مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۵۳۱–۵۵۷

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.37258.1926

یک روش جدید برای حل مسائل شبکه‌های حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار

هادی بصیرزاده [×]، میلاد حبیبی‌نیا

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۲۸

چکیده: هدف این مقاله، ارائه یک روش جدید برای حل شبکه‌های حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار در مسائل بهینه‌سازی است. شبکه‌های حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار با هدف کمینه‌سازی کل هزینه حمل‌ونقل کالا در شبکه ، یک موضوع مهم و پرکاربرد در مسائل بهینه‌سازی است. دو ویژگی بسیار مهم و کلیدی چندکالایی و کران‌دار در مقالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند و الگوریتم‌هایی برای حل آن ارائه نموده‌اند. ما بر پایه روش سیمپلکس شبکه، روشی ابتکاری را بدون هرگونه پیچیدگی برای به‌دست‌آوردن جواب مسائل شبکه‌های حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار ارائه می‌دهیم. در پایان، کارایی این روش با چند مثال عددی نشان داده‌شده است.

واژه‌های کلیدی: شبکه جریان چندکالایی، مسئله حمل و نقل کران‌دار.

رده‌بندی ریاضی: 90B06;90B10;49Q22

۱ مقدمه

مسائل برنامه‌ریزی گوناگونی را می‌توان به‌صورت شبکه‌ای از گره‌ها (مکان‌ها) و یال‌ها (مسیرها) فرمول‌بندی نمود، به‌طوری که جریان حمل‌ونقل بین این گره‌ها صورت گیرد. تولیدکنندگان و شرکت‌های وارداتی و صادراتی، ناگزیرند رأسا و یا با استفاده از شرکت‌های توزیع، (پخش) کالاهای خود را از طریق شبکه‌های حمل‌ونقل، به متقاضیان برسانند. به‌طور قطع هزینه‌ی حمل‌ونقل بر قیمت تمام‌شده کالاها و خدمات تاثیرگذار است. به حداقل رساندن هزینه‌های حمل‌ونقل یکی از چالش‌های اصلی تولیدکنندگان و شرکت‌های مذکور جهت رقابت با دیگر رقبا است. دولت‌ها نیز درصدد کاهش هزینه‌ها جهت فراهم‌سازی فضای کسب‌وکار کم‌هزینه‌اند. دلایل مذکور باعث جلب توجه محققان به این نوع مسائل شده است. آوردن پاسخ این گونه مسائل در زمره‌ی محاسبه‌ی مسائل کمینه‌سازی هزینه‌ی حمل‌ونقل است. با وجود پیشرفت‌های علوم رایانه و برنامه‌نویسی و ساخت رایانه‌هایی با سرعت پردازش بالا، باز هم به حداقل رساندن محاسبات برای محققان بسیار مهم است، زیرا با توجه به مسائل دنیای واقعی، گاهی تعداد متغیرها و محدودیت‌ها در مسائل به‌قدری بالا است که باز هم فرایند رسیدن به جواب ممکن است مدت زمان زیادی ادامه یابد. از طرفی مسائل غیرخطی در اندازه‌های بزرگ یا به سختی حل می‌گردند یا حل‌پذیر نیستند. به‌همین دلیل مسائل بزرگ

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: habibinia@iran.ir (M. Habibinia), basirzad@scu.ac.ir (H. Basirzadeh)

اغلب به‌صورت خطی مدل‌بندی می‌گردند، لذا روش‌هایی مثل تکنیک حمل‌ونقل که حجم محاسبات به مراتب کمتری دارند از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مسأله کمینه‌سازی هزینه‌ی حمل‌ونقل، یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است که با شیوه‌های متعددی مانند به‌کارگیری «الگوریتم سیمپلکس اولیه» قابل حل است. اما آنچه مدنظر ما است، ساده‌سازی سیمپلکس اولیه است به‌گونه‌ای که بدون نیاز به جدول سیمپلکس، عملیات سیمپلکس را مستقیماً روی گراف یا شبکه اجرا می‌کند. این کار باعث می‌شود بتوان مسائل را ۲۰۰ تا ۳۰۰ بار سریع‌تر از روش سیمپلکس اولیه حل کرد و به «الگوریتم سیمپلکس شبکه» معروف است. توجه به لحاظ کردن هم‌زمان چندنوع کالا در شبکه‌ی حمل‌ونقل را «حمل‌ونقل چندکالایی» و قابلیت محدود کردن ظرفیت حمل‌ونقل هر نوع از کالا در هر مسیر را «حمل‌ونقل کران‌دار» می‌گوییم.

مسئله حمل‌ونقل کلاسیک را اولین بار هیچکاک در سال ۱۹۴۱ [۹] فرمول‌بندی نمود. وی در یکی از مقاله‌هایش الگوریتمی ارائه کرده بود که نقاط مشترکی با روش سیمپلکس داشت. نقطه ضعف کار وی این بود که او از خواص مسئله حمل‌ونقل بجز برای یافتن یک جواب آغازین بهره دیگری نگرفته بود، لذا کار او نتوانست توجه محققان را به این مسئله جلب کند.

کمبود محموله‌های ارسال‌شده طی جنگ جهانی دوم باعث به‌وجودآمدن یک تنگنای بحرانی شد. کوپمنز از خواص جواب‌های بهین مسئله حمل‌ونقل برای کمک به پیدا کردن راه‌هایی برای کاهش زمان‌های ارسال استفاده کرد، به‌دلیل این کار و کاری که هیچکاک در گذشته انجام داده بود، حالت کلاسیک مسئله را اغلب مسئله حمل‌ونقل هیچکاک–کوپمنز می‌نامند. می‌توان گفت کوپمنز جلودار تحقیق روی مسائل خطی و غیرخطی برای مطالعه مسائل اقتصادی بود. مقاله تاریخی‌اش در سال ۱۹۴۷ «استفاده بهینه از سیستم حمل‌ونقل» [۱۰] بر مبنای آزمایشش در زمان جنگ بود. مدل حمل‌ونقل کران‌دار، تعمیم یافته چارچوب مسئله حمل‌ونقل کلاسیک، برای اولین بار توسط هیچکاک [۹] و کوپمنز [۱۰] فرموله شده است. چارنس و کلینگمن [۴] ثابت کردند که مسئله حمل‌ونقل کلاسیک واقعا یک مورد خاص از مسئله حمل‌ونقل کران‌دار است و نشان دادند که چگونه مدل کران‌دار ممکن است به‌عنوان مدل کلاسیک با برخی از متغیرهای کران‌دار از بالا تنظیم شود.
مسئله‌ی مسیریابی VRP برای اولین بار در دهه ۱۹۶۰ تحت عنوان توزیع کامیون توسط دانتزیک و رامسر مطرح شد [۶]. سپس توسط گری و جانسون در سال ۱۹۷۹ [۷]، لنسترا و رینوی کان در سال ۱۹۸۱ [۱۳]، یانو و مک گتینگ در سال ۱۹۸۷ [۱۹] و نیز لاپورته و دجاکس در سال ۱۹۸۹ [۱۱]، مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده‌شد که این مسأله به رده مسائل $NP-$ سخت تعلق دارد و از این رو ارائه الگوریتمی که بتواند با یک پیچیدگی زمانی از درجه چندجمله‌ای مسأله را حل کند امکان‌پذیر نیست. به‌همین علت الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری بسیاری برای حل این مسأله توسعه داده‌شده‌اند (برای دیدن نمونه‌ای از الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری به‌ترتیب به کار لاپورته و نوبرت در سال۱۹۸۷ [۱۲] و کار آرتیچی و اسپرینزا در سال ۲۰۰۶ [۲] رجوع شود). جمع‌بندی و خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده در حوزه‌های مسائل VRP را کرینیک و لاپورته در سال ۱۹۹۷ [۵] ، تات و ویگو در سال ۲۰۰۱ [۱۷] و میرکو استیجیچ در سال ۲۰۱۸ [۱۶] آورده‌اند. جهت مطالعه روش سیمپلکس شبکه و همچنین روش تجزیه برای حل حالت خاصی از مسائل حمل‌ونقل چندکالایی، البته بسیار پیچیده و طولانی است، به کتاب بازارا در سال ۱۹۹۰ [۳] مراجعه شود. یک مدل ریاضی حمل‌ونقل در سیستم‌های لجستیکی که در آن چندکالایی بودن نیز لحاظ شده است توسط محمود دودانگه در سال ۱۳۹۰ [۱] ارائه‌شده است، او تلاش کرده است که مدلی برای مسئله حمل‌ونقل با تعدد اهداف، تنوع محموله‌ها و وسایل حمل، وجود پارامترهای متغیر با زمان، تعدد مبادی، مقاصد و نقاط میانی ارائه دهد. وحیدی، اعتباری و وحدانی در سال ۲۰۱۹ [۱۸] مقاله‌ای درباره‌ی حمل‌ونقل چندکالایی ارائه داده‌اند. اخیرا نیز این موضوع مورد توجه برخی ریاضی‌دانان قرار گرفته است. برای مثال : هاکان آکیوز ، اونکان و آلتینل در سال ۲۰۱۹ [۸] یک روش شاخه و کران برای حل مسئله حمل‌ونقل چندکالایی ظرفیت‌دار ارائه نمودند. رودریگو و رجاپاشا در سال ۲۰۱۸ [۱۴] یک مدل ریاضی برای مسئله حمل‌ونقل چندکالایی ارائه کردند. آنها مسئله مکان‌یابی مراکز توزیع را برای طراحی زنجیره تأمین در یک سیستم توزیع چندکالایی را مطالعه کردند و نشان دادند که این مسئله، تعمیم یک مسئله مکان‌یابی است که در آن کالاهای مختلفی داریم و حمل‌ونقل از یک کارخانه به مشتری از طریق یک مرکز توزیع انجام می‌شود. مسئله آنان پاسخ به این مسئله است که از کدام مراکز توزیع استفاده شود تا تمام خواسته‌های مشتریان برآورده شود و از ظرفیت تولید فراتر نرود، کل هزینه توزیع که هزینه ثابت بهره‌برداری از مرکز توزیع است و هزینه حمل‌ونقل به حداقل برسد. اولوسینا در سال ۲۰۱۸ [۱۵] مسئله کم‌ترین هزینه در یک شبکه حمل‌ونقل چندکالایی را با استفاده از روش بهینه‌سازی چندهدفه آرمانی الفبایی مورد بررسی قرار گرفت.

