = L_m(۲x - ۱)$$

و

$$\mathbf{\Lambda}(x) = [L_۰^*(x), L_۱^*(x), \ldots, L_N^*(x)]^T.$$

بنابراین، تابع $y(x) \in L^۲[۰, ۱]$ توسط پایه‌های چندجمله‌ای لژاندر به‌شکل زیر قابل بیان خواهد بود

$$y(x) \simeq \sum_{n=۰}^{N} l_n L_n^*(x) = \mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}(x),$$

که در آن $\mathbf{L} = [l_۰, l_۱, \ldots, l_N]^T$.

لم ۱.۵. فرض کنیم تابع $y \in C^{m+۱}[۰, ۱]$ و $S = \text{span}\{L_۰^*, L_۱^*, \ldots, L_N^*\}$ یک فضای برداری باشد. اگر $\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}(x)$ بهترین تقریب از تابع $y(x)$ در S باشد، آنگاه کران خطای روش به شکل زیر خواهد بود:

$$\|y - \mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}\|_۲ \leq \frac{\sqrt{۲\chi^{۲m+۳}}M_{m+۱}}{(m+۱)!\sqrt{۲m+۳}},$$

که در آن $M_{m+۱} = \max\{|f^{m+۱}(x)| : \ ۰ \leq x \leq ۱\}$ و $\chi = \max\{۱ - \xi, \xi\}$.

اثبات. بنابه بسط چند جمله‌ای‌های تیلور، $\xi \in (۰, ۱)$ چنان موجود است که:

$$Ty(x) = y_۰(\xi) + (x - \xi)y'(\xi) + \frac{(x-\xi)^۲}{۲!}y''(\xi) + \cdots + \frac{(x-\xi)^m}{m!}y^{(m)}(\xi).$$

بنابراین، عددی چون $\lambda \in (۰, ۱)$ وجود دارد به‌طوری که:

$$|y(x) - Ty(x)| \leq \left|\frac{(x-\xi)^{m+۱}}{(m+۱)!}y^{(m+۱)}(\lambda)\right|.$$

از طرفی چون $\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}(x)$ بهترین تقریب از تابع $y(x)$ است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|y - \mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}\|_۲^۲ &\leq \|y - Ty\|_۲^۲ = \int_۰^۱ |y(x) - Ty(x)|^۲ dx \leq \int_۰^۱ \left|\frac{(x-\xi)^{m+۱}}{(m+۱)!}y^{(m+۱)}(\lambda)\right|^۲ dx \\ &\leq \frac{M_{m+۱}^۲}{[(m+۱)!]^۲}\int_۰^۱ (x-\xi)^{۲m+۲}dx \leq \frac{۲\chi^{۲m+۳}M_{m+۱}^۲}{(۲m+۳)[(m+۱)!]^۲},\end{aligned}$$

و اثبات تمام است. □

قضیه ۲.۵. گیریم $y \in C^{m+1}[0,1]$ و به‌شکل $\tilde{y}(x) = \mathbf{Y}^T\mathbf{\Psi}(x)$ توسط موجک‌های لژاندر تقریب‌شده باشد. در این صورت متوسط خطای آن عبارت است از:

$$\|y-\tilde{y}\|_2 \leq \frac{2^{(m+1)(1-k)}\sqrt{2}M_{m+1}}{(m+1)!\sqrt{2m+3}}.$$

اثبات. با افراز بازه‌ی $[0,1]$ به 2^{k-1} زیر بازه به‌شکل $I_{k,n} = [(n-1)/2^{k-1}, n/2^{k-1}]$، $n = 1,2,\ldots,2^{k-1}$، با این محدودیت که $\tilde{y}$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از $m+1$ است و استفاده از لم ۱.۵، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|y-\tilde{y}\|_2^2 &\leq \int_0^1 |y(x)-\tilde{y}(x)|^2dx = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} |y(x)-\tilde{y}(x)|^2dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{\sqrt{2}\bar{M}_n 2^{\frac{(1-k)(2m+3)}{2}}}{(m+1)!\sqrt{2m+3}}\right]^2 = \frac{2^{(1-k)(2m+3)+1}}{[(m+1)!]^2(2m+3)}\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\bar{M}_n^2 \\
&\leq \frac{2^{(1-k)(2m+2)+1}M_{m+1}^2}{[(m+1)!]^2(2m+3)},
\end{aligned}$$

که در آن $\bar{M}_n = \max\left\{\left|y^{(m+1)}(x)\right|, \quad x \in I_{k,n}\right\}$. □

لم ۳.۵. گیریم برای هر $y(x) \in [0,1)$، عددی چون $\beta_y \in \mathbb{R}$ موجود است طوری که $|y(x)| \leq \beta_y$. آنگاه، مجموع ضرایب لژاندر از تابع $y(x)$ که در رابطه (۳.۳) بیان گردیده است، به‌طور مطلق همگرا است هرگاه $|y_{n,m}| \leq \sqrt{2^{1-k}}\beta_y$.

اثبات. تابع $y(x) \in L^2[0,1]$ را می‌توان توسط پایه‌های موجک لژاندر توسط رابطه‌ی (۳.۳) بیان نمود. برای هر $m \geq 0$، داریم:

$$\begin{aligned}
|y_{n,m}| = |<y,\psi_{n,m}>| &= \left|\int_0^1 y(x)\psi_{n,m}(x)dx\right| \leq \int_0^1 |y(x)||\psi_{n,m}(x)|dx \\
&\leq \beta_y\int_0^1 |\psi_{n,m}(x)|dx = \beta_y\int_{I_{n,k}} |\psi_{n,m}(x)|dx \\
&= \beta_y 2^{\frac{k-1}{2}}(2m+1)^{\frac{1}{2}}\int_{I_{n,k}} \left|L_m(2^kx-2n+1)\right|dx.
\end{aligned}$$

با فرض $s = 2^kx-2n+1$ خواهیم داشت:

$$|y_{n,m}| \leq \beta_y 2^{\frac{-k-1}{2}}(2m+1)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^1 |L_m(s)|ds.$$

نامساوی هولدر ایجاب می‌کند که:

$$|y_{n,m}| \leq \beta_y 2^{\frac{-k-1}{2}}(2m+1)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{2m+1}} = \sqrt{2^{1-k}}\beta_y.$$

این به معنی آن است که وقتی $k\to\infty$، سری $\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1} y_{n,m}$ به‌طور مطلق همگرا است. □

قضیه ۴.۵. سری $\tilde{y}(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1} y_{n,m}\psi_{n,m}(x)$ که توسط رابطه‌ی (۳.۳) تعریف‌شده است، با نرم – ۲ در بازه $[0,1]$ همگرا است، هرگاه مجموع مقادیر قدرمطلق ضرایب لژاندر $\sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1}|y_{nm}|$ برای تابع پیوسته $y(x)$، یک سری همگرا باشد.

