مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۶۱۰-۵۸۵

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2021.33711.1819

رتبه‌بندی فرایندهای سری دومرحله‌ای کارای رأسی با به‌کارگیری نُرم اقلیدسی در تحلیل پوششی داده‌ها

ربابه اسلامی [×]

گروه ریاضی، دانشکده فنی و مهندسی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۳۰

چکیده: رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده‌های شبکه می‌باشد که تاکنون روش‌های زیادی در این زمینه ارایه شده‌است. ولی هر یک از این روش‌ها دارای حداقل یکی از این ایرادات‌اند: غیرخطی بودن، پیچیدگی محاسباتی بالا، عدم تمایز بین واحدهای تصمیم-گیرنده دومرحله ای کارای قوی و ضعیف، اندازه‌گیری کارایی‌های متفاوت برای هر یک از واحدهای تصمیم-گیرنده دومرحله‌ای، عدم در نظر گرفتن ساختار داخلی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای در محاسبه کارایی و رتبه‌بندی آنها و اختصاص رتبه‌های یکسان به واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا. از این رو، به‌منظور حل این ایرادات، این مطالعه روشی بر پایه تحلیل پوششی داده‌های شبکه برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم-گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی با ساختار سری، پیشنهاد می‌دهد. این روش پیشنهادی، بر اساس حذف این واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای از مجموعه مرجع و ارزیابی کارایی واحدهای دومرحله‌ای ناکارا بر مبنای نُرم اقلیدسی است. سرانجام، دو مثال عددی و کاربردی به‌منظور شفاف‌سازی روش پیشنهادی ارایه می-گردند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه، فرایندهای دومرحله‌ای با ساختار سری، رتبه‌بندی، کارای رأسی، کارایی.

رده‌بندی ریاضی: ۹۷M۴۰، ۹۷N۶۰، ۸۰M۵۰، ۴۶N۱۰

[×] نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: amirans.eslami2015@gmail.com

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی عملکرد فرایندهای تولید (یا واحدهای تصمیم‌گیرنده) با چندین ورودی و چندین خروجی است که اولین بار توسط چارنز و همکاران [۱] با ارائه مدل CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) پیشنهاد شد. در این روش، به نهاد مورد ارزیابی، نظیر کارخانجات، بانک‌ها، دانشگاه‌ها و ... "واحد تصمیم‌گیرنده" اطلاق می‌شود. سپس، بنکر و همکاران [۱۰] مدل CCR را با در نظر گرفتن فرض بازده به‌مقیاس متغیر، گسترش داده و مدل دیگری ارایه دادند که به مدل BCC معروف است. تاکنون در تحلیل پوششی داده‌ها روش‌های زیادی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده اعم از کارا و ناکارا ارایه شده‌اند. در این خصوص، سکستون و همکاران [۳۱] روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا و ناکارا با به‌کاربردن کارایی متقاطع، معرفی کردند ولی روش آنها دارای تعبیر اقتصادی مناسبی نبوده و ممکن است رتبه‌های یکسانی را برای برخی از واحدهای تصمیم‌گیرنده لحاظ کند. از این رو، اُرال و همکاران [۲۹] با معرفی اهداف ثانویه، به حل مشکلات روش سکستون و همکاران [۳۱] برای رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیرنده، پرداختند. در این زمینه، ترگرسن و همکاران [۳۲] روش رتبه‌بندی دیگری را پیشنهاد دادند که در آن، واحد تصمیم‌گیرنده‌ای که مرجع بیش‌تری برای واحدهای ناکارا باشد، دارای رتبه بهتری خواهد بود.

به‌علاوه، اندرسون و پترسون [۹] روشی را بر اساس مفهوم ابرکارایی جهت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم-گیرنده کارا ارایه دادند که بر مبنای حذف واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی از مجموعه مشاهدات است. اما روش آنها، ممکن است در ماهیت ورودی، نشدنی گردد و قادر به رتبه‌بندی واحدها نباشد. برای رفع این مشکل، روش‌های رتبه‌بندی زیادی بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها توسط محققین مختلف ارایه شده‌است. به-عنوان نمونه، محرابیان و همکاران [۲۶] مدلی غیرشعاعی را برای رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا معرفی نمودند. همچنین، جهانشاهلو و همکاران [۲۲] روشی را با به‌کاربردن بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های مجموعه امکان تولید، برای رتبه‌بندی واحدها پیشنهاد دادند. به‌علاوه، روشی دیگر، به‌منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا با استفاده از نُرم یک، توسط جهانشاهلو و همکاران [۱۹] ارایه شد. مداحی و یزدانی نجف-آبادی [۶] نیز یک روش رتبه‌بندی با استفاده از کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در دوره‌های زمانی متعدد ارایه نمودند. روش‌های رتبه‌بندی دیگری نیز بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها توسط محققین مختلف ارایه شده است که از آن جمله می‌توان به جهانشاهلو و همکاران [۱۷و ۱۸و ۲۰ و ۲۱]، امیرتیموری و همکاران [۸]، لی و همکاران [۲۵]، حسین‌زاده و همکاران [۱۶]، گو و وو [۱۵]، اُکیل و امین [۲۸]، رُیز و سیرونت [۳۰]، لی‌یو و همکاران [۲۴]، اُکیل [۲۷] و کانمتسو و همکاران [۲۳] اشاره کرد.

در حالتی که واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای ساختارهای داخلی دومرحله‌ای باشند، روش‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها، به‌درستی قادر به ارزیابی عملکرد این واحدهای تصمیم‌گیرنده نیستند؛ زیرا در این روش‌ها، ساختارهای داخلی این واحدهای دومرحله‌ای در ارزیابی عملکرد آنها در نظر گرفته نمی‌شوند. از این رو، از روش تحلیل پوششی داده‌های شبکه برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای استفاده می-شود [۱۴]. در این حالت نیز تاکنون روش‌هایی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های شبکه برای رتبه‌بندی

واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای ارایه شده‌است. به‌عنوان نمونه، افضلی‌نژاد و همکاران [۲] مدلی غیرخطی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ناکارا با ساختار سری در تحلیل پوششی داده‌های شبکه معرفی کردند که دارای پیچیدگی محاسباتی بالا به‌خصوص برای مسایل با ابعاد بزرگ، است. این مطلب، ضعف مدل غیرخطی آنها را نشان می‌دهد.

به‌علاوه، رضوی و همکاران [۳] یک مدل خطی شعاعی ورودی محور به‌منظور محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای با تولیدات میانی و نیز رتبه‌بندی آنها پیشنهاد کردند. ولی مدل پیشنهادی آنها تغییرات خروجی‌ها را در محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای در نظر نمی‌گیرد که این امر باعث می‌گردد مدل آنها قادر به تشخیص واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای قوی و ضعیف نشود. این مطلب ایراد مدل پیشنهادی آنها را نشان می‌دهد. همچنین، قیصری و همکاران [۵] مدل ورودی محور دیگری را جهت رتبه‌بندی و اندازه‌گیری تغییرات بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای با ساختار سری ارایه دادند که این مدل ورودی محور نیز همان ایراد مدل ورودی محور قبلی را دارد. احدزاده نمین و خمسه [۱] نیز روشی بر پایه تحلیل پوششی داده‌های شبکه متشکل از سه مدل ورودی محور برای رتبه-بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا معرفی نمودند که از روش وزن‌های مشترک مراحل اول و دوم استفاده می‌کند. ولی از آنجا که در روش رتبه‌بندی پیشنهادی آنها لازم به استفاده از سه مدل ورودی محور است، این روش دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی است و همچنین ورودی محور بودن روش آنها منجر به عدم تشخیص بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای قوی و ضعیف می‌شود. همچنین این روش رتبه‌بندی ممکن است قادر به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا نباشد؛ یعنی به تمامی آنها رتبه یکسانی اختصاص می‌دهد (بخش ۴-۲ دیده شود). این موارد ایرادات و ضعف‌های این روش رتبه-بندی را نشان می‌دهند.

معمارپور و همکاران [۷] با استفاده از کارایی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای، به‌دست‌آمده از سه روش اندرسون و پترسون [۹]، چارنز و همکاران [۱۱] و سکستون و همکاران [۳۱]، و همچنین با به-کاربردن تکنیک بردا به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا پرداختند. ایراد این روش این است که برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا از کارایی هایی استفاده می‌کند که تولیدات میانی در محاسبه آنها در نظر گرفته نشده‌اند. شیری‌پور و ادیب نیشابوری [۴] نیز مدلی خروجی محور را به منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای ارایه نمودند. اما تابع هدف مدل پیشنهادی آنها شامل وزن-هایی متناظر با مراحل اول و دوم است که توسط مدیر یا تصمیم گیرنده مشخص می‌شوند؛ این امر منجر به کارایی‌های متفاوتی برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای می‌گردد. همچنین خروجی محور بودن این مدل باعث می‌گردد که این مدل قادر به تشخیص واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای قوی و ضعیف نباشد.

بنابراین همان‌گونه که در بالا مشاهده شد هر یک از روش‌های رتبه‌بندی ارایه‌شده در تحلیل پوششی داده‌های شبکه، حداقل دارای یکی از ایرادات زیر است: (۱) غیرخطی بودن، (۲) پیچیدگی محاسباتی بالا به-خصوص برای مسایل با ابعاد بزرگ، (۳) عدم تمایز بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای قوی و ضعیف، (۴) اندازه‌گیری کارایی‌های متفاوت برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای، (۵) عدم در

نظر گرفتن ساختار داخلی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای در محاسبه کارایی و رتبه‌بندی آنها و (۶) اختصاص رتبه‌های یکسان به واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا.