در این مقاله در بخش دوم روش جدید HB را جهت حل مسائل شبکه‌های چندکالایی و کران‌دار معرفی می‌کنیم. پس از آن با توجه به این که روش جدید ارائه‌شده بر پایه روش سیمپلکس شبکه است، در بخش سوم شرایط بهینگی KKT را برای مسائل حمل‌ونقل یک‌کالایی و کران‌دار نشان می‌دهیم. در بخش چهارم مدل ریاضی شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار و ملاحظات مهم مربوط به آن را تعریف می‌کنیم و در انتها ۲ مثال جهت تشریح موارد مطرح‌شده می‌آوریم.

روش HB، بررسی شرایط بهینگی KKT برای مسائل حمل‌ونقل یک‌کالایی و کران‌دار، تعریف مدل ریاضی شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار و ملاحظات مهم مربوط به آن از نوآوری‌های این مقاله است.

برخی نمادهای استفاده‌شده در این مقاله را در جدول ۱ آورده‌ایم.

۲ روش HB در حل مسئله شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار

در مدل‌های کلاسیک حمل‌ونقل عموماً یک کالا در سیستم جریان دارد اما در مدلی که ما می‌خواهیم بررسی کنیم شبکه حمل‌ونقل می‌تواند دارای ویژگی‌های چندکالایی و محدودیت کران بالا و کران پایین باشد. یکی از روش هایی که برای حل مسائل شبکه‌ای ارائه‌شده، روش

جدول ۱: برخی از نمادهای استفاده‌شده

نماد	توضیحات
x	بردار متغیرهای مسئله اولیه
x_{ij}	میزان کالای تخصیص یافته در یال گره i به گره j
x_{ij}^p	میزان کالای تخصیص یافته کالای p در یال گره i به گره j
c	بردار سطری ضرایب هزینه (معلوم)
c_{ij}	هزینه‌ی حمل‌ونقل هر واحد از کالا از گره i به گره j (معلوم)
c_{ij}^p	هزینه‌ی حمل‌ونقل هر واحد از کالای p از گره i به گره j (معلوم)
m	تعداد همه گره‌های شبکه (معلوم)
n	تعداد همه یال‌های شبکه (معلوم)
t	تعداد همه کالاهای شبکه (معلوم)
b	برداری که i امین مؤلفه‌اش b_i است، و بردار سمت راست نامیده می‌شود
b_j	میزان عرضه یا تقاضا گره j (معلوم)
b_i^p	میزان عرضه یا تقاضای کالای p گره i (معلوم)
w	بردار متغیرهای دوگان متناظر با معادله‌های جریان محافظ گره‌ها
w_i	متغیر دوگان متناظر با معادله جریان محافظ گره i
l	بردار کمینه ظرفیت متغیرهای مسئله اولیه
l_{ij}	کمینه ظرفیت کالا در یال گره i به گره j (معلوم و نامنفی)
l_{ij}^p	کمینه ظرفیت کالای p در یال گره i به گره j (معلوم و نامنفی)
u	بردار بیشینه ظرفیت متغیرهای مسئله اولیه
u_{ij}	بیشینه ظرفیت کالا در یال گره i به گره j (معلوم)
u_{ij}^p	بیشینه ظرفیت کالای p در یال گره i به گره j (معلوم)
$u_{ij}^\star$	باقیمانده ظرفیت کالا در یال گره i به گره j (معلوم)
$u_{ij}^{p^\star}$	باقیمانده ظرفیت کالای p در یال گره i به گره j (معلوم)
v_{ij}	متغیر دوگان متناظر با قیود مربوط به کمینه‌ظرفیت یال گره i به گره j (l_{ij})
h_{ij}	متغیر دوگان متناظر با قیود مربوط به بیشینه‌ظرفیت یال گره i به گره j (u_{ij})

سیمپلکس شبکه است.

تعریف ۱.۲. شبکه‌ای کران‌دار است که حداقل یک یال آن، دارای کران پایین (به‌جز کران پایین صفر) یا کران بالا باشد.

تعریف ۲.۲. شبکه‌ای چندکالایی است که حداقل دو گره آن، به‌ترتیب دارای عرضه و تقاضا برای بیش از یک نوع کالا (حداقل دو کالا) باشند.

روشی را که در اینجا ارائه می‌دهیم HB می‌نامیم. روش HB روشی برای حل مسائل شبکه‌های چندکالایی و کران‌دار است. به‌دلیل اینکه مسئله حمل‌ونقل، یک مسئله شبکه‌ای و نوعی مسئله برنامه‌ریزی خطی است، بنابراین باید شرایط بهینگی کروش–کان–تاکر (KKT) برای آن مورد تصدیق قرار بگیرد. همچنین با توجه به این که روش جدید ارائه‌شده بر پایه روش سیمپلکس شبکه است، و مراحل حل مسائل چندکالایی با استفاده مکرر از روش سیمپلکس شبکه برای یک کالا است، بنابراین کافی است ابتدا شرایط بهینگی KKT روش سیمپلکس شبکه را برای مسائل حمل‌ونقل یک‌کالایی و کران‌دار نشان دهیم و در ادامه آن را برای مسائل حمل‌ونقل چند کالایی و کران‌دار تعمیم دهیم.

۱.۲ شرایط بهینگی **KKT** در مسائل برنامه‌ریزی خطی کران‌دار با محدودیت‌های مساوی

مسئله برنامه‌ریزی خطی کران‌دار زیر را در شکل مساوی در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{ll} Minimize & z = cx \\ subject\ to & Ax = b \\ & x \geq l \\ & x \leq u \end{array} \tag{۱.۲}$$

که در آن c, l, u یک n بردار، b یک m بردار، و A یک ماتریس $m \times n$ است. فرض کنیم $\bar{x}$ جواب شدنی دلخواه برای این مسئله باشد. بردارهای $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ ، $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ و $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ را تعریف می‌کنیم. در

اینجا w ، v و h ضرایب متغیرهای دوگان به‌ترتیب متناظر با $Ax = b$ ، $x \geq l$ و $-x \geq -u$ در (۱.۲) هستند. توجه داریم که w_i ، v_j و h_j نظیر با محدودیت‌های غیرفعال باید صفر باشند. بنابراین دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیرند:

$$\begin{array}{ll} Maximize & z^\star = \ wb + vl - hu \\ subject\ to & wA + v - h = c \\ & w \ \text{نامقید} \ , \quad v \ , \ h \geq 0 \end{array}$$

شرایط KKT به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{array}{rl} Ax = b & x \geq l \ , \ x \leq u \\ wA + v - h = c & \text{نامقید} \ \ w \ , \quad v \ , \ h \geq 0 \\ (v-h)x = 0 & \end{array} \tag{۲.۲}$$

تفاوت اصلی بین این شرایط و شرایط KKT در حالت نامساوی نامقیدبودن بردار متغیرهای دوگان w نظیر با محدودیت $Ax = b$ است.