اثبات. گیریم $L^2(\mathbb{R})$ یک فضای هیلبرت بوده و $\psi_{n,m}$ که در رابطه‌ی (۱.۳) داده شده است، یک پایه‌ی متعامد باشد. همچنین قرار می‌دهیم $\psi_{n,m}(x) = \Delta_j(x)$ و $\delta_j =<\tilde{y}(x),\Delta_j(x)>$. مجموع جزئی $\{S_n\}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n \delta_j\Delta_j(x).$$

اکنون، برای هر $\epsilon > 0$، $N_\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $n > m > N_\epsilon$ داریم:

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_2^2 = \int_0^1 \left| \sum_{l=m+1}^{n} \delta_l \Delta_l(x) \right|^2 dx \leq \sum_{l=m+1}^{n} |\delta_l|^2 \int_0^1 |\Delta_l(x)|^2 dx = \sum_{l=m+1}^{n} |\delta_l|^2.$$

بنابه لم ۳.۵، مجموع $\sum_{l=0}^{\infty} |\delta_l|^2$ همگرای مطلق است؛ از این رو، بنا به محک کوشی داریم:

$$\sum_{l=m+1}^{n} |\delta_l|^2 < \epsilon^2.$$

پس، $\|S_n(x) - S_m(x)\|_2 \leq \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$. بنابراین دنباله مجموع این سری، یک سری کوشی است، پس سری با نرم – ۲ همگرا است. □

۶ وجود و یکتایی

به‌منظور مطالعه یکتایی جواب معادلات FVFIDEs ، فرم عملگری معادله (۱.۱) را به‌شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\left({}_0^C D_x^\alpha y\right)(x) = g(x) - \mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y - \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y, \tag{۱.۶}$$

که در آن:

$$\mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y = \int_a^x k_1(x,\xi) N_1(y(\xi))\, d\xi, \quad \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y = \int_a^b k_2(x,\xi) N_2(y(\xi))\, d\xi.$$

با اعمال عملگر ${}_0I_x^\alpha$ بر دو سوی معادله (۱.۶) خواهیم داشت:

$$y(x) = f(x) + {}_0I_x^\alpha \left[g(x) - \mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y - \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y\right], \tag{۲.۶}$$

که در رابطه فوق:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0^+) x^k / k!\ .$$

این معادله را می‌توان به‌شکل $\mathcal{T}y = y$ بیان نمود که در آن $\mathcal{T}$ به‌شکل زیر است:

$$\mathcal{T}y(x) = f(x) + {}_0I_x^\alpha \left[g(x) - \mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y - \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y\right]. \tag{۳.۶}$$

فرض کنیم $(C[0,1], ||\infty||)$ یک فضای باناخ متشکل از همه‌ی توابع پیوسته با نرم $||h||_\infty = \max_x |h(x)|$ باشد. همچنین گیریم عملگرهای $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ در شرط لیپشیتز بر بازه $[0,1]$ با ثابت‌های لیپشیتزی J_1 و J_2 صادق باشند:

$$|\mathcal{N}_1\tilde{y}(x) - \mathcal{N}_1 y(x)| \leq J_1 |\tilde{y}(x) - y(x)|, \quad |\mathcal{N}_2\tilde{y}(x) - \mathcal{N}_2 y(x)| \leq J_2 |\tilde{y}(x) - y(x)|.$$

با در نظر گرفتن فرضیات فوق، در قضیه زیر نشان خواهیم داد که معادلات FVFIDEs جواب یکتا دارند.

قضیه ۱.۶. گیریم عملگرهای غیرخطی $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ در رابطه زیر صادق باشند

$$J_1\|\mathcal{N}_1\|_\infty + J_2\|\mathcal{N}_2\|_\infty < \Gamma(\alpha+1).$$

آنگاه معادلات FVFIDEs داده‌شده توسط رابطه (۱.۱) دارای جواب یکتا خواهند بود.

اثبات. گیریم $\mathcal{T}: C[0,1] \to C[0,1]$ به‌شکل زیر تعریف شود:

$$\mathcal{T}y(x) = f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} \left[g(\xi) - \mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y(\xi) - \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y(\xi)\right] d\xi. \qquad (۴۶)$$

همچنین فرض کنیم که $\tilde{y}, y \in C[0,1]$، آنگاه برای هر عدد مثبت x خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}\tilde{y}(x) - \mathcal{T}y(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} \left[\mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 y(\xi) - \mathcal{K}_1\mathcal{N}_1 \tilde{y}(\xi) + \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 y(\xi) - \mathcal{K}_2\mathcal{N}_2 \tilde{y}(\xi)\right] d\xi.
\end{aligned}$$

بنابراین، رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{T}\tilde{y}(x) - \mathcal{T}y(x)| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |x-\xi|^{\alpha-1} \left[|\mathcal{K}_1|\,|\mathcal{N}_1 y(\xi) - \mathcal{N}_1 \tilde{y}(\xi)| + |\mathcal{K}_2|\,|\mathcal{N}_2 y(\xi) - \mathcal{N}_2 \tilde{y}(\xi)|\right] d\xi \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |x-\xi|^{\alpha-1} \left[|\mathcal{K}_1|\, J_1\, |\tilde{y}(\xi) - y(\xi)| + |\mathcal{K}_2|\, J_2\, |\tilde{y}(\xi) - y(\xi)|\right] d\xi \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |x-\xi|^{\alpha-1} \left[\|\mathcal{K}_1\|_\infty J_1 + \|\mathcal{K}_2\|_\infty J_2\right] \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty \, d\xi \\
&\le \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\|\mathcal{K}_1\|_\infty J_1 + \|\mathcal{K}_2\|_\infty J_2\right) \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\|\mathcal{K}_1\|_\infty J_1 + \|\mathcal{K}_2\|_\infty J_2\right) \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty.
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$|\mathcal{T}\tilde{y}(x) - \mathcal{T}y(x)| \le L \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty$$

که در آن

$$L = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\|\mathcal{K}_1\|_\infty J_1 + \|\mathcal{K}_2\|_\infty J_2\right)$$

با استفاده از فرض بیان‌شده در قضیه داریم که $0 \le L < 1$، از این‌رو خواهیم داشت

$$\|\mathcal{T}\tilde{y}(x) - \mathcal{T}y(x)\|_\infty \le L \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty < \|\tilde{y}(\xi) - y(\xi)\|_\infty.$$

از آنجایی که در رابطه بالا داریم $0 \le L < 1$، بنابه قضیه نگاشت انقباضی، این مسئله دارای جوابی یکتا در $C[0,1]$ خواهد بود. □

۷ مثال‌های عددی

در این بخش، برای نشان دادن قابلیت و کارایی روش مورد مطالعه، آن را در حل چند مسئله به‌کار می‌گیریم و سپس نتایج به‌دست‌آمده را با نتایج روش‌های دیگر مقایسه خواهیم نمود. به‌منظور نشان دادن بیشینه قدرمطلق خطا (MAE) [۹] از رابطه زیر استفاده کرده‌ایم:

$$MAE = \max_{0 \le x < 1} \{|y(x) - \tilde{y}(x)|\}.$$

همچنین در مثال دوم، به‌منظور مقایسه روش با روش‌های دیگر، جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) [۱۰] محاسبه‌شده است. این خطا عبارت است از:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\int_0^1 [y(x) - \tilde{y}(x)]^2 dx}.$$

[۹] Maximum absolute error
[۱۰] Root-mean-square error

مثال ۱.۷. معادله غیرخطی کسری

$$\left({}_{\circ}^{C}D_x^{\frac{\sqrt{۷}}{۲}} y\right)(x) - \int_{\circ}^{x} \frac{۱+۲\xi}{۱+y(\xi)} d\xi - \int_{\circ}^{۱} (۱+۲\xi) y(\xi) d\xi = g(x), \qquad (۱.۷)$$