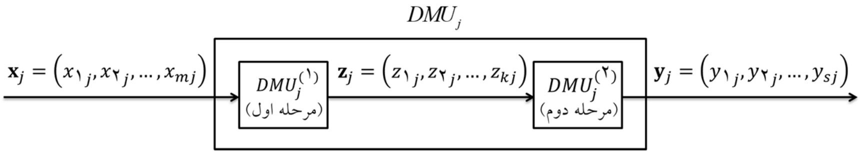
از این رو، در این مطالعه، به‌منظور رفع ایرادات ذکر شده، روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم-گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی پیشنهاد می‌دهیم به‌طوری که در این روش پیشنهادی، ابتدا واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی شبکه را تعریف کرده و سپس مدلی خطی برای تعیین این واحدهای تصمیم گیرنده، ارایه می‌دهیم. در پایان، روشی جهت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی معرفی می‌شود. این روش بر اساس حذف این واحدهای دومرحله‌ای کارای رأسی از مجموعه مرجع و ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای ناکارا بر مبنای نُرم اقلیدسی بنا نهاده شده‌است. لازم به ذکر است که روش رتبه‌بندی پیشنهادی در این مطالعه، هیچ‌یک از ایرادات روش‌های رتبه‌بندی قبلی را ندارد؛ این مطلب، مزیت اصلی روش پیشنهادی ما را نسبت به روش‌های قبلی نشان می‌دهد.

همچنین در این مطالعه با ارایه یک مثال کاربردی، مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست‌آمده از روش رتبه‌بندی پیشنهادی و روش رتبه‌بندی معرفی‌شده توسط احدزاده نمین و خمسه [۱] انجام می‌دهیم به‌دلیل این که آنها از روش وزن‌های مشترک مراحل اول و دوم برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای استفاده می‌کنند، روش رتبه‌بندی آنها نسبت به‌دیگر روش‌های رتبه‌بندی برتری دارد؛ در حالی که دیگر روش‌های رتبه‌بندی از این شیوه استفاده نمی‌کنند.

این مقاله به این صورت تقسیم بندی شده‌است: بخش ۲، به‌صورت مختصر، مقدمات و مفاهیم مورد نیاز را توضیح می‌دهد. در بخش ۳، ابتدا مفهوم کارای رأسی شبکه را تعریف کرده و سپس روشی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی شبکه با تولیدات میانی معرفی می‌شود. همچنین در بخش ۴، مثال‌هایی عددی و کاربردی به‌منظور شفاف‌سازی تفسیر شهودی و کاربرد روش پیشنهادی، ارایه می-شوند. در بخش ۵، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای فعالیت‌های آتی بیان می‌شوند.

۲ مقدمات و مفاهیم اولیه

مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیرنده $\left(J = \left\{DMU_j \middle| j = 1,2,\dots,n\right\}\right)$ را در نظر بگیرید به‌طوری که فعالیت هر واحد تصمیم‌گیرنده، از دو مرحله تشکیل شده‌است؛ مرحله اول، یعنی $DMU_j^{(1)} = \left(\bar{x}_j, \bar{z}_j\right)$، m ورودی $\bar{x}_{ij} > 0\ (i = 1,2,\dots,m)$ را برای تولید k خروجی میانی $\bar{z}_{hj} > 0\ (h = 1,2,\dots,k)$ به‌کار می‌برد. همچنین مرحله دوم، یعنی $DMU_j^{(2)} = \left(\bar{z}_j, \bar{y}_j\right)$، k خروجی میانی $\bar{z}_{hj}\ (h = 1,2,\dots,k)$ را به‌عنوان ورودی برای تولید s خروجی $\bar{y}_{rj} > 0\ (r = 1,2,\dots,s)$ استفاده می‌کند (شکل ۱ دیده شود).



شکل (۱): ساختار واحد تصمیم‌گیرنده jام $DMU_j=(\mathrm{x}_j,\mathrm{z}_j,\mathrm{y}_j)$.

در این مطالعه، فرض بر این است که تمام ورودی‌ها، تولیدات میانی و خروجی‌های تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای به‌ترتیب، به‌صورت $x_{ij}=(P_i)^{-1}\bar{x}_{ij}\ \left(i=1,2,\dots,m\right)$، $z_{hj}=(Q_h)^{-1}\bar{z}_{hj}\ \left(h=1,2,\dots,k\right)$ و $y_{rj}=(R_r)^{-1}\bar{y}_{rj}\ \left(r=1,2,\dots,s\right)$ بی‌مقیاس شده‌اند که در آن

$$P_i=max_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{x}_{ij}\}-min_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{x}_{ij}\},\qquad \left(i=1,2,\dots,m\right),$$

$$Q_h=max_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{z}_{hj}\}-min_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{z}_{hj}\},\qquad \left(h=1,2,\dots,k\right),$$

$$R_r=max_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{y}_{rj}\}-min_{j=1,2,\dots,n}\{\bar{y}_{rj}\},\qquad \left(r=1,2,\dots,s\right).$$

تحت فرض بازده به‌مقیاس متغیر، مجموعه‌های امکان تولید (یا فناوری‌های) متناظر با مراحل اول و دوم، به صورت زیرند [۱۰]:

$$T_V^{(1)}=\left\{(\mathrm{x},\mathrm{z})\left|\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}\mathrm{x}_j\le\mathrm{x},\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}\mathrm{z}_j\ge\mathrm{z},\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}=1,\quad \lambda_j^{(1)}\ge 0\ (j=1,2,\dots,n)\end{array}\right.\right\},\qquad (1)$$

$$T_V^{(2)}=\left\{(\mathrm{z},\mathrm{y})\left|\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)}\mathrm{z}_j\le\mathrm{z},\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)}\mathrm{y}_j\ge\mathrm{y},\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)}=1,\quad \lambda_j^{(2)}\ge 0\ (j=1,2,\dots,n)\end{array}\right.\right\},\qquad (2)$$

که در آن $\lambda_j^{(1)}$ و $\lambda_j^{(2)}$ به‌ترتیب متغیرهای شدت، متناظر با مراحل اول و دوم اند.

۳ روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه

در این بخش، ابتدا با معرفی یک مدل غیرشعاعی، به شناسایی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی پرداخته و سپس با ارایه روشی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های شبکه، به رتبه‌بندی این واحدهای دومرحله‌ای کارای رأسی می‌پردازیم.

۱.۳. شناسایی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه

ابتدا مدل غیرشعاعی زیر را برای اندازه‌گیری کارایی واحد تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای تحت ارزیابی $DMU_o = (\mathrm{x}_o, \mathrm{z}_o, \mathrm{y}_o), o \in \left\{۱, \dots, n\right\}$ معرفی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad w_o = \left(۲ - w_o^{(۱)}\right) \Big/ \left(۲ + w_o^{(۲)}\right) \\
&\text{s.to:} \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} x_{ij} + s_i^{-(۱)} = x_{io}, \;\; i = ۱,۲, \dots, m; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} z_{hj} - s_h^{+(۱)} = z_{ho}, \;\; h = ۱,۲, \dots, k; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} = ۱, \quad \lambda_j^{(۱)} \geq ۰, \;\; j = ۱,۲, \dots, n; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۲)} z_{hj} + s_h^{-(۲)} = z_{ho}, \;\; h = ۱,۲, \dots, k; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۲)} y_{rj} - s_r^{+(۲)} = y_{ro}, \;\; r = ۱,۲, \dots, s; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۲)} = ۱, \quad \lambda_j^{(۲)} \geq ۰, \;\; j = ۱,۲, \dots, n; \\
&s_i^{-(۱)} \geq ۰, \;\; i = ۱,۲, \dots, m, \quad s_h^{+(۱)} \geq ۰, \;\; h = ۱,۲, \dots, k; \\
&s_r^{+(۲)} \geq ۰, \;\; r = ۱,۲, \dots, s, \quad s_h^{-(۲)} \geq ۰, \;\; h = ۱,۲, \dots, k;
\end{aligned}
$$

که در آن $s_i^{-(۱)}\ (i = ۱,۲, \dots, m)$ و $s_h^{+(۱)}\ (h = ۱,۲, \dots, k)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای کمکی متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌های مرحله اول و $s_h^{-(۲)}\ (h = ۱,۲, \dots, k)$ و $s_r^{+(۲)}\ (r = ۱,۲, \dots, s)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای کمکی متناظر با ورودی ها و خروجی‌های مرحله دوم اند. همچنین، در این مدل،

$$
w_o^{(۱)} = \left(۱/(m+k)\right)\left(\textstyle\sum_{i=۱}^{m}\left(s_i^{-(۱)}/x_{io}\right) + \sum_{h=۱}^{k}\left(s_h^{+(۱)}/z_{ho}\right)\right)
$$

و

$$w_o^{(۲)} = \left(۱/(k+s)\right)\left(\sum_{h=۱}^{k}\left(s_h^{-(۲)}/z_{ho}\right) + \sum_{r=۱}^{s}\left(s_r^{+(۲)}/y_{ro}\right)\right).$$

مدل (۳)، برخلاف مدل‌های CCR و BCC که مدل‌هایی شعاعی‌اند، مدلی غیرشعاعی است. از این رو، با به‌کارگیری مدل (۳) بررسی می‌کنیم که: «۱» آیا امکان کاهش ورودی‌های $x_{io}\ (\forall i)$ و $z_{ho}\ (\forall h)$ به‌ترتیب در مجموعه‌های امکان تولید $T_V^{(۱)}$ و $T_V^{(۲)}$ وجود دارد؟ و «۲» آیا امکان افزایش خروجی‌های $z_{ho}\ (\forall h)$ و $y_{ro}\ (\forall r)$ به‌ترتیب در مجموعه‌های امکان تولید $T_V^{(۱)}$ و $T_V^{(۲)}$ وجود دارد؟. از این رو، به کمینه نمودن تابع هدف مدل (۳) می‌پردازیم. از آنجا که تابع هدف این مدل به‌صورت کسری است و کمینه نمودن آن منجر به کاهش صورت و افزایش مخرج می‌گردد، این امر باعث افزایش متغیرهای کمکی $s_i^{-(۱)}\ (\forall i)$، $s_h^{+(۱)}\ (\forall h)$، $s_h^{-(۲)}\ (\forall h)$ و $s_r^{+(۲)}\ (\forall r)$ می‌شود. بنابراین، با توجه به قیود (۱–۳) و (۴–۳)، ورودی‌های $x_{io}\ (\forall i)$ و $z_{ho}\ (\forall h)$ کاهش یافته و همچنین با توجه به قیود (۲–۳) و (۵–۳)، خروجی‌های $z_{ho}\ (\forall h)$ و $y_{ro}\ (\forall r)$ افزایش می‌یابند.
با به‌کاربردن مدل (۳)، اگر حداقل یکی از متغیرهای کمکی در بهینگی دارای مقدار مثبت باشد، به این معنی است که امکان بهبود در حداقل یکی از ورودی‌ها یا تولیدات میانی یا خروجی‌های DMU_o وجود دارد (در این حالت، $۰ < w_o^* < ۱$). اما در حالتی که تمام متغیرهای کمکی در بهینگی دارای مقدار صفر باشند، این بدین معنی است که امکان بهبود در هیچ‌یک از ورودی‌ها، تولیدات میانی و خروجی‌های DMU_o وجود نخواهد داشت (در این حالت، $w_o^* = ۱$).