۱.۱.۲ بهینگی در جواب شدنی پایه

مسئله (۱.۲) را در نظر بگیریم. فرض کنیم $rank(A) = m$. می‌خواهیم ارزیابی مجددی از چگونگی تشخیص یک جواب شدنی پایه بهینه داشته باشیم. فرض کنیم که یک جواب شدنی پایه با پایه B داریم و بخواهیم شرایط (۲.۲) را بررسی کنیم. شرط اول (۲.۲) به‌وضوح برقرار است. شرط دوم (۲.۲) یعنی $c - wA - v + h = 0$ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد، که در آن v، h و c به‌ترتیب به دو بردار v_B، v_N، h_B و h_N، c_B، c_N تجزیه می‌شود و N ماتریس مرکب از ستون‌های غیرپایه‌ای ماتریس A است، به‌عبارتی ماتریس A به دو ماتریس B و N تجزیه می‌شود، بنابراین داریم:

$$(c_B, c_N) - w(B, N) - (v_B, v_N) + (h_B, h_N) = (0, 0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_B - wB - v_B + h_B = 0 \\ c_N - wN - v_N + h_N = 0 \end{array} \right. \tag{۳.۲}$$

با برقراری شرط مکمل زائد $(v - h)x = 0$، از آنجایی که x به دو بردار x_N و x_B تجزیه می‌شود، داریم:
$(v - h)x = ((v_B, v_N) - (h_B, h_N))(x_B, x_N) = 0$ یعنی $(v_B - h_B)x_B = 0$ و $(v_N - h_N)x_N = 0$
چون $x_N = 0$، کافی است که $(v_B - h_B) = 0$ را داشته باشیم، و این یعنی $v_B = h_B$، در این‌صورت معادله (۳.۲) به دو معادله زیر تقلیل می‌یابد:

$$\left\{ \begin{array}{r} c_B - wB = 0 \\ c_N - wN - v_N + h_N = 0 \end{array} \right. \tag{۴.۲}$$

از معادله اول (۴.۲) داریم: $w = c_B B^{-1}$، یا به‌عبارتی دیگر:

$$wB = c_B \tag{۵.۲}$$

و از معادله دوم داریم: $v_N - h_N = c_N - wN = c_N - c_B B^{-1} N$.
بنابراین با یک جواب شدنی پایه، شرط اول (۲.۲) به‌طور خودکار برقرار است. معادله $(v - h)x = 0$ در (۲.۲) با قرار دادن $v_B = h_B$، شرط $wA + v - h = c$ با قرار دادن $w = c_B B^{-1}$ و $v_N - h_N = c_N - c_B B^{-1} N$ برقرارند.
تنها حالتی که ممکن است شرایط KKT در آن‌ها برقرار نباشد، منفی بودن $v_N - h_N$ است. در هر صورت، توجه داریم که $v_N - h_N$ شامل مقادیر $(c_j - z_j)$ است، که در آن z_j به‌ازای هر متغیر غیرپایه است. بنابراین، اگر به‌ازای یک متغیر غیرپایه $c_j - z_j < 0$، آنگاه نامنفی بودن $v_N - h_N$ در معادله $(v - h)x = 0$ برقرار نیست. البته اگر به‌ازای تمام متغیرهای غیرپایه $c_j - z_j \geq 0$، آن‌گاه $v_N - h_N \geq 0$ و تمام شرایط KKT برقرار است. این دقیقا همان معیار خاتمه روش سیمپلکس است.

۳ روش سیمپلکس شبکه برای مسائل یک‌کالایی و کران‌دار

در روش سیمپلکس شبکه، نه نیازی به حل مسئله اولیه داریم و نه حل مسئله دوگان؛ بلکه از فرمولی استفاده می‌کنیم که فرمول مذکور نتیجه‌ای از به‌کارگیری شرایط مکمل زائد روی دوگان مسئله است. [۳]

گام‌های روش سیمپلکس شبکه برای مسائل یک‌کالایی و کران‌دار به‌ترتیب زیرند:
۱. جواب اولیه
۲. به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان
۳. به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی
۴. محورگیری

گام اول (جواب اولیه):

تعریف ۱.۳. جواب اولیه (جواب پابه‌ای شدنی آغازین) جوابی است که در تمام محدودیت‌های شبکه صدق کند، به‌طوری‌که کل تقاضای کالا توسط کل عرضه‌ی آن کالا تامین شود.

یک جواب اولیه (جواب پابه‌ای شدنی آغازین) را با یک درخت فراگیر ریشه‌دار و گره ریشه‌ای r به‌طوری‌که $r \in \mathcal{N}$ به دست می‌آوریم، که $\mathcal{N} = \{۱, ۲, \ldots, m\}$ است.

ملاحظه ۲.۳. نکته‌ی قابل‌توجه و بدیع جهت رسم گراف اصلی جواب شبکه این است که اگر گراف اصلی جواب، درخت نباشد، باید گره‌های نامرتبط را به این گراف اضافه کنیم؛ این کار با استفاده از یال یا یال‌هایی که در کران پایین $x_{ij} = l_{ij}$ و یا در کران بالای خود $x_{ij} = u_{ij}$ قرار دارند، صورت می‌گیرد. بدین ترتیب درخت پایه‌ای فراگیر با حضور همه گره‌ها تشکیل خواهیم داد.

ملاحظه ۳.۳. همچنین اگر یال یا یال‌هایی در کران بالای خود باشند یا به‌عبارتی $x_{ij} = u_{ij}$ و انتخاب هرکدام از آن‌ها در گراف اصلی جواب شبکه، باعث ایجاد دور در شبکه شود، یال‌های مذکور را به‌عنوان یال‌های غیرپایه‌ای در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب درخت پایه‌ای فراگیر بدون دور تشکیل خواهیم داد.

گام دوم (به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان): فرمول (۵.۲) یعنی $wB = c_B$ که درآن بردار

$$w = \begin{bmatrix} w_۱ & w_۲ & \ldots & w_m \end{bmatrix}$$

بردار متغیرهای دوگان و ماتریس وارون‌پذیر B که یک ماتریس $n \times n$ است، بیانگر ماتریس متناظر با درخت پایه و

$$c_B = \begin{bmatrix} c_{i_۰ i_۱} & c_{i_۱ i_۲} & \ldots & c_{i_{k-۱} i_k} \end{bmatrix} \tag{۱.۳}$$

به‌طوری‌که $(i_۰, i_۱, i_۲, \ldots, i_{k-۱}, i_k \in \mathcal{N})$ بردار ضرایب هزینه‌ی متناظر با درخت پایه‌ای است را به جهت به‌دست آوردن w (بردار متغیرهای دوگان) می‌نویسیم.
بدیهی است ماتریس B و بردار c_B معلوم‌اند. برای به‌دست آوردن بردار w که درایه‌های آن مجهول‌اند، ابتدا با قرار دادن $w_r = ۰$، سایر w_iها را با استفاده از $w_i - w_j = c_{ij}$ ، با قرار دادن $\overline{c_{ij}} = ۰$ در

$$\overline{c_{ij}} = z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij} \tag{۲.۳}$$

برای یال‌های پایه‌ای (درخت پایه) به‌دست می‌آوریم.

گام سوم (به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان) و بررسی شرایط بهینگی: با استفاده از w_iهای به‌دست‌آمده برای بررسی بهینگی شبکه، $\overline{c_{ij}}$ در (۲.۳) را برای یال‌های غیرپایه‌ای محاسبه می‌کنیم. $\overline{c_{ij}}$ مربوط به یال‌های غیرپایه‌ای مبنای بررسی شرایط بهینگی شبکه حمل‌ونقل است.
اگر هدف کمینه‌سازی هزینه‌ی حمل‌ونقل در شبکه باشد، مثبت یا منفی بودن عبارت $\overline{c_{ij}}$ در (۲.۳) در هر یال غیرپایه‌ای، اطلاعاتی درباره بهینگی یا عدم بهینگی گراف پایه به ما می‌دهد. به‌عنوان مثال خواهیم دانست که یال مذکور متقاضی ورود به پایه است (یعنی در صورت کاهش مقدار معینی کالا از یک یال و افزایش همان مقدار در یال (i, j) موردنظر، هزینه‌ی کل حمل‌ونقل در شبکه کاهش خواهد داشت) یا اینکه یال مذکور متقاضی ورود به پایه نیست (یعنی در صورت کاهش مقدار معینی کالا از یک یال و افزایش همان مقدار در یال (i, j) موردنظر، هزینه‌ی کل حمل‌ونقل در شبکه افزایش خواهد داشت).
در بررسی شرایط بهینگی، برای $\overline{c_{ij}}$ در (۲.۳) و x_{ij}، به غیر از حالتی که $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$ و $\overline{c_{ij}} = ۰$، چهار حالت امکان دارد رخ دهد:

حالت اول (اگر $\overline{c_{ij}} > 0$ و $x_{ij} = l_{ij}$): بدین معنا است که در صورت امکان تشکیل حلقه، جهت افزایش کالا در یال (i,j)، این افزایش کالا باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد. بنابراین یال موردنظر متقاضی ورود به پایه، یا در صورت موجود بودن در پایه، متقاضی افزایش جریان است.