را تحت شرایط مرزی $y(\circ) = \circ$ و $y(۱) = ۲$ در نظر می‌گیریم، که در آن:

$$g(x) = \frac{۲x^{۲-\frac{\sqrt{۷}}{۲}}}{\Gamma\left(۳ - \frac{\sqrt{۷}}{۲}\right)} - \ln(x^۲ + x + ۱) + ۱ - e^۲.$$

جواب دقیق این مسئله به‌شکل $y(x) = x^۲ + x$ است. نتایج عددی به‌دست‌آمده برای مثال ۱.۷ در جدول ۱ داده‌شده است. این نتایج با نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های موجک چبیشف (CWM) [xx] و نیستروم و نیوتن – کانتورویچ [۱۴، ۱۸] مقایسه شده‌اند. در جدول ۲ جواب دقیق y و جواب‌های تقریبی به‌دست‌آمده با روش‌های CWM و GQLWM مقایسه شده‌اند. بنا بر نتایج به‌دست‌آمده در این جدول، مشاهده می‌شود که روش حاضر دارای دقت بیشتری نسبت به روش CWM است. جدول ۳ بیشینه قدرمطلق خطا را بین جواب دقیق و جواب تقریبی برای مقادیر مختلف از M و k نشان می‌دهد. نتایج حاصل‌شده نشان می‌دهند که روش GQLWM تنها با استفاده از تعداد محدودی از پایه‌ها، نتایج بهتر و ارزشمندتری نسبت به روش‌های CWM و نیستروم و نیوتن – کانتورویچ به‌دست داده‌اند. علاوه‌براین، توابع قدرمطلق خطا برای مقادیر مختلف از k و M در شکل ۱ به‌نمایش درآمده است. این نتایج نشان دهنده‌ی این موضوع‌اند که با افزایش مقادیر k و M مقدار خطا به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش یافته است.

جدول ۱: مقایسه بین روش GQLWM، CWM [۱۸] و روش بیان‌شده در مرجع [۱۴] برای مثال ۱.۷.

x		۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
خطای روش [14]	$k=۳,\ n=۱۶۰$	$۷/۸۱E-۰۶$	$۱/۵۵E-۰۵$	$۱/۶۵E-۰۵$	$۱/۲۷E-۰۵$	$۵/۰۷E-۰۶$
	$k=۳,\ n=۳۲۰$	$۱/۹۲E-۰۶$	$۳/۸۴E-۰۶$	$۴/۱۰E-۰۶$	$۳/۱۵E-۰۶$	$۱/۲۵E-۰۶$
	$k=۳,\ n=۶۴۰$	$۴/۶۵E-۰۷$	$۹/۳۱E-۰۷$	$۹/۹۲E-۰۷$	$۷/۶۵E-۰۷$	$۳/۰۴E-۰۷$
خطای [18]	$k=۱,\ M=۱۹$	$۳/۴۷E-۱۲$	$۶/۰۸E-۱۲$	$۶/۲۱E-۱۲$	$۴/۶۸E-۱۲$	$۱/۸۴E-۱۲$
GQLWM	$k=۲,\ M=۴$	$۷/۸۱E-۰۶$	$۱/۵۵E-۰۵$	$۱/۶۵E-۰۵$	$۱/۲۷E-۰۵$	$۵/۰۷E-۰۶$
	$k=۳,\ M=۵$	$۱/۹۲E-۰۶$	$۳/۸۴E-۰۶$	$۴/۱۰E-۰۶$	$۳/۱۵E-۰۶$	$۱/۲۵E-۰۶$
	$k=۴,\ M=۶$	$۴/۶۵E-۰۷$	$۹/۳۱E-۰۷$	$۹/۹۲E-۰۷$	$۷/۶۵E-۰۷$	$۳/۰۴E-۰۷$
	$k=۱,\ M=۱۰$	$۴/۶۵E-۰۷$	$۹/۳۱E-۰۷$	$۹/۹۲E-۰۷$	$۷/۶۵E-۰۷$	$۳/۰۴E-۰۷$
	$k=۱,\ M=۱۹$	$۴/۶۵E-۰۷$	$۹/۳۱E-۰۷$	$۹/۹۲E-۰۷$	$۷/۶۵E-۰۷$	$۳/۰۴E-۰۷$

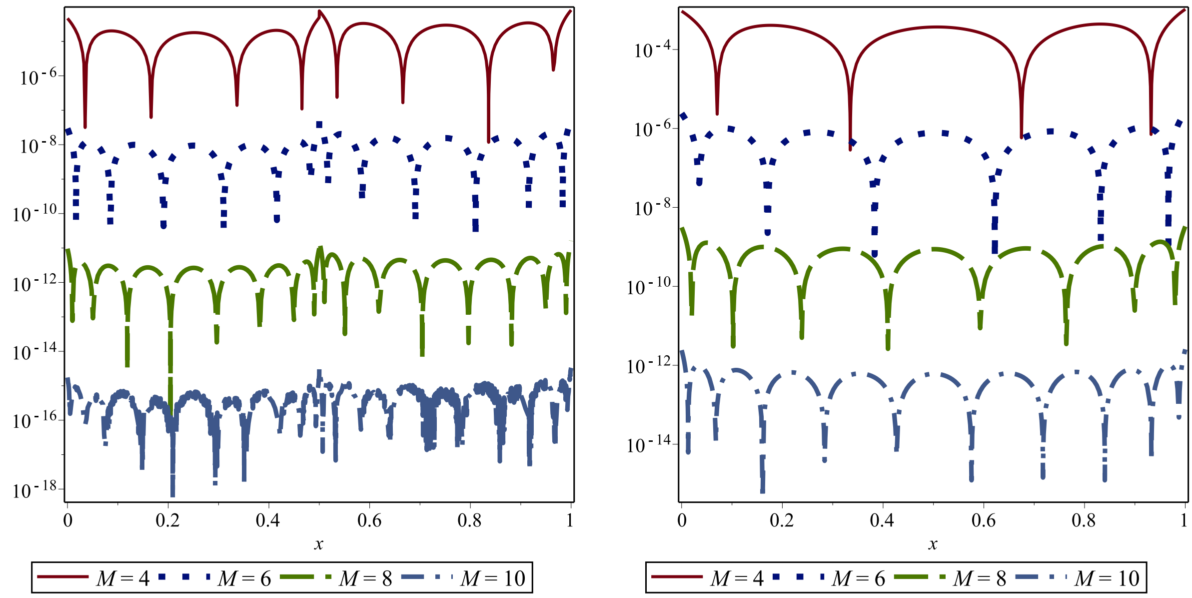
جدول ۲: جواب‌های عددی برای مثال ۱.۷.

x	جواب دقیق	جواب دست‌به آمده از روش CWM	جواب دست‌به آمده از روش GQLWM
۰/۰	۰/۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۱۱	۰/۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۴۷۵۰۹۲۱۹	۰/۱۰۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۲	۰/۲۴	۰/۲۴۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۱۸۹۹۱۷۰۰	۰/۲۳۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۳	۰/۳۹	۰/۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۰۸۹۰۶۲۸۴	۰/۳۸۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۴	۰/۵۶	۰/۵۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۳۹۳۹۱۹۷۷	۰/۵۵۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۵	۰/۷۵	۰/۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۲۱۷۲۴۹۶۵	۰/۷۴۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۶	۰/۹۶	۰/۹۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۶۲۹۹۴۲۵۰	۰/۹۵۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۷	۱/۱۹	۱/۱۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۶۸۱۴۹۷۰۰	۱/۱۸۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۸	۱/۴۴	۱/۴۴۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۴۰۸۸۰۱۵۰	۱/۴۳۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۰/۹	۱/۷۷	۱/۷۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۴۰۶۰۲۰۰	۱/۷۰۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹
۱	۲/۰۰	۱/۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

[xx] Chebyshev wavelet method

جدول ۳: بیشینه قدرمطلق خطای به‌دست‌آمده با استفاده از روش GQLWM برای مثال ۱.۷.