قضیه ۱. مدل (۳) شدنی است.

اثبات. از آنجایی که

$$\left(s_i^{-(۱)} = ۰\ (\forall i), s_h^{+(۱)} = ۰\ (\forall h), s_h^{-(۲)} = ۰\ (\forall h), s_r^{+(۲)} = ۰\ (\forall r), \lambda_o^{(۱)} = \lambda_o^{(۲)} = ۱, \lambda_j^{(۱)} = \lambda_j^{(۲)} = ۰\ (\forall j; j \neq o)\right)$$

یک جواب شدنی برای مدل (۳) می‌باشد، از این رو، این مدل، شدنی است.■
فرض کنیم $\left(w_o^*, \mathrm{s}^{-(۱)*}, \mathrm{s}^{+(۱)*}, \mathrm{s}^{-(۲)*}, \mathrm{s}^{+(۲)*}, \lambda^{(۱)*}, \lambda^{(۲)*}\right)$ یک جواب بهینه به‌دست‌آمده از مدل (۳) باشد.

تعریف ۱ (کارای شبکه). واحد تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای DMU_o "کارای شبکه" نامیده می‌شود هرگاه امکان بهبود در هیچ‌یک از ورودی‌ها، تولیدات میانی و خروجی‌های آن وجود نداشته باشد. به‌عبارت دیگر، DMU_o کارای شبکه است هرگاه $w_o^* = ۱$. در غیر این صورت (یعنی $۰ < w_o^* < ۱$)، آن را ناکارای شبکه می‌نامیم.

تبصره ۱. در حالتی که DMU_o کارای شبکه است، $DMU_o^{(۱)}$ و $DMU_o^{(۲)}$ به‌ترتیب روی مرزهای کارای قوی $T_V^{(۱)}$ و $T_V^{(۲)}$ قرار دارند؛ زیرا در این حالت، تمام متغیرهای کمکی بدست آمده از مدل (۳)، برابر صفرند.

تبصره ۲. در حالتی که DMU_o ناکارای شبکه است، حداقل یکی از شرایط زیر برقرار خواهد بود:

- $DMU_o^{(۱)}$ روی مرز کارای قوی $T_V^{(۱)}$ قرار ندارند، یعنی $۰ < w_o^{(۱)*}$،
- $DMU_o^{(۲)}$ روی مرز کارای قوی $T_V^{(۲)}$ قرار ندارند، یعنی $۰ < w_o^{(۲)*}$.

تعریف ۲ (مجموعه مرجع). مجموعه‌های مرجع متناظر با $DMU_o^{(۱)}$ و $DMU_o^{(۲)}$ را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_o^{(۱)} = \left\{ DMU_o^{(۱)} \middle| \lambda_j^{(۱)*} \geq ۰\,, j \in \left\{۱,۲,\dots,n\right\} \right\}$$

و

$$E_o^{(۲)} = \left\{ DMU_o^{(۲)} \middle| \lambda_j^{(۲)*} \geq ۰\,, j \in \left\{۱,۲,\dots,n\right\} \right\}$$

که در آن $\lambda_j^{(۱)*}$ و $\lambda_j^{(۲)*}$ به‌ترتیب جواب‌های بهینه به‌دست‌آمده از مدل‌های (۴) و (۵) (مدل‌های BCC ورودی محور) می‌باشند:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \theta - \varepsilon\left(\textstyle\sum_{i=۱}^{m} s_i^{-(۱)} + \sum_{h=۱}^{k} s_h^{+(۱)}\right)\\
&\text{s.to:}\\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} x_{ij} + s_i^{-(۱)} = \theta x_{io}, \;\; i = ۱,۲,\dots,m;\\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} z_{hj} - s_h^{+(۱)} = z_{ho}, \;\; h = ۱,۲,\dots,k;\\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^{(۱)} = ۱, \quad \lambda_j^{(۱)} \geq ۰, \;\; j = ۱,۲,\dots,n;\\
&s_i^{-(۱)} \geq ۰, \;\; i = ۱,۲,\dots,m, \quad s_h^{+(۱)} \geq ۰, \;\; h = ۱,۲,\dots,k.
\end{aligned}$$

$$\text{Min} \quad \varphi - \varepsilon\left(\textstyle\sum_{h=۱}^{k} s_h^{-(۲)} + \sum_{r=۱}^{s} s_r^{+(۲)}\right)$$

s.to:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)} z_{hj}+s_h^{-(2)}=\varphi z_{ho},\ \ h=1,2,\dots,k;$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)} y_{rj}-s_r^{+(2)}=y_{ro},\ \ r=1,2,\dots,s;$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(2)}=1,\quad \lambda_j^{(2)}\geq 0,\ \ j=1,2,\dots,n;$$
$$s_r^{+(2)}\geq 0,\ \ r=1,2,\dots,s,\quad s_h^{-(2)}\geq 0,\ \ h=1,2,\dots,k.$$

تعریف ۳ (کارای رأسی شبکه). واحد تصمیم‌گیرنده کارای شبکه DMU_o ”کارای رأسی شبکه“ نامیده می‌شود هرگاه مراحل اول و دوم آن، یعنی $DMU_o^{(1)}$ و $DMU_o^{(2)}$، به‌ترتیب در $T_V^{(1)}$ و $T_V^{(2)}$ کارای رأسی باشند؛ به عبارت دیگر، DMU_o کارای رأسی شبکه است هرگاه $E_o^{(1)}=\left\{DMU_o^{(1)}\right\}$ و $E_o^{(2)}=\left\{DMU_o^{(2)}\right\}$، (با توجه به تعریف ۲).

۲.۳. رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه

اکنون، مجموعه‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای شبکه و کارای رأسی شبکه را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$NE=\left\{DMU_j\middle|DMU_j\ \text{کارای شبکه است}\right\}=\left\{DMU_j\middle|w_o^*=1\ ,\ j\in\left\{1,2,\dots,n\right\}\right\},$$

$$NEE=\left\{DMU_j\middle|DMU_j\ \text{کارای رأسی شبکه است}\right\}=$$
$$\left\{DMU_j\middle|E_o^{(1)}=\left\{DMU_o^{(1)}\right\}\ \text{و}\ E_o^{(2)}=\left\{DMU_o^{(2)}\right\}\right\},$$

در این صورت، با توجه به تعریف ۳، واضح است که اگر DMU_o کارای رأسی شبکه باشد، آنگاه کارای شبکه نیز خواهد بود، یعنی $NEE\subseteq NE$؛ ولی عکس این مطلب، لزوماً برقرار نیست.
اگر DMU_o کارای رأسی شبکه نباشد (یعنی $DMU_o\notin NEE$)، آنگاه از تعریف ۳ نتیجه می‌شود که هر دو $DMU_o^{(1)}$ و $DMU_o^{(2)}$ با هم و یا یکی از آنها کارای رأسی نیستند. از این رو، حذف آن از مجموعه مشاهدات مرحله مربوطه، مجموعه امکان تولید متناظر با آن مرحله را تغییر نخواهد داد. ولی اگر $DMU_o\in NEE$، در این صورت، با توجه به‌تعریف ۳، هر دو $DMU_o^{(1)}$ و $DMU_o^{(2)}$ کارای رأسی بوده و بنابراین حذف آنها به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، باعث تغییر در $T_V^{(1)}$ و $T_V^{(2)}$ خواهد شد. لذا، مجموعه‌های امکان تولید جدید زیر را خواهیم داشت:

$$T'^{(۱)}_V = \left\{(\mathrm{x},\mathrm{z})\middle| \begin{array}{c} \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۱)}_j \mathrm{x}_j \leq \mathrm{x}, \quad \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۱)}_j \mathrm{z}_j \geq \mathrm{z}, \\ \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۱)}_j = ۱, \quad \lambda'^{(۱)}_j \geq ۰ \ (j = ۱,۲,\dots,n; j \neq o) \end{array}\right\}, \tag{۶}$$

$$T'^{(۲)}_V = \left\{(\mathrm{z},\mathrm{y})\middle| \begin{array}{c} \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j \mathrm{z}_j \leq \mathrm{z}, \quad \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j \mathrm{y}_j \geq \mathrm{y}, \\ \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j = ۱, \quad \lambda'^{(۲)}_j \geq ۰ \ \left(j = ۱,۲,\dots,n; j \neq o\right) \end{array}\right\}. \tag{۷}$$