حالت دوم (اگر $\overline{c_{ij}} > 0$ و $x_{ij} = u_{ij}$): بدین معنا است که با اینکه افزایش کالا در یال (i,j)، باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد اما به‌دلیل اتمام بیشینه ظرفیت یال موردنظر، قابلیت افزایش کالا در یال مذکور وجود ندارد؛ بنابراین یال موردنظر متقاضی ورود به پایه، یا در صورت موجود بودن در پایه، متقاضی افزایش جریان نیست.

حالت سوم (اگر $\overline{c_{ij}} < 0$ و $x_{ij} = u_{ij}$): بدین معنا است که در صورت امکان تشکیل حلقه، جهت کاهش کالا در یال (i,j)، این کاهش کالا باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد. بنابراین یال موردنظر متقاضی کاهش جریان است.

حالت چهارم (اگر $\overline{c_{ij}} < 0$ و $x_{ij} = l_{ij}$): بدین معنا است که با اینکه کاهش کالا در یال (i,j)، باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد اما به‌دلیل اتمام کمینه ظرفیت یال موردنظر، قابلیت کاهش کالا در یال مذکور وجود ندارد؛ بنابراین یال موردنظر متقاضی کاهش جریان نیست.

گام چهارم (محورگیری): از میان یال‌هایی که متقاضی افزایش و یا کاهش جریان همراه با کاهش هزینه حمل‌ونقل‌اند، δ را به‌دست می‌آوریم، به‌طوری‌که:

$$\delta = max|\overline{c_{ij}}|. \tag{۳.۳}$$

توجه داریم که δ ها جزو یکی از حالت‌های اول و یا سوم بررسی شرایط بهینگی هستند، به‌عبارتی دیگر به‌ازای یال (i,j) موردنظر یا ($\overline{c_{ij}} > 0$ و $x_{ij} = l_{ij}$) یا ($\overline{c_{ij}} < 0$ و $x_{ij} = u_{ij}$).

در صورت وجود δ به افزایشی یا کاهشی بودن یال موردنظر توجه می‌کنیم، در صورتی که یال (i,j) متقاضی ورود (افزایش جریان) باشد با تشکیل حلقه منحصربه‌فرد جهت ورود یال موردنظر، یک مقدار Δ را برای یال‌هایی که در جهت یال ورودی در حلقه‌اند اضافه و همان مقدار Δ را برای یال‌هایی که در خلاف جهت یال ورودی در حلقه‌اند کم می‌کنیم. به‌طریق مشابه در صورتی که یال (i,j) متقاضی کاهش جریان باشد با تشکیل حلقه‌ی منحصربه‌فرد، یک مقدار Δ را برای یال‌هایی که در جهت کاهش جریان یال موردنظر در حلقه‌اند کم و همان مقدار Δ را برای یال‌هایی که در خلاف جهت کاهش جریان یال موردنظر در حلقه‌اند اضافه می‌کنیم.

جهت تعیین مقدار Δ برای یال‌های پایه‌ای و غیرپایه‌ای در حلقه‌ی منحصربه‌فرد، از بین کمینه $u^{\star}_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ها (برای یال‌های در جهت یال ورودی به پایه) و کمینه $x_{ij} - l_{ij}$ها (برای یال‌های در خلاف جهت یال ورودی به پایه) کم‌ترین مقدار را برابر با Δ انتخاب می‌کنیم.

بدین ترتیب درخت فراگیر پایه‌ای جدیدی به‌دست آورده و از گام دوم شروع کرده و محاسبات را جهت رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌دهیم.

شرایط بهینگی : جواب بهینه زمانی به‌دست می‌آید که هیچ δ وجود نداشته باشد و یا درصورت وجود، نتوان حلقه‌ای جهت افزایش و یا کاهش جریان یال (i,j) (بنا به متقاضی افزایش و یا کاهش بودن δ) تشکیل داد.

۴ مدل ریاضی شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار

تعریف ۱.۴. شبکه‌ای چندکالایی و کران‌دار است که حداقل دو گره آن، به‌ترتیب دارای عرضه و تقاضا برای بیش از یک نوع کالا (حداقل دو کالا) باشند؛ و حداقل یک یال آن، برای حداقل یک کالا، دارای کران پایین (به‌جز کران پایین صفر) یا کران بالا باشد.

مسئله کمینه‌سازی هزینه جریان شبکه‌ای چندکالایی و کران‌دار عبارت است از: حمل عرضه موجود هر کالا از طریق شبکه برای تامین تقاضای آن کالاها با توجه به کران پایین و بالا برای هر کالا در هر یال، و کران پایین و کران بالای هر یال برای مجموع کالاهای در آن یال با حداقل هزینه. مدل ریاضی مسئله شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار متوازن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Minimize\ Z = \sum_{p=1}^{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c^p_{ij} x^p_{ij}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{p} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki}^{p} = b_{i}^{p} \qquad i = 1,2,\ldots,m \;,\; p = 1,2,\ldots,t \tag{۱.۴}$$

$$x_{ij}^{p} \geq l_{ij}^{p} \qquad i,j = 1,2,\ldots,m \;,\; p = 1,2,\ldots,t \tag{۲.۴}$$

$$x_{ij}^{p} \leq u_{ij}^{p} \qquad i,j = 1,2,\ldots,m \;,\; p = 1,2,\ldots,t \tag{۳.۴}$$

$$\sum_{p=1}^{t} x_{ij}^{p} \geq l_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots,m \;,\; p = 1,2,\ldots,t \tag{۴.۴}$$

$$\sum_{p=1}^{t} x_{ij}^{p} \leq u_{ij} \qquad i,j = 1,2,\ldots,m \;,\; p = 1,2,\ldots,t \tag{۵.۴}$$

که در آن $c_{ij}^{p}, l_{ij}^{p}, u_{ij}^{p}$ یک n بردار، b_{i}^{p} یک m بردار است. به محدودیت‌های ۱.۴ محافظ جریانی، یا تعادل گره‌ای، یا معادله‌های گیرشهف می‌گویند و بر این دلالت دارد که نه جریان در شبکه ایجاد می‌شود و نه از بین می‌رود. در محدودیت‌های ۱.۴ $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{p}$ کل جریان خروجی کالای p از گره i است، در حالی که $\sum_{k=1}^{m} x_{ki}^{p}$ کل جریان ورودی کالای p به گره i را نمایش می‌دهد. به محدودیت‌های ۲.۴ کران پایین (کمینه ظرفیت) کالای p در یال (i,j) گوییم، و به محدودیت‌های ۳.۴ کران بالای (بیشینه ظرفیت) کالای p در یال (i,j) گوییم. محدودیت ۴.۴ تضمین می‌کند مجموع جریان کالاها در یال (i,j) بزرگ‌تر یا مساوی کران پایین (کمینه ظرفیت) یال (i,j) است، همچنین محدودیت ۵.۴ تضمین می‌کند مجموع جریان کالاها در یال (i,j) کوچک‌تر یا مساوی کران بالای (بیشینه ظرفیت) یال (i,j) است.

۵ روش سیمپلکس شبکه برای مسائل چندکالایی و کران‌دار

ما در اینجا روش سیمپلکس شبکه برای مسائل یک‌کالایی و کران‌دار را برای مسائل چندکالایی و کران‌دار تعمیم می‌دهیم. جهت مطالعه بیش‌تر روش سیمپلکس شبکه برای مسائل یک‌کالایی و کران‌دار به کتاب بازارا [۳] مراجعه شود.

همچنین در کتاب بازارا برای مسئله کمینه‌سازی هزینه جریان چندکالایی، الگوریتم تجزیه آمده است که بسیار طولانی و خسته کننده است. ما روش سیمپلکس شبکه را برای مسائل چندکالایی و کران‌دار تعمیم می‌دهیم. در این روش از فرمولی استفاده می‌کنیم که فرمول مذکور نتیجه‌ای از به‌کارگیری شرایط مکمل زائد روی دوگان مسئله چندکالایی و کران‌دار است، که در بخش ۱.۲ به تفصیل به آن پرداخته شد.

گام‌های روش سیمپلکس شبکه برای مسائل چندکالایی و کران‌دار به‌ترتیب زیرند:

۱. جواب اولیه
۲. به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}^{p}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان
۳. به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}^{p}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی
۴. محورگیری

گام اول (جواب اولیه): به‌ازای هر کالا، یک جواب اولیه را با یک درخت فراگیر ریشه‌دار و گره ریشه‌ای r به‌طوری‌که $r \in \mathcal{N}$ به دست می‌آوریم، که در آن $\mathcal{N} = \{1,2,\ldots,m\}$

ملاحظه ۱.۵. در صورت کران‌دار بودن شبکه، در انتخاب جواب اولیه به‌ازای هر کالا همواره باید توجه داشت که شرط کران‌داری برای کالای p در یال (i,j) و شرط کران‌داری یال (i,j) برقرار باشد، به عبارت دیگر همواره باید $l_{ij}^{p} \leq x_{ij}^{p} \leq u_{ij}^{p}$ و $l_{ij} \leq x_{ij}^{p} \leq u_{ij}$ برقرار باشند.