	M	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹
	$k=۱$	$۴٫۴۱E-۰۴$	$۴٫۰۶E-۰۸$	$۱٫۰۳E-۱۲$	$۴٫۰۲E-۱۶$	$۳٫۰۱E-۲۳$	$۱٫۵۷E-۲۸$
MAE	$k=۲$	$۷٫۶۸E-۰۵$	$۹٫۴۱E-۱۰$	$۳٫۰۵E-۱۵$	$۳٫۹۶E-۲۱$	$۲٫۵۵E-۲۷$	$۱٫۶۱E-۳۴$
	$k=۳$	$۵٫۴۶E-۰۶$	$۸٫۲۳E-۱۲$	$۳٫۳۹E-۱۸$	$۵٫۴۹E-۲۵$	$۴٫۴۲E-۳۲$	$۲٫۰۲E-۳۹$



(ب) $k=۲$ (آ) $k=۱$

شکل ۱: نمایش قدرمطلق خطا برای مثال ۱.۷ برای مقادیر مختلف از M. (آ) زمانی که $k=۱$ و (ب) زمانی که $k=۲$

مثال ۲.۷. معادله انتگرال – دیفرانسیل کسری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\left({}^{C}_{۰}D^{\alpha}_{x}y\right)(x)=g(x)+\int_{۰}^{۱}x\xi[y(\xi)]^{۲}d\xi,\quad y(۰)=۰, \tag{۲.۷}$$

که در آن $۰<\alpha\leq۱$ و $g(x)$ توسط رابطه زیر بیان‌شده است:

حالت اول [۱۸]: $g(x)=\frac{۴}{۳}\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۱}x^{\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۴}x$ با $\alpha=\frac{۱}{۴}$ که جواب دقیق آن به‌شکل $y(x)=x$ است.

حالت دوم [۱۸]: $g(x)=\frac{۶۴}{۱۵}\Gamma\left(\frac{۳}{۴}\right)\frac{\sqrt{۲}}{\pi}x^{\frac{۹}{۴}}-\frac{۱}{۸}x$ با $\alpha=\frac{۳}{۴}$ که جواب دقیق آن به‌شکل $y(x)=x^{۳}$ است.

حالت سوم [۲۹]: $g(x)=۱-\frac{۱}{۴}x$ با $\alpha=۱$ که جواب دقیق آن به‌شکل $y(x)=x$ است.

روش بیان‌شده در بخش ۴ را در حل این مسئله به‌کار می‌گیریم. نتایج در جدول‌های ۴ ، ۵ و ۶ برای مقادیر مختلفی از M و k درج‌شده‌اند. در این جدول‌ها، بیشینه قدرمطلق خطای $y(x)$ حاصل‌شده از روش GQLWM با $k=۱$ و مقادیر مختلف از M و α با خطای حاصل از روش CWM [۱۸] برای دو حالت اول و دوم مقایسه شده‌اند. نتایج حاصل‌شده نشان‌دهنده‌ی قابلیت و اعتبار روش GQLWM در مقایسه با روش CWM است. نمایش هندسی توابع قدرمطلق خطا برای مقادیر مختلف از M و k با در نظر گرفتن $\alpha=۱/۴$، $\alpha=۱$ و $\alpha=۳/۴$ به‌ترتیب در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ به‌نمایش درآمده است. این شکل‌ها بیان‌گر آن‌اند که با افزایش مقدار M، خطا کاهش یافته است. در جدول ۶ جذر میانگین مربعات خطا RMSE حاصل‌شده از روش GQLWM با نتایج به‌دست‌آمده از مرجع [۲۹] برای مقادیر مختلف k و M با فرض $\alpha=۱$ مقایسه شده‌اند. بنابه نتایج درج‌شده در جدول، برای مقدار معینی از k، با افزایش مقدار M درجه دقت افزایش یافته و به‌همین ترتیب برای مقدار معینی از M با افزایش مقدار k، درجه دقت افزایش یافته است. بنا براین، روش GQLWM در حل این مسئله بسیار موثر بوده و نسبت به روش CWM بیان‌شده در [۲۹] دارای دقت بالاتری است.

مثال ۳.۷. [۲۰] معادله انتگرال–دیفرانسیل غیرخطی کسری با هسته منفرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left({}^{C}_{۰}D^{\frac{۲}{۳}}_{x}y\right)(x)=g(x)+\int_{۰}^{x}\left(xy'(\xi)+(x-\xi)^{-\frac{۱}{۲}}[y(\xi)]^{۲}\right)d\xi, \tag{۳.۷}$$

جدول ۴: مقایسه بین روش مورد مطالعه و روش CWM [۱۸] برای مثال ۲.۷ در حالت‌های اول و دوم زمانی که $k=1$ و $\alpha=\frac{3}{4}$.

x	خطای [18]	GQLWM		
	$M=$ ۱۹	$M=$ ۱۳	$M=$ ۱۶	$M=$ ۱۹
۰٫۰	۱٫۶۸E − ۲۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
۰٫۱	۹٫۰۶E − ۱۳	۱٫۷۵E − ۱۳	۱٫۸۵E − ۱۶	۱٫۲۷E − ۲۰
۰٫۲	۳٫۹۹E − ۱۲	۴٫۰۵E − ۱۲	۷٫۵۳E − ۱۷	۳٫۹۲E − ۲۳
۰٫۳	۱٫۰۳E − ۱۱	۳٫۷۶E − ۱۲	۱٫۴۷E − ۱۶	۱٫۴۹E − ۲۰
۰٫۴	۲٫۱۰E − ۱۱	۲٫۲۱E − ۱۲	۱٫۵۳E − ۱۶	۱٫۰۶E − ۲۰
۰٫۵	۳٫۷۳E − ۱۱	۸٫۳۵E − ۱۴	۱٫۴۸E − ۱۶	۱٫۸۳E − ۲۲
۰٫۶	۶٫۰۵E − ۱۱	۲٫۳۸E − ۱۲	۱٫۴۲E − ۱۶	۱٫۰۴E − ۲۰
۰٫۷	۹٫۱۶E − ۱۱	۳٫۹۲E − ۱۲	۱٫۲۳E − ۱۶	۱٫۵۱E − ۲۰
۰٫۸	۱٫۳۱E − ۱۰	۴٫۲۳E − ۱۲	۱٫۴۸E − ۱۶	۳٫۷۱E − ۲۲
۰٫۹	۱٫۸۲E − ۱۰	۳٫۱۱E − ۱۳	۱٫۶۷E − ۱۷	۱٫۳۲E − ۲۰
۱٫۰	۲٫۴۵E − ۱۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰

جدول ۵: مقایسه بین روش مورد مطالعه و روش CWM [۱۸] برای مثال ۲.۷ در حالت‌های اول و دوم زمانی که $k=1$ و $\alpha=\frac{1}{4}$.

x	خطای [18]	GQLWM		
	$M=$ ۱۹	$M=$ ۱۳	$M=$ ۱۶	$M=$ ۱۹
۰٫۰	۷٫۹۲E − ۲۱	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
۰٫۱	۶٫۵۷E − ۱۸	۶٫۵۳E − ۱۶	۴٫۰۰E − ۱۹	۲٫۵۱E − ۲۴
۰٫۲	۳٫۶۲E − ۱۸	۵٫۸۹E − ۱۵	۱٫۶۳E − ۱۹	۲٫۹۱E − ۲۵
۰٫۳	۲٫۶۵E − ۱۸	۵٫۴۴E − ۱۵	۳٫۸۰E − ۱۹	۶٫۱۸E − ۲۴
۰٫۴	۲٫۱۱E − ۱۸	۳٫۴۱E − ۱۵	۴٫۱۹E − ۱۹	۴٫۰۸E − ۲۴
۰٫۵	۱٫۸۵E − ۱۸	۴٫۰۷E − ۱۶	۴٫۲۵E − ۱۹	۲٫۲۹E − ۲۵
۰٫۶	۱٫۶۵E − ۱۸	۲٫۶۱E − ۱۵	۴٫۲۸E − ۱۹	۴٫۳۳E − ۲۴
۰٫۷	۱٫۴۹E − ۱۸	۴٫۶۳E − ۱۵	۳٫۹۴E − ۱۹	۵٫۹۲E − ۲۴
۰٫۸	۱٫۴۰E − ۱۸	۷٫۰۴E − ۱۶	۱٫۸۱E − ۱۹	۱٫۲۳E − ۲۵
۰٫۹	۱٫۰۷E − ۱۸	۴٫۹۸E − ۱۵	۵٫۱۰E − ۱۹	۴٫۹۲E − ۲۴
۱٫۰	۵٫۴۲E − ۱۷	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰

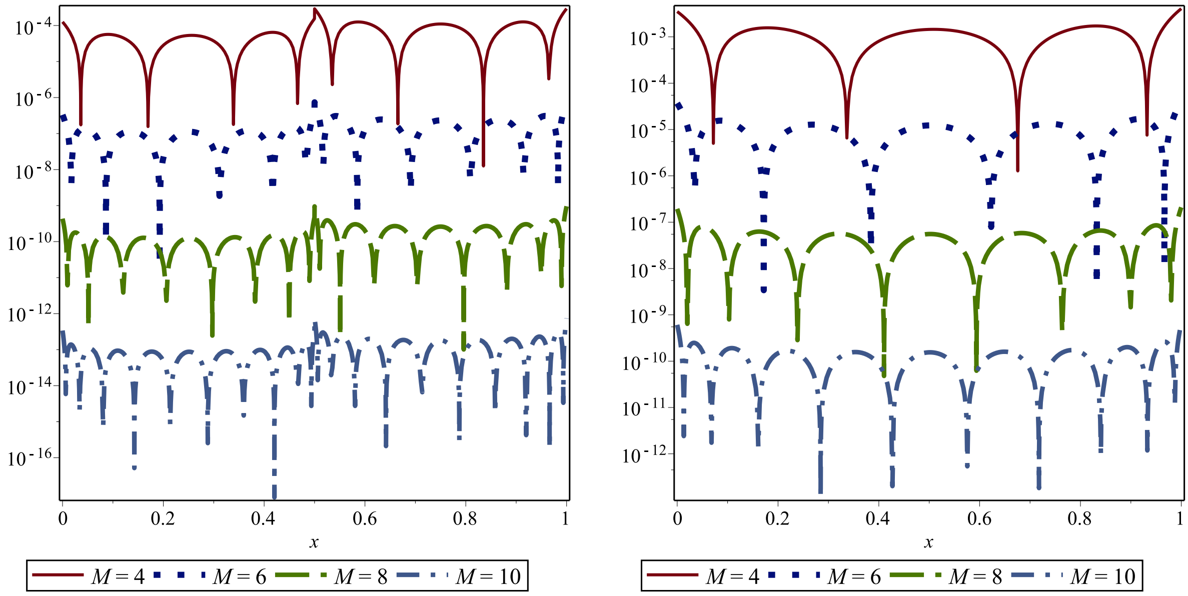
جدول ۶: مقایسه RMSE برای برخی مقادیر از k و M از روش GQLWM و روش موجک چبیشف نوع دوم [۲۹] برای مثال ۲.۷ در حالت سوم.

	روش بیان شده در [29]	روش GQLWM			
M	۲	۲	۶	۱۰	۱۴
$k=$ ۳	۲٫۹۷۰E − ۰۷	۲٫۳۴۸E − ۰۹	۴٫۲۳۶E − ۱۱	۱٫۰۰۳E − ۱۲	۱٫۳۲۰E − ۱۳
$k=$ ۴	۱٫۸۶۱E − ۰۸	۷٫۳۹۱E − ۱۰	۹٫۸۶۳E − ۱۳	۴٫۰۰۲E − ۱۵	۷٫۵۶۹۱E − ۱۷
$k=$ ۵	۱٫۱۶۴E − ۰۹	۸٫۵۴۱E − ۱۲	۸٫۷۸۶E − ۱۶	۹٫۲۵۱E − ۱۸	۲٫۰۱۵E − ۲۰

که در آن

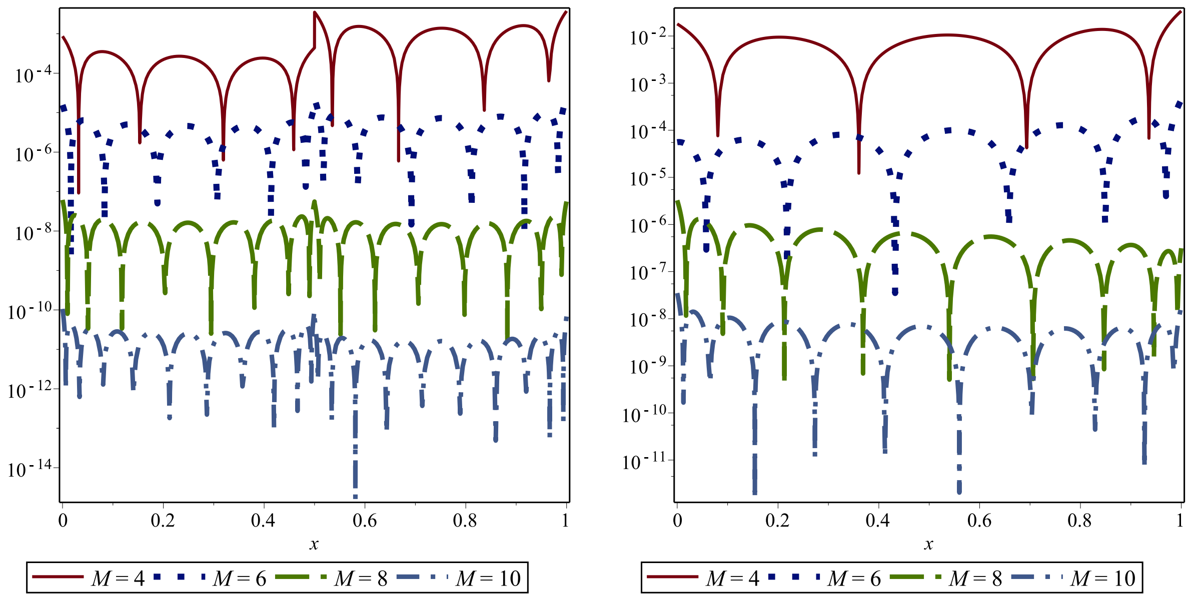
$$g(x)=\frac{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{5}{2}}-\frac{32}{35}x^{\frac{7}{2}},$$