که در آن $\lambda'^{(۱)}_j$ و $\lambda'^{(۲)}_j$ به‌ترتیب متغیرهای شدت، متناظر با $T'^{(۱)}_V$ و $T'^{(۲)}_V$ هستند.
سپس، مدل غیرشعاعی زیر را برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که ناکارای شبکه‌اند، یعنی $DMU_p \in J - NE$، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad w_{po} = \left(۲ - w^{(۱)}_{po}\right) \Big/ \left(۲ + w^{(۲)}_{po}\right) \\
&\text{s.to:} \\
&\textstyle\sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۱)}_j x_{ij} + q^{-(۱)}_i = x_{ip}, \ \ i = ۱,۲,\dots,m; \\
&\textstyle\sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۱)}_j z_{hj} - q^{+(۱)}_h = z_{hp}, \ \ h = ۱,\dots,k; \\
&\textstyle\sum_{j=۱}^{n} \lambda'^{(۱)}_j = ۱, \quad \lambda'^{(۱)}_j \geq ۰, \ \ j = ۱,۲,\dots,n; j \neq o; \\
&\textstyle\sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j z_{hj} + q^{-(۲)}_h = z_{hp}, \ \ h = ۱,۲,\dots,k; \\
&\textstyle\sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j y_{rj} - q^{+(۲)}_r = y_{rp}, \ \ r = ۱,۲,\dots,s; \\
&\textstyle\sum_{j=۱,j\neq o}^{n} \lambda'^{(۲)}_j = ۱, \quad \lambda'^{(۲)}_j \geq ۰, \ \ j = ۱,۲,\dots,n; j \neq o; \\
&q^{-(۱)}_i \geq ۰, \ \ i = ۱,۲,\dots,m, \qquad q^{+(۱)}_h \geq ۰, \ \ h = ۱,۲,\dots,k; \\
&q^{+(۲)}_r \geq ۰, \ \ r = ۱,۲,\dots,s, \qquad q^{-(۲)}_h \geq ۰, \ \ h = ۱,۲,\dots,k;
\end{aligned}$$

که در آن $(i = ۱,۲,\dots,m)$ $q^{-(۱)}_i$ و $(h = ۱,۲,\dots,k)$ $q^{+(۱)}_h$ به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای کمکی متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌های مرحله اول در $T'^{(۱)}_V$، و همچنین $(h = ۱,۲,\dots,k)$ $q^{-(۲)}_h$ و $(r = ۱,۲,\dots,s)$ $q^{+(۲)}_r$ به‌ترتیب نشان‌دهنده متغیرهای کمکی متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌های مرحله دوم در $T'^{(۲)}_V$ می‌باشند. به‌علاوه، در این مدل،

$$w_{po}^{(۱)} = \left(۱/(m+k)\right)\left(\sum_{i=۱}^{m}\left(q_i^{-(۱)}/x_{ip}\right) + \sum_{h=۱}^{k}\left(q_h^{+(۱)}/z_{hp}\right)\right)$$

و

$$w_{po}^{(۲)} = \left(۱/(k+s)\right)\left(\sum_{h=۱}^{k}\left(q_h^{-(۲)}/z_{hp}\right) + \sum_{r=۱}^{s}\left(q_r^{+(۲)}/y_{rp}\right)\right).$$

قضیه ۲. مدل (۸) شدنی است.

اثبات. از آنجایی که

$$\left(q_i^{-(۱)} = \cdot\ (\forall i), q_h^{+(۱)} = \cdot\ (\forall h), q_h^{-(۲)} = \cdot\ (\forall h), q_r^{+(۲)} = \cdot\ (\forall r), {\lambda'}_p^{(۱)} = {\lambda'}_p^{(۲)} = ۱, {\lambda'}_j^{(۱)} = {\lambda'}_j^{(۲)} = \cdot\ (\forall j; j \neq p, o)\right)$$

یک جواب شدنی برای مدل (۸) می‌باشد، بنابراین این مدل، شدنی است.■

قضیه ۳. اگر $DMU_o \notin NEE$ آنگاه، برای حداقل یک l که $l = ۱,۲$ داریم: $w_p^{(l)*} = w_{po}^{(l)*}$.

اثبات. اگر $DMU_o \notin NEE$، در این صورت، حداقل یکی از $DMU_o^{(۱)}$ و $DMU_o^{(۲)}$ کارای رأسی نیست و حذف آنها به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، باعث تغییر در مجموعه‌های امکان تولید $T_V^{(۱)}$ و $T_V^{(۲)}$ نخواهد شد، لذا خواهیم داشت: $T_V^{(۱)} = {T'}_V^{(۱)}$ و یا $T_V^{(۲)} = {T'}_V^{(۲)}$. بنابراین، بعد از حل مدل‌های (۳) و (۸)، نتیجه می‌شود که $w_p^{(۱)*} = w_{po}^{(۱)*}$ و یا $w_p^{(۲)*} = w_{po}^{(۲)*}$.■

اکنون، نقطه زیر را متناظر با $DMU_o \in NEE$ در فضای $\mathbb{R}^{Card(J-NE)}$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{u}_o = \left(w_{po}^*\right) \in \mathbb{R}^{Card(J-NE)}, \quad \forall DMU_p \in J-NE; \qquad (۹)$$

به‌عبارت دیگر، مؤلفه‌های u_o مقادیر کارایی واحدهایی‌اند که به مجموعه $J-NE$ تعلق دارند. این مقادیر کارایی از مدل (۸) به‌دست می‌آیند که ممکن است برابر با یک و یا کمتر از آن باشند.

حال نقطه ایده‌آل (I) را در فضای $\mathbb{R}^{Card(J-NE)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{I} = \left(۱,۱,\ldots,۱\right) \in \mathbb{R}^{Card(J-NE)};$$

به‌عبارت دیگر، نقطه ایده‌آل نقطه‌ای است که مؤلفه‌های آن حداکثر مقادیر کارایی برای واحدهای متعلق به مجموعه $J-NE$ را نشان می‌دهند. از آنجا که در تحلیل پوششی داده‌ها حداکثر مقدار کارایی برابر یک

است [۱۲]، تمامی مؤلفه‌های نقطه ایده‌آل برابر با یک در نظر گرفته می‌شوند و این دلیل ایده آل نامیدن آن است.
قرار می‌دهیم:

$$\delta_o = \|\mathrm{I} - \mathrm{u}_o\|_۲ = \left(\sum_{DMU_p \in J-NE}\left(۱ - w_{po}^*\right)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}, \quad \forall DMU_o \in NEE; \qquad (۱۰)$$

به عبارت دیگر، رابطه (۱۰) فاصله اقلیدسی نقطه u_o را از نقطه ایده‌آل نشان می‌دهد.
حال با توجه به مقادیر δ_o به‌دست‌آمده از رابطه (۱۰)، به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه (یعنی واحدهایی که متعلق به مجموعه NEE هستند) می‌پردازیم. بدین صورت که هر چه مقدار δ_o کوچک‌تر باشد، رتبه DMU_o بهتر خواهد بود. به‌عبارت دیگر، به DMU_oایی که کوچک‌ترین δ_o را دارد، "رتبه ۱" اختصاص داده می‌شود؛ زیرا در این حالت، نقطه u_o کم‌ترین فاصله را تا نقطه ایده‌آل خواهد داشت.
این مطلب، بدان معنا است که حذف $DMU_o^{(۱)}$ و $DMU_o^{(۲)}$ به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، موجب می‌شود که مرزهای فناوری‌های به‌دست‌آمده $T'^{(۱)}_V$ و $T'^{(۲)}_V$ به‌ترتیب کم‌ترین فاصله را تا واحدهای ناکارای $DMU_p^{(۱)}$ و $DMU_p^{(۲)}$ داشته باشند.
همچنین، به‌طور مشابه، به DMU_o ای که بزرگ‌ترین δ_o را دارد، "آخرین رتبه" اختصاص می‌یابد زیرا در این حالت، حذف $DMU_o^{(۱)}$ و $DMU_o^{(۲)}$ به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، باعث می‌شود که مرزهای فناوری‌های به‌دست‌آمده $T'^{(۱)}_V$ و $T'^{(۲)}_V$ به‌ترتیب بیش‌ترین فاصله را تا واحدهای ناکارای $DMU_p^{(۱)}$ و $DMU_p^{(۲)}$ داشته باشند. بنابراین، در این حالت، نقطه u_o بیش‌ترین فاصله را تا نقطه ایده‌آل خواهد داشت.

۴ مثال‌ها

۱.۴. مثال عددی

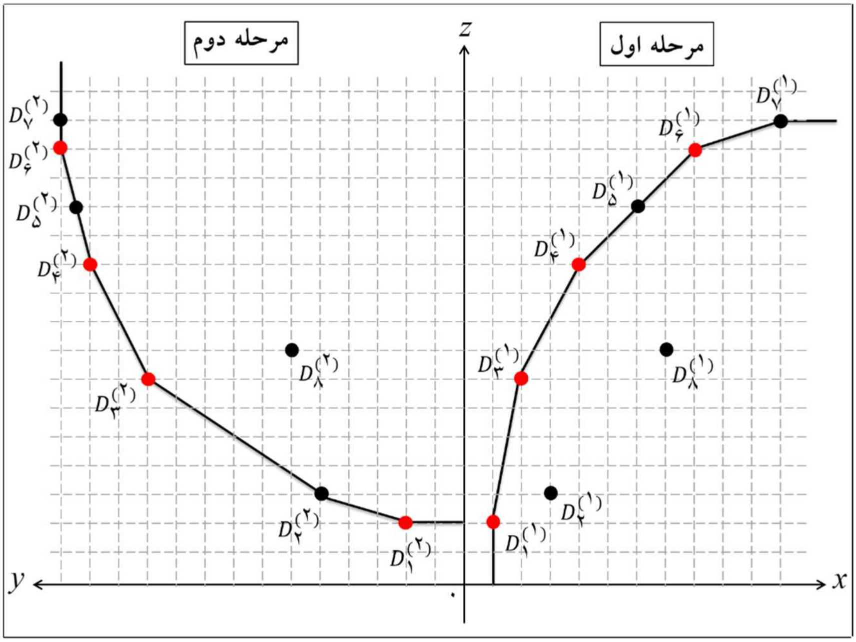
در این بخش، با ارایه یک مثال عددی، به تفسیر شهودی روش پیشنهادی می‌پردازیم. بدین منظور، همان‌گونه که در جدول ۱ نشان داده شده‌است، هشت واحد تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای را با یک ورودی (x)، یک تولید میانی (z) و یک خروجی (y) در نظر می‌گیریم. لذا، قرار می‌دهیم:

$$J = \left\{DMU_j = \left(D_j^{(۱)}, D_j^{(۲)}\right) \middle| j = ۱,۲, \dots, ۸\right\},$$

که در آن $D_j^{(۱)} = (x_j, z_j)$ و $D_j^{(۲)} = (z_j, y_j)$.