ملاحظه ۲.۵. در صورت کران‌دار بودن شبکه، اگر پس از انتخاب جواب اولیه به‌ازای هر کالا با رعایت تذکر (۱.۵) مجموع کالاهای جریان‌یافته در یک یال از ظرفیت آن یال بیش‌تر باشد؛ یا به‌عبارتی دیگر حداقل برای یک یال پایه‌ای

$$l_{ij} \leq \sum_{p=1}^{t} x_{ij}^{p} \leq u_{ij} \qquad (۱.۵)$$

برقرار نباشد، آنگاه در گام چهارم پس از بررسی شرایط بهینگی و قبل از اقدام برای محورگیری، اگر یال مذکور در یکی از حالات اول یا سوم باشد، آنگاه طبق توضیحات داده‌شده با هدف کاهش هزینه و برقراری عبارت (۱.۵)، به‌ترتیب اندازه‌ای به جریان یال مذکور اضافه می‌کنیم و یا از جریان یال مذکور کاهش می‌دهیم تا عبارت (۱.۵) برقرار شود. در غیر این‌صورت با هدف افزایش هزینه و برقراری عبارت (۱.۵) ، به‌ترتیب اندازه‌ای از جریان یال مذکور کاهش می‌دهیم و یا به جریان یال مذکور اضافه می‌کنیم تا عبارت (۱.۵) برقرار شود.
اگر نتوانیم با افزایش جریان به یال و یا کاهش جریان از یال مذکور باعث برقراری عبارت (۱.۵) شویم، آنگاه کران‌داری یال مذکور در شبکه برقرار نیست و باعث خواهد شد مسئله نشدنی شود.

ملاحظه ۳.۵. نکته‌ی قابل‌توجه این است که در صورتی که اگر درخت پایه‌ای فراگیر در شبکه حمل‌ونقل کالای p با حضور همه گره‌ها تشکیل نشود، باید گره‌های نامرتبط را به این درخت اضافه کنیم؛ این کار با استفاده از یال یا یال‌هایی که در $x_{ij}^{p} = l_{ij}^{P} = 0$ و یا $x_{ij}^{p} = u_{ij}^{P}$ خود قرار دارند، صورت می‌گیرد. یعنی از یال‌هایی که جریان کالای p آن‌ها در کران پایین یا در کران بالای خود هستند برای تکمیل درخت پایه‌ای استفاده کنیم. بدین ترتیب به‌ازای هر کالای p، درخت پایه‌ای فراگیر با حضور همه گره‌ها تشکیل خواهیم داد.

گام دوم (بدست آوردن $\overline{c_{ij}^{p}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان): فرمول $wB = c_B$ در (۵.۲) را به‌ازای هر کالا به‌دست می آوریم، به عبارت دیگر

$$w^p B^p = c_{B^p} \qquad (۲.۵)$$

که درآن بردار

$$w^P = \begin{bmatrix} w_1^p & w_2^p & \dots & w_m^p \end{bmatrix} \qquad (۳.۵)$$

بردار متغیرهای دوگان و ماتریس وارون‌پذیر B^p که یک ماتریس $n \times n$ است، بیانگر ماتریس متناظر با درخت پایه برای شبکه حمل‌ونقل کالای p و

$$c_{B^p} = \begin{bmatrix} c_{i_0 i_1}^{p} & c_{i_1 i_2}^{p} \dots & c_{i_{k-1} i_k}^{p} \end{bmatrix} \qquad (۴.۵)$$

بر اساس (۱.۳) به‌طوری‌که $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k \in \mathcal{N})$ بردار ضرایب هزینه‌ی متناظر با درخت پایه‌ای مربوط به شبکه حمل‌ونقل p است را به جهت به‌دست آوردن بردار متغیرهای دوگان می‌نویسیم.
بدیهی است ماتریس B^p و بردار c_{B^p} معلوم‌اند. برای به‌دست آوردن بردار w^p که درایه‌های آن مجهول‌اند، ابتدا با قرار دادن $w_r^p = 0$ ، سایر w_i^pها را با استفاده از $w_i^p - w_j^p = c_{ij}^p$ با قرار دادن $\overline{c_{ij}}^p = 0$ در

$$\overline{c_{ij}}^p = z_{ij}^p - c_{ij}^p = w_i^p - w_j^p - c_{ij}^p \qquad (۵.۵)$$

برای یال‌های پایه‌ای (درخت پایه) شبکه مربوط به حمل‌ونقل کالای p به‌دست می‌آوریم.

گام سوم (بدست آوردن $\overline{c_{ij}^{p}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان) و بررسی شرایط بهینگی: با استفاده از w_i^pهای به‌دست‌آمده برای بررسی بهینگی شبکه حمل‌ونقل کالای p، $\overline{c_{ij}}^p$ در (۵.۵) را به‌ازای هر کالا برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل همان کالا، محاسبه می‌کنیم. $\overline{c_{ij}}^p$ مربوط به یال‌های غیرپایه‌ای مبنای بررسی شرایط بهینگی شبکه حمل‌ونقل است.
پس از محاسبه کردن $\overline{c_{ij}}^p$ به‌ازای هر کالا، با توجه به هدف مسئله، شرایط بهینگی را بررسی می‌کنیم. اگر هدف کمینه‌سازی هزینه‌ی حمل‌ونقل در شبکه باشد، مثبت یا منفی بودن عبارت $\overline{c_{ij}}^p$ در (۵.۵) در هر یال غیرپایه‌ای، اطلاعاتی درباره بهینگی یا عدم بهینگی گراف پایه شبکه حمل‌ونقل کالای p به ما می‌دهد. به‌عنوان مثال خواهیم دانست که یال مذکور متقاضی ورود به پایه است (یعنی در صورت کاهش مقدار معینی کالا p از یک یال و افزایش همان مقدار در یال (i, j) موردنظر، هزینه‌ی کل حمل‌ونقل در شبکه کاهش خواهد داشت) یا اینکه یال مذکور متقاضی ورود به پایه نیست (یعنی در صورت کاهش مقدار معینی کالا از یک یال و افزایش همان مقدار در یال (i, j) موردنظر، هزینه‌ی کل حمل‌ونقل در شبکه افزایش خواهد داشت).
در بررسی شرایط بهینگی، برای $\overline{c_{ij}}^p$ در (۵.۵) و x_{ij}^p به غیر از حالتی که $l_{ij}^P < x_{ij}^P < u_{ij}^P$ و $\overline{c_{ij}}^P = 0$، چهار حالت امکان دارد رخ دهد:

حالت اول (اگر $\overline{c_{ij}}^P > \circ$ و $x_{ij}^P = l_{ij}^P$): بدین معنا است که در صورت امکان تشکیل حلقه در شبکه حمل‌ونقل کالای p، جهت افزایش کالای p در یال (i,j)، این افزایش کالا باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد. بنابراین یال موردنظر متقاضی ورود به پایه شبکه حمل‌ونقل کالای p؛ یا در صورت موجود بودن در پایه شبکه حمل‌ونقل کالای p، متقاضی افزایش جریان است.

حالت دوم (اگر $\overline{c_{ij}}^p > \circ$ و $x_{ij}^p = u_{ij}^p$): بدین معنا است که با اینکه افزایش کالا p در یال (i,j)، باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد اما به‌دلیل اتمام بیشینه ظرفیت یال موردنظر، قابلیت افزایش کالا در یال مذکور وجود ندارد؛ بنابراین یال (i,j) متقاضی ورود به پایه شبکه حمل‌ونقل کالای p؛ یا در صورت موجود بودن در پایه شبکه حمل‌ونقل کالای p، متقاضی افزایش جریان نیست.

حالت سوم(اگر $\overline{c_{ij}}^p < \circ$ و $x_{ij}^p = u_{ij}^p$): بدین معنا است که در صورت امکان تشکیل حلقه، جهت کاهش کالای p در یال (i,j)، این کاهش کالا باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد. بنابراین یال موردنظر متقاضی کاهش جریان است.

حالت چهارم (اگر $\overline{c_{ij}}^p < \circ$ و $x_{ij}^p = l_{ij}^p$): بدین معنا است که با اینکه کاهش کالا p در یال (i,j)، باعث کاهش هزینه‌ی کل شبکه‌ی حمل‌ونقل خواهد شد اما به‌دلیل اتمام کمینه ظرفیت یال موردنظر، قابلیت کاهش کالا p در یال مذکور وجود ندارد؛ بنابراین یال (i,j) متقاضی کاهش جریان نیست.