معادله فوق با شرط اولیه $y(0)=0$ دارای جواب دقیق به شکل $y(x)=x\sqrt{x}$ است. با استفاده از روش بیان‌شده در بخش ۴ مساله را برای مقادیر مختلف از M و k حل کرده و نتایج به‌دست‌آمده را در جداول ۷ و ۸ درج نمودایم. در جدول ۷ مقدار قدرمطلق خطا در نقاط مختلف از x محاسبه شده است. در این جدول همچنین روش GQLWM با روش MHFS [۲۰] مقایسه شده است. در جدول ۸ بیشینه خطای



(آ) $k = ۱$ (ب) $k = ۲$

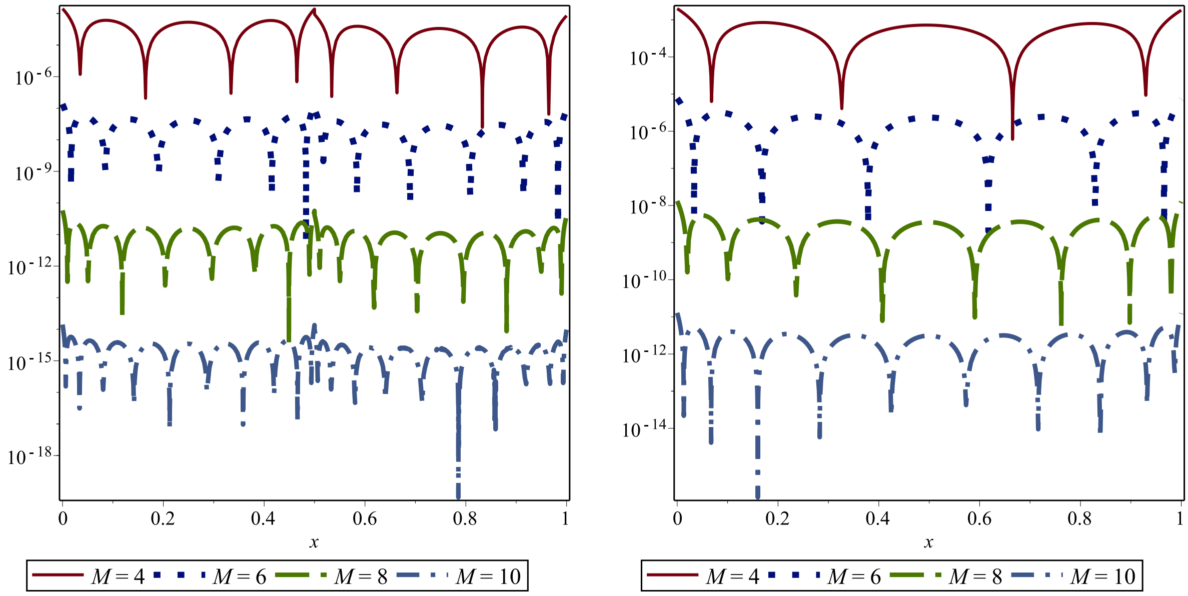
شکل ۲: نمایش هندسی توابع قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۷ با $\alpha = \frac{۱}{۴}$ و مقادیر مختلف از M و k



(آ) $k = ۱$ (ب) $k = ۲$

شکل ۳: نمایش هندسی توابع قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۷ با $\alpha = \frac{۳}{۴}$ و مقادیر مختلف از M و k

به‌دست‌آمده از روش GQLWM با نرم خطای به‌دست‌آمده از روش MHFS مقایسه شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از جدول‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود که روش GQLWM دارای دقت مناسب بوده و کارایی این روش با افزایش مقادیر M و k افزایش می‌یابد. در شکل ۵ قدرمطلق خطا از $y(x)$ برای مقادیر مختلف از M و k به طور هندسی به نمایش گذاشته شده است. بنابه نتایج به‌دست‌آمده از شکل‌ها و جدول‌ها مشاهده می‌شود که مقدار خطا با افزایش مقادیر M و k به طور چشم‌گیری کاهش یافته است.



(ب) $k = ۲$ (أ) $k = ۱$

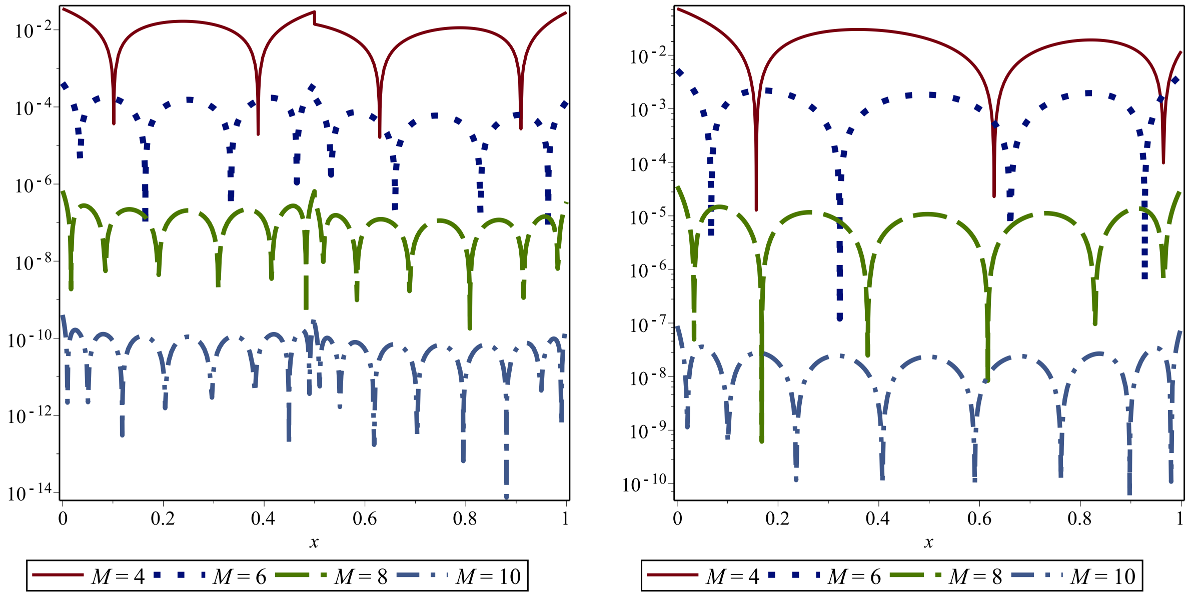
شکل ۴: نمایش هندسی توابع قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۷ با $\alpha = ۱$ و مقادیر مختلف از M و k