جدول (۱): مجموعه داده‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده (مربوط به مثال عددی).

واحد تصمیم‌گیرنده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
ورودی	۱	۳	۲	۴	۶	۸	۱۱	۷
تولید میانی	۲	۳	۷	۱۱	۱۳	۱۵	۱۶	۸
خروجی	۲	۵	۱۰	۱۲	۱۲/۵	۱۳	۱۳	۶



شکل (۲): فناوری‌های مراحل اول و دوم، متناظر با واحدهای تصمیم‌گیرنده مفروض.

همچنین، در این مثال، فرض شده است که x، z و y هم واحداند بنابراین نیازی به بی‌مقیاس کردن آنها نمی‌باشد. شکل ۲ نیز فناوری‌های مراحل اول و دوم، متناظر با واحدهای تصمیم گیرنده داده شده را نشان می‌دهند. لازم به‌ذکر است که در این مثال، تمامی محاسبات با استفاده از نرم افزار GAMS و به‌کاربردن یک دستگاه کامپیوتر با پردازشگر ۲/۲ GHz و حافظه ۴ GB انجام شده‌است.

ابتدا با به‌کاربردن مدل‌های (۳)، (۴) و (۵) به تعیین واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای شبکه و کارای رأسی شبکه می‌پردازیم که در شکل ۲ با رنگ قرمز مشخص شده‌اند. جدول ۲ نتایج به‌دست‌آمده از حل این مدل‌ها را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، واحد تصمیم‌گیرنده ۱ را در نظر بگیرید. جدول ۲ نشان می‌دهد که برای این واحد داریم $w_{۱}^{*} = ۱$ و $E_{۱}^{(۱)} = \left\{DMU_{۱}^{(۱)}\right\}$ و $E_{۱}^{(۲)} = \left\{DMU_{۱}^{(۲)}\right\}$؛ لذا با توجه به تعاریف ۱ و ۳،

واحد تصمیم‌گیرنده ۱ کارای رأسی شبکه است. به‌طور مشابه، واحدهای تصمیم‌گیرنده ۳، ۴ و ۶ نیز کارای رأسی شبکه‌اند.

به‌علاوه، واحد تصمیم‌گیرنده ۵ کارای شبکه می‌باشد ولی کارای رأسی شبکه نیست. زیرا، همان‌گونه که در جدول ۲ دیده می‌شود، $w_{۵}^{*} = ۱$، $E_{۵}^{(۱)} = \left\{DMU_{۴}^{(۱)}, DMU_{۶}^{(۱)}\right\}$ و $E_{۵}^{(۲)} = \left\{DMU_{۴}^{(۲)}, DMU_{۶}^{(۲)}\right\}$.

همچنین، واحدهای تصمیم‌گیرنده ۲، ۷ و ۸ ناکارای شبکه‌اند زیرا، همان‌گونه که جدول ۲ نشان می‌دهد، برای این واحدهای تصمیم‌گیرنده $۰ < w_{o}^{*} < ۱$.

بنابراین، نتیجه می‌شود که:

$$NEE = \left\{DMU_{۱}, DMU_{۳}, DMU_{۴}, DMU_{۶}\right\},$$

$$NE = \left\{DMU_{۱}, DMU_{۳}, DMU_{۴}, DMU_{۵}, DMU_{۶}\right\},$$

$$J - NE = \left\{DMU_{j} \middle| j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\right\} - NE = \left\{DMU_{۲}, DMU_{۷}, DMU_{۸}\right\}.$$

سپس، با به‌کاربردن مدل (۸) و روابط (۹) و (۱۰)، مقادیر u_{o} و δ_{o} متناظر با واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه را بدست می‌آوریم (جدول ۳ دیده شود). جدول ۳ نشان می‌دهد که $\delta_{۳} < \delta_{۴} < \delta_{۶} < \delta_{۱}$؛ بنابراین با توجه به روش پیشنهادی، واحدهای تصمیم‌گیرنده ۳، ۴، ۶ و ۱ به‌ترتیب، رتبه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را خواهند داشت.

شکل ۳ تفسیر شهودی روش رتبه‌بندی پیشنهادی را در فضای $\mathbb{R}^{Card(J-NE)} = \mathbb{R}^{۳}$ نشان می‌دهد. در این شکل، نقاط $\mathrm{u}_{۶}$، $\mathrm{u}_{۱}$، $\mathrm{u}_{۴}$ و $\mathrm{u}_{۳}$ به‌ترتیب با رنگ‌های قرمز، سبز، بنفش و آبی و همچنین، نقطه ایده‌آل $(\mathbf{I})$ با رنگ مشکی نشان داده شده‌اند.

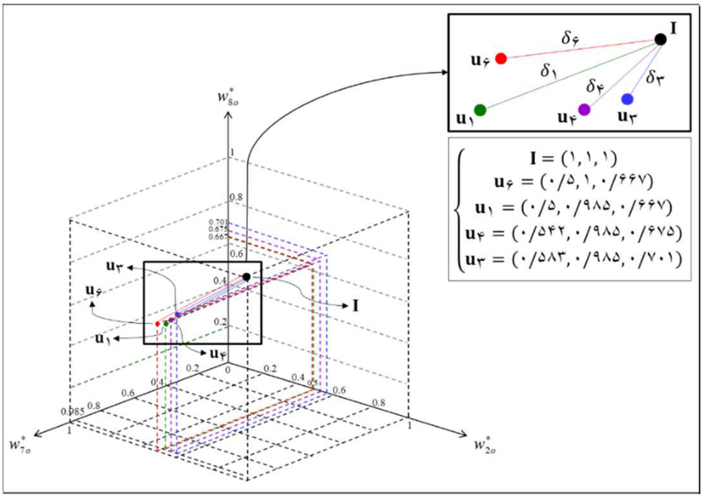
همان‌گونه که در این شکل ۳ دیده می‌شود نقطه $\mathrm{u}_{۳}$ کم‌ترین فاصله را تا نقطه ایده‌آل دارد؛ یعنی $\delta_{۳} =$ ۰/۵۱۳۳۳۷ کم‌ترین فاصله را نشان می‌دهد. از این رو، رتبه "یک" به این واحد تصمیم گیرنده اختصاص می یابد. این مطلب بدان معنا است که حذف مراحل اول و دوم واحد تصمیم گیرنده ۳، به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، باعث بیش‌ترین تأثیر بر روی مرزهای $T_{V}^{(۱)}$ و $T_{V}^{(۲)}$، نشان داده شده در شکل ۲، می‌شود. از این رو، مرزهای فناوری‌های جدید به‌دست‌آمده، به‌ترتیب کم‌ترین فاصله را تا واحدهای تصمیم‌گیرنده ناکارای ۲، ۷ و ۸ خواهند داشت.

جدول (۲): نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌های (۳)، (۴) و (۵) و تعاریف ۱ و ۳ (مربوط به مثال عددی).

واحد تصمیم گیرنده	مدل (۳)	مدل (۴)		مدل (۵)		وضعیت کارایی
	w_o^*	$\lambda^{(۱)*}$	$E_o^{(۱)}$	$\lambda^{(۲)*}$	$E_o^{(۲)}$	
۱	۱	(۱,۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۱}^{(۱)}\}$	(۱,۰,۰,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۱}^{(۲)}\}$	کارای رأسی شبکه
۲	۰/۵	(۰,۰,۰/۵,۰/۵,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۳}^{(۱)}, DMU_{۴}^{(۱)}\}$	(۰,۱,۰,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۲}^{(۲)}\}$	ناکارای شبکه
۳	۱	(۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۳}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۳}^{(۲)}\}$	کارای رأسی شبکه
۴	۱	(۰,۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۴}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۴}^{(۲)}\}$	کارای رأسی شبکه
۵	۱	(۰,۰,۰,۰/۵,۰,۰/۵,۰,۰)	$\{DMU_{۴}^{(۱)}, DMU_{۶}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۰,۰/۵,۰,۰/۵,۰,۰)	$\{DMU_{۴}^{(۲)}, DMU_{۶}^{(۲)}\}$	کارای شبکه
۶	۱	(۰,۰,۰,۰,۰,۱,۰,۰)	$\{DMU_{۶}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۰,۰,۰,۱,۰,۰)	$\{DMU_{۶}^{(۲)}\}$	کارای رأسی شبکه
۷	۰/۹۸۵	(۰,۰,۰,۰,۰,۰,۱,۰)	$\{DMU_{۷}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۰,۰,۰,۱,۰,۰)	$\{DMU_{۶}^{(۲)}\}$	ناکارای شبکه
۸	۰/۶۶۷	(۰,۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۴}^{(۱)}\}$	(۰,۰,۱,۰,۰,۰,۰,۰)	$\{DMU_{۳}^{(۲)}\}$	ناکارای شبکه

جدول (۳): نتایج به‌دست‌آمده از مدل (۸) و روابط (۹) و (۱۰) (مربوط به مثال عددی).