گام چهارم (محورگیری): در هر شبکه از میان یال‌هایی از شبکه حمل‌ونقل همه کالاها که متقاضی افزایش و یا کاهش جریان همراه با کاهش هزینه حمل‌ونقل‌اند، δ^p را بر اساس (۳.۳) به‌دست می‌آوریم، به‌طوری‌که به‌ازای هر کالا

$$\delta^p = max|\overline{c_{ij}}^p| \tag{۶.۵}$$

توجه داریم که δ^p ها جزو یکی از حالت‌های اول و یا سوم بررسی شرایط بهینگی هستند، به‌عبارتی دیگر به‌ازای یال (i,j) موردنظر یا ($\overline{c_{ij}}^p > \circ$ و $x_{ij}^p = l_{ij}^p$) یا ($\overline{c_{ij}}^p < \circ$ و $x_{ij}^p = u_{ij}^p$) .

$\delta_\lambda^{p^\star}$ مجموعه منتخب ما جهت محورگیری، بزرگ‌ترین δ^p خواهد بود. به‌عبارتی دیگر

$$\delta_\lambda^{p^\star} = max\{\delta^۱, \delta^۲, \dots, \delta^t\} \tag{۷.۵}$$

که در آن $\lambda \in \{۱, ۲, \dots, p\}$.

برای $\delta_\lambda^{p^\star}$ انتخاب شده، عملیات محورگیری را که در ادامه توضیح داده خواهد شد، انجام می‌دهیم.

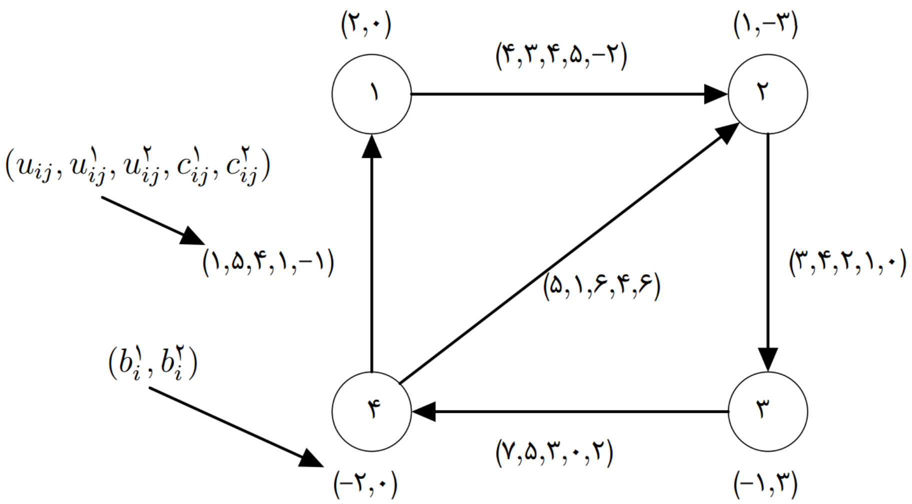
در هر مرحله از محورگیری $\delta_\lambda^{p^\star}$ ، باید توجه داشت که عملیات محورگیری، با توجه به ملاحظه‌های ۱.۵ و ۲.۵ باشد تا همواره این محدودیت‌ها برقرار باشند؛ و به‌همین ترتیب عملیات محورگیری را برای تمام $\delta_\lambda^{p^\star}$ ها، تا کوچک‌ترین مورد انجام خواهیم داد.

در صورت وجود $\delta_\lambda^{p^\star}$ به افزایشی یا کاهشی بودن یال موردنظر توجه می‌کنیم، در صورتی که یال (i,j) متقاضی ورود (افزایش جریان) باشد با تشکیل حلقه منحصربه‌فرد در شبکه حمل‌ونقل کالای p جهت ورود یال (i,j)، یک مقدار Δ^p را برای یال‌هایی که در جهت یال ورودی در حلقه‌اند اضافه و همان مقدار Δ^p را برای یال‌هایی که در خلاف جهت یال ورودی در حلقه‌اند کم می‌کنیم. اما در صورتی که یال (i,j) متقاضی کاهش جریان باشد با تشکیل حلقه منحصربه‌فرد جهت کاهش جریان، مقدار Δ^p را برای یال‌هایی که در جهت کاهش جریان یال موردنظر در حلقه‌اند کم و همان مقدار Δ^p را برای یال‌هایی که در خلاف جهت کاهش جریان یال موردنظر در حلقه‌اند اضافه می‌کنیم.

جهت تعیین مقدار Δ^p برای یال‌های پایه‌ای و غیرپایه‌ای در حلقه‌ی منحصربه‌فرد در شبکه حمل‌ونقل کالای p، از بین کمینه $u_{ij}^\star = u_{ij} - x_{ij}$ها و $u_{ij}^{p^\star} = u_{ij}^p - x_{ij}^p$ها (برای یال‌های در جهت یال ورودی به پایه) و کمینه $x_{ij} - l_{ij}$ها و $x_{ij}^p - l_{ij}^p$ها (برای یال‌های در خلاف جهت یال ورودی به پایه) کم‌ترین مقدار را برابر با Δ^p انتخاب می‌کنیم.

بدین ترتیب برای هر شبکه حمل‌ونقل کالایی که در مجموعه منتخب جهت محورگیری هستند، (۷.۵) درخت فراگیر پایه‌ای جدیدی به‌دست آورده و از گام دوم تکرار کرده و محاسبات را جهت رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌دهیم.

شرایط بهینگی : جواب بهینه زمانی به‌دست می‌آید که هیچ $\delta_\lambda^{p^\star}$ وجود نداشته باشد و یا درصورت وجود، نتوان حلقه‌ای جهت افزایش و یا کاهش جریان یال (i,j) (بنا به متقاضی افزایش و یا کاهش بودن $\delta_\lambda^{p^\star}$) تشکیل داد.



شکل ۱: گراف شبکه حمل‌ونقل مربوط به مثال عددی ۱

۶ مثال عددی ۱

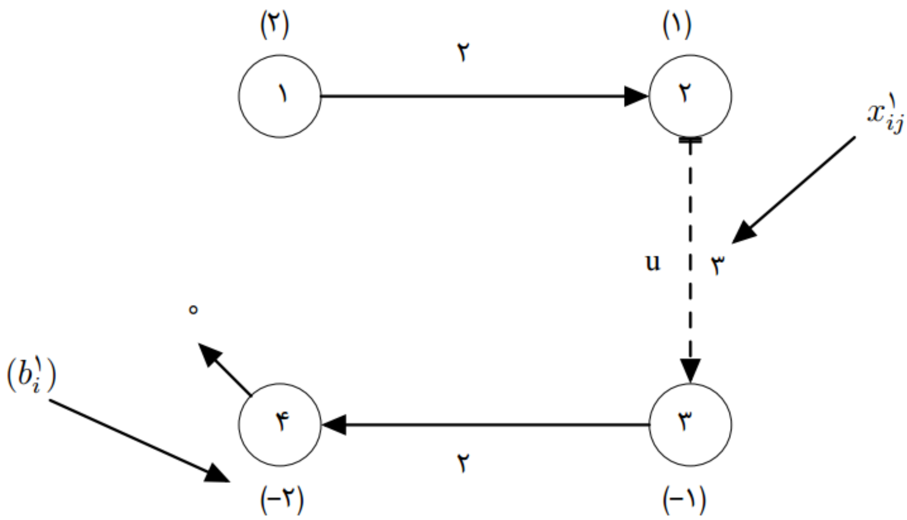
مثال زیر یک مثال از فصل ۱۲ کتاب بازارا است. [۳] در کتاب بازارا این مثال از روش الگوریتم تجزیه حل شده است. راه‌حل ارائه‌شده در آن بسیار طولانی و خسته کننده است. ما این مسئله را بدون استفاده از الگوریتم تجزیه و صرفا با روش ابتکاری خودمان (HB) حل می‌کنیم. جواب به‌دست‌آمده دقیقا با جواب به‌دست‌آمده با الگوریتم تجزیه در کتاب بازارا مطابقت دارد.

مسئله کمینه‌سازی هزینه‌ی جریان دوکالایی و کران‌دار را که داده‌های آن در گراف زیر داده‌شده در نظر بگیریم. کران پایین همه یال‌ها صفر در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر به‌ازای هر یال (i, j) دلخواه شبکه، $l_{ij} = ۰$.

۶.۱ گام اول (جواب اولیه):

جواب اولیه (جواب اولیه را می‌توان با استفاده از هر یک از روش های موجود به‌دست آورد، اما توصیه ما استفاده از روش وگل است) برای هر دو کالا را به‌ترتیب در زیر آورده‌ایم:

جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱: میزان کالای اختصاص داده‌شده به هر یال به‌ازای کالای ۱ را در گراف ذیل آورده‌ایم.