جدول ۷: مقایسه قدرمطلق خطای روش GQLWM با روش MHFs [۲۰] برای برخی مقادیر از k و M برای مثال ۳.۷.

x		۰	۰٫۲۵۰	۰٫۵۰۰	۰٫۷۵۰	۱٫۰۰
روش [20]	$n = ۸$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۵٫۶۹۸۱۲E - ۰۴$	$۸٫۵۶۷۷۹E - ۰۴$	$۱٫۴۲۵۹۴E - ۰۳$	$۳٫۳۰۸۰۳E - ۰۳$
	$n = ۱۶$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۸۴۲۵۶E - ۰۴$	$۲٫۲۰۳۴۶E - ۰۴$	$۳٫۶۷۶۵۱E - ۰۴$	$۸٫۸۴۷۸۰E - ۰۴$
	$n = ۳۲$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۵٫۲۷۹۱۳E - ۰۵$	$۶٫۰۵۴۵۵E - ۰۵$	$۱٫۰۱۲۵۹E - ۰۴$	$۲٫۴۶۵۰۹E - ۰۴$
	$n = ۶۴$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۴۹۴۰۸E - ۰۵$	$۱٫۶۹۳۱۴E - ۰۵$	$۲٫۸۳۴۰۸E - ۰۵$	$۶٫۹۲۳۲۴E - ۰۵$
روش GQLWM $k = ۱$	$M = ۱۳$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۱۱۵۵۱E - ۱۰$	$۲٫۰۴۷۹۵E - ۱۱$	$۲٫۶۹۵۱۷E - ۱۱$	$۲٫۰۷۵۹۶E - ۱۱$
	$M = ۱۶$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۲۷۷۵۶E - ۱۵$	$۲٫۲۱۷۱۹E - ۱۶$	$۹٫۱۰۵۶۸E - ۱۸$	$۲٫۱۶۷۵۵E - ۱۶$
	$M = ۱۹$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۶۲۱۶۱E - ۲۰$	$۲٫۳۹۶۴۰E - ۲۱$	$۳٫۱۵۲۰۳E - ۲۱$	$۲٫۴۱۴۵۸E - ۲۱$
روش GQLWM $k = ۲$	$M = ۱۳$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۱٫۲۵۴۱۷E - ۱۳$	$۳٫۰۷۳۷۱E - ۱۴$	$۸٫۱۷۴۵۴E - ۱۴$	$۱٫۹۷۵۵۳E - ۱۴$
	$M = ۱۶$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۸٫۱۴۱۵۳E - ۲۰$	$۶٫۳۷۳۱۴E - ۲۲$	$۲٫۲۴۱۸۳E - ۱۹$	$۴٫۳۲۴۴۳E - ۲۲$
	$M = ۱۹$	۰٫۰۰۰۰۰۰	$۲٫۸۰۰۲۰E - ۲۵$	$۵٫۴۸۶۱۷E - ۲۶$	$۱٫۹۴۳۴۸E - ۲۵$	$۳٫۷۸۰۴۱E - ۲۶$

جدول ۸: مقایسه بیشینه قدرمطلق خطای به‌دست‌آمده با استفاده از روش GQLWM و روش MHFs [۲۰] برای مثال ۳.۷.

روش [20]		خطای روش GQLWM			
n	نرم خطا	M	$k = ۱$	$k = ۲$	$k = ۳$
۲	$۷٫۰۹۳۰۳E - ۰۲$	۲	$۷٫۳۸۹۴۴E - ۰۲$	$۳٫۵۵۳۲۱E - ۰۲$	$۹٫۵۴۱۲۰E - ۰۳$
۴	$۱٫۳۹۹۹۱E - ۰۲$	۴	$۱٫۱۸۲۶۱E - ۰۲$	$۱٫۰۰۰۲۰E - ۰۲$	$۲٫۷۴۱۸۸E - ۰۴$
۸	$۳٫۳۰۸۰۳E - ۰۳$	۶	$۳٫۵۷۶۴۷E - ۰۵$	$۱٫۰۸۶۱۴E - ۰۶$	$۶٫۵۳۰۶۷E - ۰۷$
۱۶	$۸٫۸۴۷۸۰E - ۰۴$	۸	$۱٫۴۰۶۲۱E - ۰۶$	$۶٫۶۷۰۳۰E - ۰۷$	$۱٫۳۸۵۴۱E - ۱۰$
۳۲	$۲٫۴۶۵۰۹E - ۰۴$	۱۰	$۸٫۸۲۲۳۱E - ۰۸$	$۴٫۰۱۷۹۹E - ۱۰$	$۱٫۶۲۷۲۶E - ۱۲$
۶۴	$۶٫۹۲۳۲۴E - ۰۵$	۱۲	$۲٫۲۶۴۸۷E - ۰۹$	$۶٫۳۸۸۰۲E - ۱۲$	$۱٫۳۹۳۳۶E - ۱۴$
۱۲۸	$۲٫۴۲۴۹۸E - ۰۵$	۱۴	$۲٫۱۱۰۶۲E - ۱۲$	$۱٫۴۸۴۲۷E - ۱۵$	$۸٫۱۰۸۵۴E - ۱۹$
۲۵۶	$۸٫۵۷۲۱۶E - ۰۶$	۱۶	$۱٫۲۷۷۵۶E - ۱۵$	$۲٫۲۴۱۸۳E - ۱۹$	$۳٫۰۶۵۳۷E - ۲۳$
۵۱۲	$۳٫۰۳۰۳۵E - ۰۶$	۱۸	$۵٫۴۱۷۲۴E - ۱۹$	$۲٫۳۷۳۱۷۱E - ۲۳$	$۸٫۱۱۹۰۵E - ۲۸$
۱۰۲۴	$۱٫۰۷۱۴۴E - ۰۶$	۲۰	$۱٫۶۹۷۱۰E - ۲۲$	$۱٫۸۵۶۶۳E - ۲۷$	$۱٫۵۸۸۹۲E - ۳۲$



(ب) $k = 2$ (آ) $k = 1$

شکل ۵: نمایش هندسی توابع قدرمطلق خطا برای مثال ۳.۷ با $\alpha = 1$ و مقادیر مختلف از M و k

۸ نتیجه گیری

در این مقاله، روش موجک لژاندر مربعی گاوس که تکنیکی کارا برای حل عددی جواب معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری است، پیشنهاد گردید. با به‌کارگیری این روش، سیستم معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری به یک سیستم از معادلات جبری تعدیل شد. به‌منظور حل دستگاه جبری تولیدشده، فرمول انتگرال مربعی گاوس با عملکرد تابع وزن لژاندر به‌کار گرفته شد. با حل دستگاه غیرخطی حاصل‌شده، جواب عددی به‌دست آمد. به‌علاوه، همگرایی و تحلیل خطا، وجود و یکتایی برای روش یادشده موردبحث و بررسی قرار گرفت. بنابه نتایج حاصل‌شده مشهود بود که به ازای مقدار معینی از k، با افزایش مقدار M دقت روش موجک لژاندر مربعی گاوس افزایش یافته و به‌طور مشابه به ازای مقدار معینی از M، با افزایش مقدار k دقت این روش افزایش یافته است. روش موجک لژاندر مربعی گاوس برای دو مثال عددی آزمایش گردید و نتایج به‌دست‌آمده با برخی روش‌های معروف دیگری مقایسه شدند. این مقایسه‌ها نشان دادند که این روش، تکنیکی قدرتمند و مناسب برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا – فردهلم کسری است و نتایج به‌دست‌آمده از آن دقت بالایی دارند.