واحد تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه	$w_{۲o}^*$	$w_{۷o}^*$	$w_{۸o}^*$	u_o	δ_o	رتبه
۱	۰/۵	۰/۹۸۵	۰/۶۶۷	(۰/۵,۰/۹۸۵,۰/۶۶۷)	۰/۶۰۰۹۲۸	۴
۳	۰/۵۸۳	۰/۹۸۵	۰/۷۰۱	(۰/۵۸۳,۰/۹۸۵,۰/۷۰۱)	۰/۵۱۳۳۳۷	۱
۴	۰/۵۴۲	۰/۹۸۵	۰/۶۷۵	(۰/۵۴۲,۰/۹۸۵,۰/۶۷۵)	۰/۵۶۱۷۹۵	۲
۶	۰/۵	۱	۰/۶۶۷	(۰/۵,۱,۰/۶۶۷)	۰/۶۰۰۷۴۰	۳



شکل (۳): تفسیر شهودی روش پیشنهادی در رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده مفروض.

همچنین، شکل ۳ نشان می‌دهد که نقطه $u_۱$ بیشترین فاصله را تا نقطه ایده‌آل دارد. یعنی، حذف مراحل اول و دوم واحد تصمیم‌گیرنده ۱، به‌ترتیب از مجموعه مشاهدات مراحل اول و دوم، کم‌ترین تأثیر را بر روی مرزهای $T_V^{(۱)}$ و $T_V^{(۲)}$ خواهد داشت. بنابراین، رتبه "چهار" به این واحد تصمیم‌گیرنده اختصاص داده می‌شود. به‌علاوه، با توجه به این شکل، نقطه $u_۴$ فاصله کم‌تری تا نقطه ایده‌آل نسبت به نقطه $u_۶$ دارد؛ یعنی $\delta_۴ <$ $\delta_۶$؛ از این رو، رتبه‌های ۲ و ۳ به‌ترتیب، به واحدهای تصمیم‌گیرنده ۴ و ۶ اختصاص می‌یابند.

۲.۴. مثال کاربردی

در این بخش، با ارایه یک مثال کاربردی، به بررسی کاربرد روش پیشنهادی پرداخته و مقایسه‌ای بین نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی و روش رتبه‌بندی معرفی شده توسط احدزاده نمین و خمسه [۱] انجام می‌دهیم. از این رو، مجموعه‌ای از ۳۰ واحد تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای با دو ورودی $(x_۱, x_۲)$، دو تولید میانی $(z_۱, z_۲)$ و دو خروجی $(y_۱, y_۲)$ را در نظر می‌گیریم (جدول ۴ دیده شود) که از دسپوتیس و همکاران [۱۳] اقتباس شده‌اند. لازم به‌ذکر است که روش ارایه‌شده توسط دسپوتیس و همکاران [۱۳] به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده چندمرحله‌ای نمی‌پردازد؛ بلکه روشی برای اندازه‌گیری کارایی این واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد.

در این مثال، این واحدهای تصمیم گیرنده به‌عنوان شرکت‌های بیمه در نظر گرفته شده‌اند که دارای دو ورودی – حقوق کارمندان $(x_۱)$ و هزینه‌های پرداخت‌شده به کارگزاران و وکلا $(x_۲)$، دو تولید میانی – حق بیمه دریافتی از مشتریان بیمه‌شده $(z_۱)$ و حق بیمه دریافتی از شرکت‌های واگذارکننده $(z_۲)$ و دو خروجی

– سود حاصل از تجارت بیمه (y_1) و سود حاصل از سرمایه‌گذاری (y_2) می‌باشند. توجه شود که داده‌های نمایش‌داده‌شده در جدول ۴ برحسب ده هزار دلاراند. لازم به‌ذکر است که در این مثال، تمامی محاسبات با استفاده از نرم‌افزار GAMS و به‌کاربردن یک دستگاه کامپیوتر با پردازشگر ۲/۲ GHz و حافظه ۴ GB انجام شده‌است.

جدول (۴): مجموعه داده‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده (مربوط به مثال کاربردی).

واحد تصمیم‌گیرنده	x_1	x_2	z_1	z_2	y_1	y_2
۱	۶۹/۵	۶۸/۶	۵۶/۶	۸۴/۴	۴۸/۷	۶۲/۸
۲	۴۰/۲	۶۶/۲	۸۸	۴۷/۲	۸۵/۸	۲۸/۳
۳	۸۱/۳	۸۹/۸	۴۴/۴	۱۸/۴	۳۸/۳	۲۰/۷
۴	۵۵	۹۷/۹	۲۸/۷	۴۱/۶	۳۸/۲	۱۰/۳
۵	۵۶/۲	۵۹/۱	۲۶/۵	۵۲/۷	۴۴/۲	۱۷/۴
۶	۶۴/۸	۶۴/۴	۱۴/۷	۷۰/۵	۸۶/۶	۲۲/۹
۷	۷۹/۲	۶۸/۱	۶۳/۵	۳۹/۳	۴۷/۶	۳۵
۸	۳۶	۷۴/۳	۶۶/۶	۵۷/۴	۴۰/۳	۹۴/۸
۹	۱۰/۸	۱۰/۳	۴۶/۵	۴۷/۹	۵۷/۵	۹۵/۲
۱۰	۱۷/۷	۹۳/۶	۳۵/۹	۵۸/۷	۴۵/۹	۱۲
۱۱	۳۸/۸	۹۷/۵	۵۵/۲	۴۱/۷	۶۰/۵	۸۲/۷
۱۲	۶۰/۹	۹۶/۴	۸۶	۲۸/۹	۹۳/۱	۷۲/۳
۱۳	۷۰/۳	۴۵/۸	۶۵/۳	۳۵/۳	۳۴/۳	۹۸/۸
۱۴	۲۰/۵	۷۵/۶	۱۳/۱	۶۰	۵۳/۳	۱۸/۳
۱۵	۱۷/۹	۷۴/۸	۵۴/۲	۶۶/۷	۵۲/۱	۱۵/۸
۱۶	۵۱/۸	۱۹/۸	۵۲/۳	۷۴/۲	۷۳/۶	۸۴/۷
۱۷	۱۱/۳	۲۷/۳	۴۲/۷	۷۲/۳	۶۸/۹	۳۷/۴
۱۸	۵۸/۷	۴۲/۱	۹۵/۹	۲۶/۶	۵۱/۶	۹۶/۴
۱۹	۴۱/۴	۵۱/۶	۸۳	۷۵/۴	۲۰/۵	۷۲
۲۰	۹۹/۷	۸۷/۱	۸۷/۵	۹۶/۹	۵۸/۶	۳۹
۲۱	۲۵/۶	۱۴/۶	۵۲	۱۹/۱	۴۴/۳	۵۱/۳
۲۲	۶۵/۱	۹۷/۳	۷۹/۴	۶۸	۵۳/۸	۵۵/۵
۲۳	۴۰/۴	۳۳	۷۴/۵	۲۱/۷	۱۳/۹	۵۵/۷
۲۴	۱۹/۴	۲۰/۱	۷۷/۵	۷۴/۱	۶۰/۹	۷۱
۲۵	۵۴/۲	۹۹/۳	۲۰/۸	۶۹/۹	۴۷/۸	۱۲/۲
۲۶	۸۰/۱	۲۷/۵	۵۱/۳	۹۵/۸	۲۱/۷	۱۲/۶
۲۷	۸۲/۹	۳۸/۱	۴۳/۳	۷۵/۳	۱۶/۸	۲۶/۶
۲۸	۹۸/۶	۸۱/۸	۹۳/۸	۱۵/۹	۴۰/۳	۳۵/۸
۲۹	۷۷/۳	۴۰/۳	۹۵/۶	۵۲/۵	۹۶/۱	۴۴/۲
۳۰	۳۸/۶	۵۸/۳	۳۷/۸	۶۶/۱	۱۶	۶۹/۹

ابتدا با به‌کاربردن مدل‌های (۳)، (۴) و (۵) به‌تعیین وضعیت کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مفروض، می-پردازیم. جدول ۵ نتایج به‌دست‌آمده از این مدل‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۵ و تعاریف ۱ و ۳، واحدهای تصمیم‌گیرنده ۹، ۱۸ و ۲۹ کارای رأسی شبکه‌اند زیرا برای این واحدها، $w_o^* = ۱$ و مجموعه‌های مرجع آنها، خودشان‌اند. همچنین، برای دیگر واحدهای تصمیم‌گیرنده که $w_o^* < ۱$، با توجه به‌تعریف ۱ این واحدها ناکارای شبکه‌اند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$NE = \left\{DMU_{۹}, DMU_{۱۸}, DMU_{۲۹}\right\},$$
$$NEE = \left\{DMU_{۹}, DMU_{۱۸}, DMU_{۲۹}\right\},$$
$$J - NE = \left\{DMU_j \middle| j = ۱,۲, \dots ,۳۰\right\} - NE = \left\{DMU_j \middle| j = ۱,۲, \dots ,۳۰ \,;\, j \neq ۹,۱۸,۲۹\right\}.$$