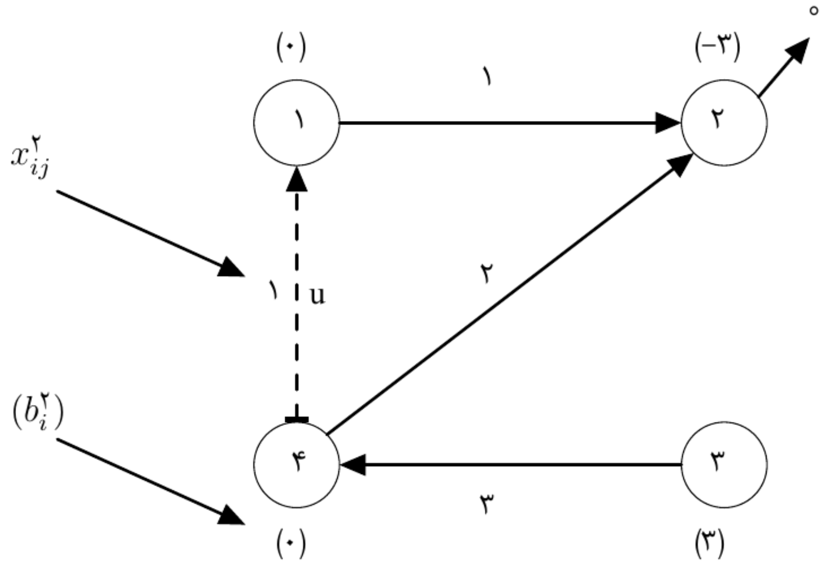


شکل ۲: گراف جواب اولیه شبکه حمل‌ونقل کالای ۱

u نماد Uper bound است و به‌معنای آن است که یال مورد نظر در کران بالای خود قرار دارد.

همان‌طور که در گراف پایه‌ای بالا مشاهده می‌کنیم، با استفاده از تذکر (۲.۳) جریان دو یال $(۱,۲)$ و $(۳,۴)$ در حالت $l_{۱۲} < l^{۱}_{۱۲} < x^{۱}_{۱۲} < u^{۱}_{۱۲} < u_{۱۲}$ و $l_{۳۴} < l^{۱}_{۳۴} < x^{۱}_{۳۴} < u^{۱}_{۳۴} < u_{۳۴}$ و جریان یال $(۲,۳)$ که با نقطه‌چین نشان داده‌شده است، در حالت $x^{۱}_{۲۳} = u^{۱}_{۲۳}$ و یکی از یال‌های پایه‌ای است و بدین ترتیب درخت پایه‌ای فراگیر با حضور همه گره‌ها تشکیل شده است.

جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲: میزان کالای اختصاص داده‌شده به هر یال به‌ازای کالای ۲ را گراف در ذیل آورده‌ایم.
در گراف پایه‌ای زیر، با استفاده از تذکر (۳.۳) جریان سه یال $(۱,۲)$، $(۳,۴)$ و $(۴,۲)$ در حالت $l_{۱۲} < l^{۲}_{۱۲} < x^{۲}_{۱۲} < u^{۲}_{۱۲} < u_{۱۲}$، $l_{۳۴} < l^{۲}_{۳۴} < x^{۲}_{۳۴} < u^{۲}_{۳۴} < u_{۳۴}$ و $l_{۴۲} < l^{۲}_{۴۲} < x^{۲}_{۴۲} < u^{۲}_{۴۲} < u_{۴۲}$ و جریان یال $(۴,۱)$ که با نقطه‌چین نشان داده‌شده است، در حالت $x^{۲}_{۴۱} = u^{۲}_{۴۱}$ و یکی از یال‌های غیرپایه‌ای است. بدین ترتیب گراف درخت پایه‌ای بدون دور تشکیل داده‌ایم.



شکل ۳: گراف جواب اولیه شبکه حمل‌ونقل کالای ۲

۲.۶ گام دوم (به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}^{p}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان):

اکنون $\overline{c_{ij}}^{p}$ها را برای یال‌های پایه‌ای شبکه‌های حمل‌ونقل هر دو کالا، به‌ترتیب در زیر به‌دست می‌آوریم:

$\overline{c_{ij}}^{p}$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱: با استفاده از فرمول $w^{p}B^{p} = c_{B^{p}}$ در (۲.۵) داریم: $w^{۱}B^{۱} = c_{B^{۱}}$، بنابراین با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$w^{۱} = \begin{bmatrix} w^{۱}_{۱} & w^{۱}_{۲} & w^{۱}_{۳} & w^{۱}_{۴} \end{bmatrix} \quad , \quad c_{B^{۱}} = \begin{bmatrix} c^{۱}_{۱۲} & c^{۱}_{۲۳} & c^{۱}_{۳۴} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$w^{۱}_{i}$ها را با استفاده از $w^{۱}_{i} - w^{۱}_{j} = c^{۱}_{ij}$ با قرار دادن $\overline{c_{ij}}^{۱} = ۰$ در (۵.۵)

$$\overline{c_{ij}}^{۱} = z^{۱}_{ij} - c^{۱}_{ij} = w^{۱}_{i} - w^{۱}_{j} - c^{۱}_{ij}$$

برای یال‌های پایه‌ای به‌دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$w_۱^۱ - w_۲^۱ = ۵ \rightarrow \quad w_۱^۱ = ۶ \quad , \quad w_۲^۱ - w_۳^۱ = ۱ \rightarrow \quad w_۲^۱ = ۱$$

$$w_۳^۱ - w_۴^۱ = ۰ \rightarrow \quad w_۳^۱ = ۰ \quad , \quad w_۴^۱ = ۰$$

که در آن $w_۴^۱$ متغیر دوگان متناظر با معادله جریان محافظ گره ریشه برای گراف پایه‌ای کالای اول می‌باشد.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲: با استفاده از فرمول $w^pB^p = c_{B^p}$ در (۲.۵) داریم: $w^۲B^۲ = c_{B^۲}$، بنابراین با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$w^۲ = \begin{bmatrix} w_۱^۲ & w_۲^۲ & w_۳^۲ & w_۴^۲ \end{bmatrix} \quad , \quad c_{B^۲} = \begin{bmatrix} c_{۱۲}^۲ & c_{۳۴}^۲ & c_{۴۲}^۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$w_i^۲$ها را با استفاده از $w_i^۲ - w_j^۲ = c_{ij}^۲$ با قرار دادن $\overline{c_{ij}}^۲ = ۰$ در (۵.۵)

$$\overline{c_{ij}}^۲ = z_{ij}^۲ - c_{ij}^۲ = w_i^۲ - w_j^۲ - c_{ij}^۲$$

برای یال‌های پایه‌ای به‌دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$w_۱^۲ - w_۲^۲ = -۲ \rightarrow \quad w_۱^۲ = -۲ \quad , \quad w_۳^۲ - w_۴^۲ = ۲ \rightarrow \quad w_۳^۲ = ۸$$

$$w_۴^۲ - w_۲^۲ = ۶ \rightarrow \quad w_۴^۲ = ۶ \quad , \quad w_۲^۲ = ۰$$

که در آن $w_۲^۲$ متغیر دوگان متناظر با معادله جریان محافظ گره ریشه برای گراف پایه‌ای کالای دوم می‌باشد.

۳.۶ گام سوم (به‌دست آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی):

در این گام $\overline{c_{ij}}^p$ ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای هر شبکه حمل‌ونقل با استفاده از $\overline{c_{ij}}^p$ در (۵.۵) به‌دست آورده‌ایم.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱: با استفاده از $w_i^۱$های به‌دست‌آمده برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱، $\overline{c_{ij}}^۱$ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{۴۱}}^۱ = z_{۴۱}^۱ - c_{۴۱}^۱ = w_۴^۱ - w_۱^۱ - c_{۴۱}^۱ = -۷ \quad \rightarrow \quad (\overline{c_{۴۱}}^۱ < ۰ \ , \ x_{۴۱}^۱ = l_{۴۱})$$

$$\overline{c_{۴۲}}^۱ = z_{۴۲}^۱ - c_{۴۲}^۱ = w_۴^۱ - w_۲^۱ - c_{۴۲}^۱ = -۵ \quad \rightarrow \quad (\overline{c_{۴۲}}^۱ < ۰ \ , \ x_{۴۲}^۱ = l_{۴۲})$$