فهرست منابع

[1] Abbasbandy S, Hashemi M. and Hashim I., *On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations*, Quaest. Math. **36** (2013) 93–105.

[2] Alkan S. and Hatipoglu V. F., *Approximate solutions of volterra-fredholm integro-differential equations of fractional order*, Tbil. Math. J. **10** (2017) 1–13.

[3] Amin R, Shah K, Asif M, Khan I. and Ullah F., *An efficient algorithm for numerical solution of fractional integro-differential equations via Haar wavelet*, J. Comput. Appl. Math. **381** (2021) 113–128.

[4] Bhrawy A, Zaky M. and Van Gorder R. A., *A space-time legendre spectral tau method for the two-sided space-time caputo fractional diffusion-wave equation*, Numer. Algorithms. **71** (2016) 151–180.

[5] Erfanian M, Gachpazan M. and Beiglo H., *A new sequential approach for solving the integro-differential equation via haar wavelet bases*, Comput. Math. & Math. Phys. **57** (2017) 297–305.

[6] Guner O. and Bekir A., *Exp-function method for nonlinear fractional differential equations*, Nonlinear. Sci. Lett. A. **8** (2017) 41–49.

[7] Hamoud A. and Ghadle K., *The reliable modified of laplace adomian decomposition method to solve nonlinear interval volterra-fredholm integral equations*, Korean. J. Math. **25** (2017) 323–334.

[8] Heris J. M., *Solving the integro-differential equations using the modified laplace adomian decomposition method*, J. Math. Ext. **6** (2012) 1–15.

[9] Hesameddini E, Rahimi A. and Asadollahifard E., *On the convergence of a new reliable algorithm for solving multi-order fractional differential equations*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **34** (2016) 154–164.

[10] Hesameddini E. and Riahi M., *Bernoulli galerkin matrix method and its convergence analysis for solving system of volterra-fredholm integro-differential equations*, Iran. J. Sci. Technol. A. **43** (2018) 1203–1214.

[11] Hesameddini E, Riahi M. and Latifzadeh H., *A coupling method of homotopy technique and laplace transform for nonlinear fractional differential equations*, Int. J. Adv. Appl. Sci. **1** (2012) 159-170.

[12] Hesameddini E. and Shahbazi M., *Hybrid bernstein block-pulse functions for solving system of fractional integro-differential equations*, Int. J. Comput. Math. **95** (2018) 2287–2307.

[13] He S, Sun K. and Wang H., *Dynamics of the fractional-order lorenz system based on adomian decomposition method and its DSP implementation*, IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica (2016) 1–6.

[14] Jahanshahi M., *numerical solution of nonlinear fractional volterra-fredholm integro-differential equations with mixed boundary conditions*, Int. J. Ind. Math. **7** (2015) 63–69.

[15] Liu Z, Cheng A. and Li X., *A second-order finite difference scheme for quasi-linear time fractional parabolic equation based on new fractional derivative*, Int. J. Comput. Math. **95** (2017) 396–411.

[16] Mahdy A. M. and Mohamed E. M., *Numerical studies for solving system of linear fractional integro-differential equations by using least squares method and shifted chebyshev polynomials*, J. Abstr. Comput. Math. **1** (2016) 24–32.

[17] Modanli M. and Akgül A., *On Solutions of Fractional order Telegraph partial differential equation by Crank-Nicholson finite difference method*, Appl. Math. Non. Sci. **31** (2020) 163–170.

[18] Mohyud-Din S. T, Khan H, Arif M. and Rafiq M., *Chebyshev wavelet method to nonlinear fractional volterra-fredholm integro-differential equations with mixed boundary conditions*, Adv. Mech. Eng. **9** (2017) 1–8.

[19] Nazari D. and Shahmorad S., *Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions*, J. Comput. Appl. Math. **234** (2010) 883–891.

[20] Nemati S. and Lima P. M., *Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations with weakly singular kernels via a modification of hat functions*, Appl. Math. Comput, **327** (2018) 79–92.

[21] Ordokhani Y. and Rahimi N., *Numerical solution of fractional volterra integro-differential equations via the rationalized haar functions*, J. Sci. Kharazmi. Univ. **14** (2014) 211-224.

[22] Pirim N. A. and Ayaz F., *A new technique for solving fractional order systems: Hermite collocation method*, Appl. Math. **7** (2016) 2307.

[23] Singh B. K., *Homotopy perturbation new integral transform method for numeric study of space-and time-fractional (n+ 1)-dimensional heat-and wave-like equations*, Waves, Wavelets and Fractals, **4** (2018) 19–36.

[24] Sun H, Zhao X. and Sun Z. Z., *The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for the time multi-term fractional wave equation*, J. Sci. Comput. **78** (2019) 467–498.

[25] Sweilam N, Nagy A, Youssef I. K. and Mokhtar M. M., *New spectral second kind chebyshev wavelets scheme for solving systems of integro-differential equations*, Int. J. Appl. Comput. **3** (2017) 333–345.

[26] Wang Y. and Zhu L., *Solving nonlinear volterra integro-differential equations of fractional order by using euler wavelet method*, Adv. Differ. Equ. **2017** (2017) 1–16.

[27] Yang X, Zhang H. and Tang Q., *A spline collocation method for a fractional mobile–immobile equation with variable coefficients*, Comput. Appl. Math. **39** (2020) 1–20.

[28] Yin X. B, Kumar S. and Kumar D., *A modified homotopy analysis method for solution of fractional wave equations*, Adv. Mech. Eng. **7** (2015) 1–8.

[29] Zhu L. and Fan Q., *Solving fractional nonlinear fredholm integro-differential equations by the second kind chebyshev wavelet*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **17** (2012) 2333–2341.

Application of Legendre wavelet method coupled with the Gauss quadrature rule for solving fractional integro-differential equations

Mohsen Riahi Beni[1, ††]

(1) Department of Mathematics, Higher Education Complex of Saravan, Saravan, Iran

Received: 2021/3/10 Accepted: 2021/7/23

Communicated by: Abdolrahman Razani

Abstract: In this work, we propose a novel technique for solving the nonlinear fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations (FVFIDEs). This method approximates the unknown function with the Legendre wavelets. To do this, the Legendre wavelets are used in conjunction with the quadrature rule for converting the problem into a linear or nonlinear system of algebraic equations which can be easily solved by applying the mathematical programming techniques. Furthermore, the existence and uniqueness of the solution are proved by preparing some theorems and lemmas. Also, the error estimate and convergence analysis of the method will be shown. Moreover, some examples are presented and their results are compared to the results of Chebyshev wavelet, modification of hat functions, Nyström and Newton-Kantorovitch methods to show the capability and accuracy of this scheme.

Keywords: Legendre wavelet, Gaussian quadrature, collocation method, fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations.

©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[††]Corresponding author.
m.riahi@saravan.ac.ir: (M. Riahi Beni)