سپس، به‌منظور رتبه‌بندی، واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه (یعنی واحدهای ۹، ۱۸ و ۲۹) را از مجموعه مشاهدات، حذف کرده و با به‌کاربردن مدل (۸)، به محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده ناکارای شبکه، در هر مورد، می‌پردازیم. با توجه به رابطه (۹)، با استفاده از کارایی‌های محاسبه شده، نقاط $\mathrm{u}_{۹}$، $\mathrm{u}_{۱۸}$ و $\mathrm{u}_{۲۹}$ در فضای $\mathbb{R}^{Card(J-NE)} = \mathbb{R}^{۲۷}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathrm{u}_{۹} = (۰/۷۵۵,۰/۷۹۲,۰/۳۳۶,۰/۴۱۷ ,۰/۴۶۵,۰/۲۸۶,۰/۵۵۶ ,۰/۷۵۳,۰/۴۹۴ ,۰/۶۹۱,۰/۷۳۲,۰/۶۷۹ ,۰/۲۵۸,۰/۵۳۸, ۱,۰/۸۸۸,۰/۶۶۳,۰/۷۸۷ ,۱,۰/۶۹۲ ,۰/۴۰۹ ,۰/۸۸۹,۰/۳۶۲,۰/۴۹۳ ,۰/۴۵۸,۰/۵۶۶ ,۰/۷۱۰);$$
$$\mathrm{u}_{۱۸} = (۰/۷۴۰,۰/۷۸۹,۰/۳۳۶,۰/۴۱۷ ,۰/۴۴۷,۰/۲۸۶,۰/۵۴۷ ,۰/۷۱۴,۰/۴۴۸ ,۰/۶۸۱,۰/۷۳۲, ۰/۶۷۹,۰/۲۵۸,۰/۵۰۷,۰/۹۸۱ ,۰/۸۶۳,۰/۶۶۳,۰/۷۷۰ ,۰/۶۶۳,۰/۶۸۹,۰/۴۰۹ ,۰/۸۸۴,۰/۳۵۱,۰/۴۷۶ ,۰/۴۵۸, ۰/۵۶۶,۰/۴۹۴);$$
$$\mathrm{u}_{۲۹} = (۰/۷۴۰,۰/۷۸۹,۰/۳۳۶,۰/۴۱۷ ,۰/۴۴۷,۰/۲۸۶,۰/۵۴۷ ,۰/۷۱۴,۰/۴۴۸ ,۰/۶۸۱,۰/۷۵۳, ۰/۶۷۹,۰/۲۵۸,۰/۵۰۷,۰/۹۸۱ ,۰/۸۶۳,۰/۶۶۳,۰/۷۷۰ ,۰/۶۶۳,۰/۶۹۰,۰/۴۰۹ ,۰/۸۸۴,۰/۳۵۱,۰/۴۷۶ ,۰/۴۵۸, ۰/۶۹۷,۰/۴۹۴).$$

حال، با در نظر گرفتن نقطه ایده‌آل $\mathrm{I} = \left(۱,۱, \dots ,۱\right) \in \mathbb{R}^{۲۷}$ و به‌کاربردن رابطه (۱۰)، مقادیر $\delta_{۹}$، $\delta_{۱۸}$ و $\delta_{۲۹}$ به‌صورت زیر، محاسبه می‌شوند:

$$\delta_{۹} = \left\|\mathrm{I} - \mathrm{u}_{۹}\right\|_{۲} = \left(\sum_{p=۱, p\neq ۹,۱۸,۲۹}^{۳۰} \left(۱ - w_{p,۹}^*\right)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲/۲۵۵۴۱۴;$$

$$\delta_{۱۸} = \left\|\mathrm{I} - \mathrm{u}_{۱۸}\right\|_{۲} = \left(\sum_{p=۱, p\neq ۹,۱۸,۲۹}^{۳۰} \left(۱ - w_{p,۱۸}^*\right)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲/۳۵۸۶۰۵;$$

$$\delta_{۲۹} = \left\|\mathrm{I} - \mathrm{u}_{۲۹}\right\|_{۲} = \left(\sum_{p=۱, p\neq ۹,۱۸,۲۹}^{۳۰} \left(۱ - w_{p,۲۹}^*\right)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲/۳۳۵۶۰۲.$$

جدول (۵): نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌های (۳)، (۴) و (۵) و تعاریف ۱ و ۳ (مربوط به مثال کاربردی).

واحد تصمیم گیرنده	مدل (۳)	مدل (۴)	مدل (۵)	وضعیت کارایی
	w_o^*	$E_o^{(۱)}$	$E_o^{(۲)}$	
۱	۰/۷۴۰	$\left\{DMU_{۱۷}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}, DMU_{۲۶}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۹}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲	۰/۷۸۹	$\left\{DMU_{۲}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۶}^{(۲)}, DMU_{۱۲}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۳	۰/۳۳۶	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۴	۰/۴۱۷	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۵	۰/۴۴۷	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۱۷}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۶	۰/۲۸۶	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۶}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۷	۰/۵۴۷	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۶}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۸	۰/۷۱۴	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۹}^{(۲)}, DMU_{۱۳}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۹	۱	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۹}^{(۲)}\right\}$	کارای رأسی شبکه

۱۰	۰/۴۴۸	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{17}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{3}^{(2)}, DMU_{14}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۱	۰/۶۸۱	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{24}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{6}^{(2)}, DMU_{9}^{(2)}, DMU_{12}^{(2)}, DMU_{21}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۲	۰/۷۳۲	$\left\{DMU_{2}^{(1)}, DMU_{18}^{(1)}, DMU_{24}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{12}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۳	۰/۶۷۹	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{24}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{13}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۴	۰/۲۵۸	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{17}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{14}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۵	۰/۵۰۷	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{17}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{3}^{(2)}, DMU_{6}^{(2)}, DMU_{14}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۶	۰/۹۸۱	$\left\{DMU_{9}^{(1)}, DMU_{24}^{(1)}, DMU_{26}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{16}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۷	۰/۸۶۳	$\left\{DMU_{17}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{6}^{(2)}, DMU_{9}^{(2)}, DMU_{14}^{(2)}, DMU_{21}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۱۸	۱	$\left\{DMU_{18}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{18}^{(2)}\right\}$	کارای رأسی شبکه
۱۹	۰/۶۶۳	$\left\{DMU_{19}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{9}^{(2)}, DMU_{14}^{(2)}, DMU_{21}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۰	۰/۷۷۰	$\left\{DMU_{20}^{(1)}\right\}$	$\left\{DMU_{6}^{(2)}, DMU_{14}^{(2)}, DMU_{21}^{(2)}\right\}$	ناکارای شبکه

۲۱	۰/۶۶۳	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۲	۰/۶۸۹	$\left\{DMU_{۲}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۶}^{(۲)}, DMU_{۹}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۳	۰/۴۰۹	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۱۸}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}, DMU_{۲۸}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۴	۰/۸۸۴	$\left\{DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۶}^{(۲)}, DMU_{۹}^{(۲)}, DMU_{۱۲}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۵	۰/۳۵۱	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۱۷}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۶	۰/۴۷۶	$\left\{DMU_{۲۶}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۷	۰/۴۵۸	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}, DMU_{۲۶}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۳}^{(۲)}, DMU_{۱۴}^{(۲)}, DMU_{۲۱}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۸	۰/۵۶۶	$\left\{DMU_{۲}^{(۱)}, DMU_{۱۸}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۲۸}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه
۲۹	۱	$\left\{DMU_{۲۹}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۲۹}^{(۲)}\right\}$	کارای رأسی شبکه
۳۰	۰/۴۹۴	$\left\{DMU_{۹}^{(۱)}, DMU_{۱۷}^{(۱)}, DMU_{۲۴}^{(۱)}\right\}$	$\left\{DMU_{۶}^{(۲)}, DMU_{۹}^{(۲)}\right\}$	ناکارای شبکه

سپس، همان‌گونه که در جدول ۶ نشان داده شده است، با توجه به مقادیر $\delta_{۹}$، $\delta_{۱۸}$ و $\delta_{۲۹}$ به‌دست‌آمده در بالا، نتیجه می‌شود که واحدهای تصمیم‌گیرنده ۹، ۲۹ و ۱۸ به‌ترتیب دارای رتبه‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشند، در صورتی‌که نتایج به‌دست‌آمده از روش رتبه‌بندی احدزاده نمین و خمسه [۱] که از روش وزن مشترک استفاده می‌کند، به هر یک از این سه واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارا، رتبه ۱ را اختصاص می‌دهد.
بنابراین این مثال نشان می‌دهد که روش پیشنهادی قادر به رتبه‌بندی واحدهای دومرحله‌ای کارا می‌باشد در حالی‌که روش رتبه‌بندی احدزاده نمین و خمسه [۱] قادر به‌تمایزقایل‌شدن بین واحدهای تصمیم‌گیرنده دو-مرحله‌ای کارای نیست. این مطلب برتری روش رتبه‌بندی پیشنهادی را نسبت به روش رتبه‌بندی احدزاده نمین و خمسه [۱] نشان می‌دهد.

جدول (۶): نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی و روش احدزاده نمین و خمسه [۱] (مربوط به مثال کاربردی).

واحد تصمیم‌گیرنده کارای رأسی شبکه	نتایج روش پیشنهادی		نتایج روش احدزاده نمین و خمسه [۱]	
	δ_o	رتبه	کارایی کل	رتبه
۹	۲/۲۵۵۴۱۴	۱	۱/۰۰۰۰۰۰	۱
۱۸	۲/۳۵۸۶۰۵	۳	۱/۰۰۰۰۰۰	۱
۲۹	۲/۳۳۵۶۰۲	۲	۱/۰۰۰۰۰۰	۱

۵ نتیجه گیری و پیشنهادها برای فعالیت‌های آتی

تاکنون روش‌های متعددی بر پایه تحلیل پوششی داده‌های شبکه به‌منظور رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای با ساختار سری، توسط محققین ارایه شده‌است. ولی این روش‌های رتبه‌بندی دارای ایرادات و ضعف‌هایی‌اند که در بخش اول توضیح داده شد. از این رو، در مطالعه حاضر، روشی را مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های شبکه جهت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی پیشنهاد داده‌ایم که ایرادات و ضعف‌های روش‌های قبلی را بر طرف می‌کند. در این روش پیشنهادی، ابتدا مدلی خطی برای تعیین واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای "کارای شبکه"، "کارای رأسی شبکه" و "ناکارای شبکه" معرفی کرده‌ایم و سپس با استفاده از مجموعه‌های مرجع مراحل اول و دوم و به‌کاربردن نُرم اقلیدسی، روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دومرحله‌ای کارای رأسی شبکه، ارایه داده‌ایم. سپس با ارایه یک مثال عددی روش پیشنهادی را از لحاظ شهودی توضیح داده‌ایم. همچنین با ارایه یک مثال کاربردی به مقایسه روش پیشنهادی با روش رتبه‌بندی ارایه شده توسط احدزاده نمین و خمسه [۱] نیز پرداخته‌ایم.
نتایج حاصل نشان داده‌اند که روش پیشنهادی مقاله حاضر، برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده دو-مرحله‌ای با ساختار سری روشی مناسب می‌باشد به‌طوری که قادر است بین واحدهایی که بدون در نظر گرفتن روابط میانی کارا تشخیص داده شده‌اند، از لحاظ کارایی تمایز قایل‌شود.

لازم به‌ذکر است که روش پیشنهادی را می‌توان برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده چندمرحله‌ای با ساختار موازی نیز تعمیم داد. همچنین می‌توان با تعمیم روش پیشنهادی به واحدهای تصمیم‌گیرنده چند-مرحله‌ای با داده‌های فازی، تصادفی، قابل‌کنترل و غیرقابل‌کنترل و غیره، به رتبه‌بندی این واحدها نیز پرداخت. لازم به‌ذکر است که منظور از داده‌های قابل‌کنترل داده‌هایی‌اند که در جهت خواست مدیر (یا تصمیم‌گیرنده) قابل تغییر می‌باشند در صورتی که داده‌های غیرقابل‌کنترل داده‌هایی‌اند که تغییرات آنها در اختیار مدیر (یا تصمیم گیرنده) نیست [۱۲].

سپاس‌گزاری

نویسنده مقاله از زحمات سردبیر محترم مجله و همچنین داوران محترم که با نظرات ارزشمند و پیشنهادهای سازنده خود موجب بهبود مطالب مندرج در این مقاله شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را به‌عمل می‌آورد.

فهرست منابع

[۱] احدزاده نمین، مهناز؛ خمسه، الهه، رتبه‌بندی واحدهای کارا در شبکه دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها با روش وزن مشترک، *مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی*، **۳** (۱۳۹۶) ۱۸– ۵.

[۲] افضلی‌نژاد، محمد؛ کائیدی، ساناز؛ کیوان، زهره، رتبه‌بندی DMUهای ناکارا در تحلیل پوششی داده‌های شبکه، *چکیده مبسوط پوسترهای ۴۴امین کنفرانس سالانه ریاضی ایران*، (۱۳۹۲) ۳۷۳– ۳۷۰.

[۳] رضوی، سید مصطفی؛ شهریاری، سلطانعلی؛ احمدپور داریانی، محمود، ارزیابی عملکرد نوآورانه شرکت‌های دانش‌بنیان با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای – رویکرد تئوری بازی. *مجله مدیریت صنعتی* **۷** (۱۳۹۴) ۷۴۲– ۷۲۱.

[۴] شیری‌پور، صابر؛ ادیب نیشابوری، آمنه، ارزیابی عملکرد زنجیره‌های تأمین لوله‌های پلی اتیلن با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای فازی. *فصلنامه علمی مطالعات مدیریت صنعتی* **۱۷** (۱۳۹۸) ۲۹۴– ۲۴۷.

[۵] قیصری، حبیب؛ فرج پور خاناپشتانی، قاسم؛ عالمی، محمدعلی، اندازه‌گیری کارآیی، بهره‌وری و رتبه-بندی پالایشگاه‌های گاز ایران با استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای. *مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن* **۱۵** (۱۳۹۷) ۱۵۶– ۱۳۵.

[۶] مداحی، رضا؛ یزدانی نجف‌آبادی، حمیدرضا، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها با در نظر گرفتن دوره‌های زمانی متعدد. *نشریه تصمیم گیری و تحقیق در عملیات* **۵** (۱۳۹۹) ۸۲– ۷۲.

[۷] معمارپور، مهدی؛ واعظی، احسان؛ نجفی، سید اسماعیل، ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی کارایی شعب شهر تهران با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی دومرحله‌ای و تکنیک رتبه‌بندی بردا. *فصلنامه مهندسی تصمیم* **۲** (۱۳۹۵) ۱۰۶– ۸۵.

[8] Amirteimoori A., Jahanshahloo G.R. and Kordrostami, S., *Ranking of decision making units in data envelopment analysis: A distance-based approach*, Appl. Math. Comput. **171**(1) (2005) 122-135.

[9] Andersen P. and Petersen N.C., *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Manag. Sci. **39**(10) (1993) 1261-1294.

[10] Banker R.D., Charnes A. and Cooper W.W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*, Manag. Sci. **30** (1984) 1078-1092.

[11] Charnes A., Cooper W.W. and Rhodes E., *Measuring the efficiency of decision making units*, Eur. J. Oper. Res. **2**(6) (1978) 429-444.

[12] Cooper W.W., Seiford L.M. and Tone K., *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Second ed., Springer Science+Business Media, New York (2007).

[13] Despotis D.K., Sotiros D. and Koronakos G., *A network DEA approach for series multi-stage processes*, Omega **61** (2016) 35-48.

[14] Färe R. and Grosskopf S., *Network DEA*, Socio-Econ. Plan. Sci. **34**(1) (2000) 35-49.

[15] Guo D. and Wu J., *A complete ranking of DMUs with undesirable outputs using restrictions in DEA models*, Math. and Comput. Model. **58**(5-6) (2013) 1102-1109.

[16] Hosseinzadeh Lotfi F., Noora A.A., Jahanshahloo G.R. and Reshadi M., *One DEA ranking method based on applying aggregate units*, Expert Syst. with Appl. **38**(10) (2011) 13468-13471.

[17] Jahanshahloo G.R., Hosseinzadeh Lotfi F., Khanmohammad M., Kazemimanesh M. and Rezaie V., *Ranking of units by positive ideal DMU with common weights*, Expert Syst. with Appl. **37**(12) (2010) 7483-7488.

[18] Jahanshahloo G.R., Hosseinzadeh Lotfi F., Rezaie V. and Khanmohammadi M., *Ranking DMUs by ideal points with interval data in DEA*, Appl. Math. Model. **35**(1) (2011) 218-229.

[19] Jahanshahloo G.R., Hosseinzadeh Lotfi F., Shahverani R., Adabitabar M. and Sohraiee S., *Ranking DMUs by l1-norm with fuzzy data in DEA*, Chaos, Solitons & Fractals **39**(5) (2009) 2294-2302.

[20] Jahanshahloo G.R., Junior H.V., Hosseinzadeh Lotfi F. and Akbarian D., *A new DEA ranking system based on changing the reference set*, Eur. J. Oper. Res. **181**(1) (2007) 331-337.

[21] Jahanshahloo G.R., Memariani A., Hosseinzadeh Lotfi F. and Rezai, H.Z., *A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights*, Appl. Math. Comput. **166**(2) (2005) 265-281.

[22] Jahanshahloo G.R., Sanei M., Hosseinzadeh Lotfi F. and Shoja N., *Using the gradient line for ranking DMUs in DEA*, Appl. Math. Comput. **151**(1) (2004) 209-219.

[23] Kanematsu S.Y., Carvalho N.P., Martinhon C.A. and Almeida M.R., *Ranking using η-efficiency and relative size measures based on DEA*, Omega **90** (2020) 101984.

[24] Liu X., Chu J., Yin P. and Sun J., *DEA cross-efficiency evaluation considering undesirable output and ranking priority: a case study of eco-efficiency analysis of coal-fired power plants*, J. Cleaner Prod. **142** (2017) 877-885.

[25] Li S., Jahanshahloo G.R. and Khadabakhshi, M., *A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Appl. Math. Comput. **184**(2) (2007) 638-648.

[26] Mehrabian S., Alirezaei M.R. and Jahanshahloo G.R., *A complete efficiency ranking of decision making units; an application to the teaches training university*, Comput. Opt. Appl. **14** (1999) 261-266.

[27] Oukil A., *Ranking via composite weighting schemes under a DEA cross-evaluation framework*, Comput. & Ind. Eng. **117** (2018) 217-224.

[28] Oukil A. and Amin G.R., *Maximum appreciative cross-efficiency in DEA: A new ranking method*, Comput & Ind. Eng. **81** (2015) 14-21.

[29] Oral M., Kettani O. and Lang P., *A methodology for collective evaluation and selection of industrial R&D projects*, Manag. Sci. **7**(37) (1991) 871-883.

[30] Ruiz J.L. and Sirvent I., *Common benchmarking and ranking of units with DEA*, Omega **65** (2016) 1-9.

[31] Sexton T.R., Silkman R.H. and Hogan A.J., *Data envelopment analysis: Critique and extensions*, In: Silkman R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Jossey-Bass, San Francisco, CA (1986) 73-105.

[32] Torgersen A.M., Forsund F.R. and Kittelsen S.A.C., *Slack-adjusted efficiency measures and ranking of efficient units*, J. Prod. Anal. **7** (1996) 379-398.

Ranking of extremely efficient two-stage series processes using Euclidean norm in data envelopment analysis

Robabeh Eslami †

Department of Mathematics, Faculty of Technology and Engineering, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

Received: 2020/05/23 Accepted: 2021/07/11

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: Ranking of efficient two-stage decision-making units (DMUs) is one of the most important issues in network data envelopment analysis (DEA), which hitherto many methods have been presented in this context. However, each of these methods has at least one of these drawbacks: Non-linearity, High computational complexity, Lack of distinction between strong and weak efficient two-stage DMUs, Measuring different efficiencies for each of two-stage DMUs, Failure to consider the internal structures of two-stage DMUs in calculating efficiency and ranking them, and Assigning the same ranks to the efficient two-stage DMUs. Hence, to tackle these problems, this study proposes a network DEA-based method to rank the extremely efficient two-stage DMUs with a series structure. The proposed method is based on eliminating these efficient two-stage DMUs from the reference set and evaluating the efficiency of inefficient two-stage DMUs using the Euclidean norm. Finally, two numerical and empirical examples are presented to illustrate the use of the proposed method.

Keywords: Network data envelopment analysis (DEA), Two-stage series processes, Ranking, Extreme efficient, Efficiency.

Mathematics Subject Classification: 97M40, 97N60, 80M50, 46N10.

† Corresponding author.
E-mail Address: amirans.eslami2015@gmail.com