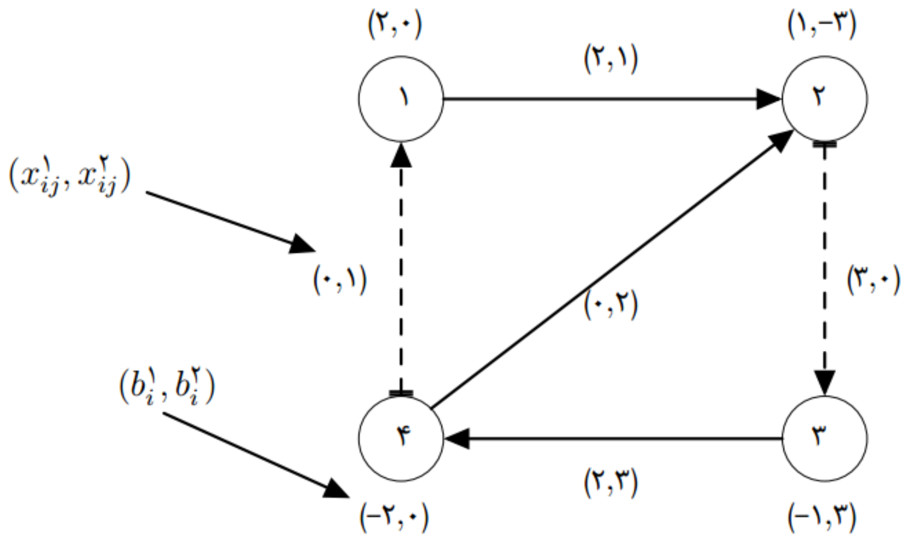
– با توجه به اینکه هیچ یالی متقاضی ورود به پایه نیست، شبکه حمل‌ونقل کالای ۱ بهینه است.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲: با استفاده از $w_i^۲$های به‌دست‌آمده برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲، $\overline{c_{ij}}^۲$ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{۲۳}}^۲ = z_{۲۳}^۲ - c_{۲۳}^۲ = w_۲^۲ - w_۳^۲ - c_{۲۳}^۲ = -۸ \quad \rightarrow \quad (\overline{c_{۶۱}}^۲ < ۰ \ , \ x_{۲۳}^۲ = l_{۲۳})$$

$$\overline{c_{۴۱}}^۲ = z_{۴۱}^۲ - c_{۴۱}^۲ = w_۴^۲ - w_۱^۲ - c_{۴۱}^۲ = ۹ \quad \rightarrow \quad (\overline{c_{۴۱}}^۲ > ۰ \ , \ x_{۴۱}^۲ = u_{۴۱}) \quad \times$$

– موردی که در انتهای سطر دوم با علامت $\times$ مشخص شده است، متقاضی ورود به پایه است، ولی حلقه‌منحصربه‌فرد مربوطه (به‌دلیل اینکه یال $(۴, ۱)$ در کران بالای خود قرار دارد) تشکیل نمی‌شود. بنابراین یال $(۴, ۱)$ قابلیت ورود به پایه را ندارد و شبکه حمل‌ونقل کالای ۲ بهینه است.



شکل ۴: گراف شبکه حمل‌ونقل مثال عددی ۱ در حالت بهینه

۴.۶ جواب بهین :

با توجه به اینکه به‌ازای هر $\overline{c_{ij}}^P < ۰$ و $\overline{c_{ij}}^P > ۰$ به‌ترتیب داریم $x_{ij}^P = l_{ij}$ و $x_{ij}^P = u_{ij}$ ، نتیجه می‌گیریم که شبکه در حالت بهینه قرار دارد. بنابراین اطلاعات زیر در شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار با استفاده از روش ابتکاری HB به‌دست‌آمده است:

هزینه حمل‌ونقل در شبکه در حالت بهینه:

$$Minimize\ z = \sum_{p=۱}^{t} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{m} c_{ij}^p x_{ij}^p$$

$$= x_{۱۲}^{۱} c_{۱۲}^{۱} + x_{۲۳}^{۱} c_{۲۳}^{۱} + x_{۳۴}^{۱} c_{۳۴}^{۱} + x_{۴۱}^{۱} c_{۴۱}^{۱} + x_{۴۲}^{۱} c_{۴۲}^{۱}$$

$$+ x_{۱۲}^{۲} c_{۱۲}^{۲} + x_{۲۳}^{۲} c_{۲۳}^{۲} + x_{۳۴}^{۲} c_{۳۴}^{۲} + x_{۴۱}^{۲} c_{۴۱}^{۲} + x_{۴۲}^{۲} c_{۴۲}^{۲}$$

$$= ۲۸$$

که دقیقا همان پاسخی است که در کتاب بازارا برای این مسئله به‌دست‌آمده است.

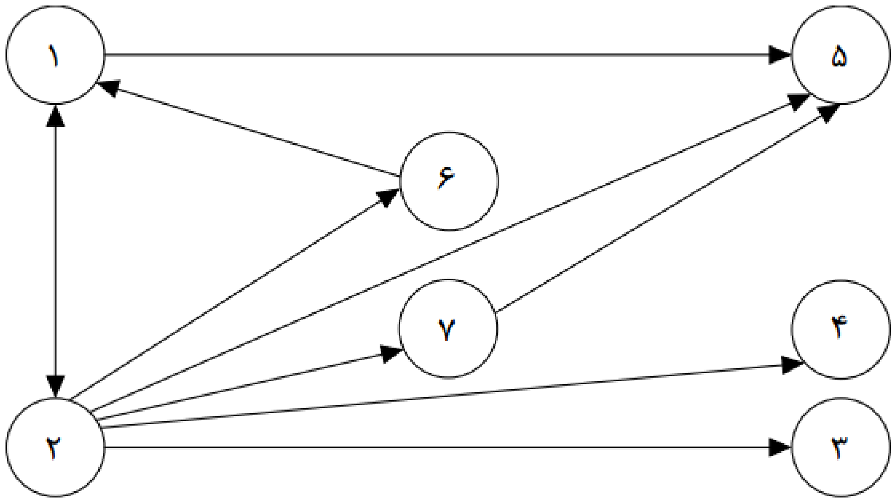
۷ مثال عددی ۲

این مثال براساس بخشی از یک مسئله واقعی است که با توجه به تنوع کالاها، ظرفیت مسیرها، دوجهته بودن بعضی مسیرها و تعداد مبادی، نقاط میانی و مقاصد مدنظر است. هدف اصلی کمینه کردن هزینه شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار است.

مسئله کمینه‌سازی هزینه‌ی جریان چهارکالایی و کران‌دار را که در شکل ۵ نمایش داده‌شده است، در نظر بگیریم. در این شبکه، ۷ گره و ۴ کالا داریم، که گره ۲ گره مبدا، گره‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ گره‌های مقصد و گره‌های ۶ و ۷ گره‌های میانی‌اند. گره‌های میانی با دو یال در طرفین، گره‌های مبدا و مقصد را به هم متصل می‌کنند. هزینه حمل‌ونقل کالاها هر یال و کران بالای هر یال در شبکه در جدول ۲ و میزان عرضه و تقاضا هر گره به‌ازای هر کالا در شبکه حمل‌ونقل در جدول ۳ آمده است

ملاحظه ۱.۷. کران پایین همه یال‌ها صفر در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر به‌ازای هر یال (i, j) دلخواه شبکه، $l_{ij} = ۰$.

هر یک از گره‌ها در شبکه، عرضه و یا تقاضای متفاوتی به‌ازای هرکالا دارند. در جدول ۳ عرضه و یا تقاضای هر گره به‌ازای هر کالا در شبکه نوشته شده است.



شکل ۵: گراف مربوط به شبکه حمل‌ونقل مثال عددی ۲

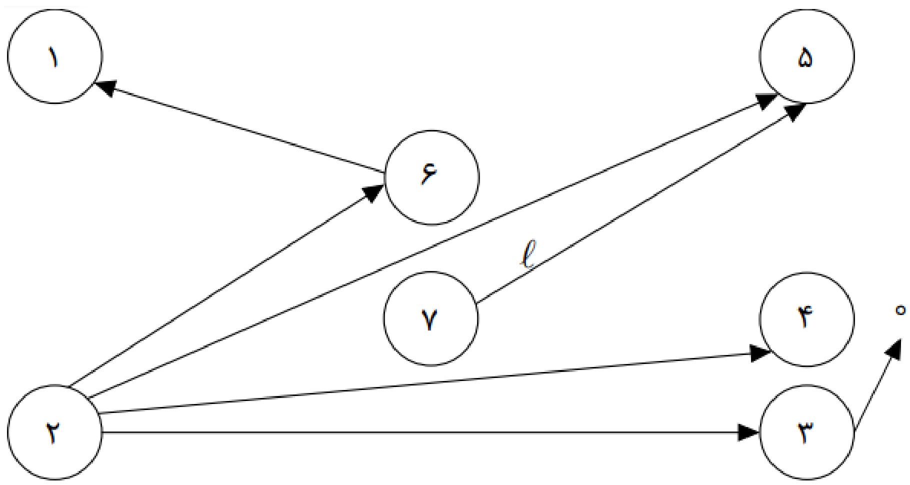
جدول ۲: هزینه حمل‌ونقل کالاها در هر یال در شبکه و کران بالای یال‌ها

(i,j)	$(۲,۵)$	$(۲,۷)$	$(۷,۵)$	$(۱,۵)$	$(۲,۴)$	$(۲,۳)$	$(۲,۱)$	$(۲,۶)$	$(۶,۱)$
$c_{ij}^{۱} = c_{ij}^{۲}$	۲۳	۷	۷	۵	۱۵	۳۴	۲۷	۲۵	۲۵
$c_{ij}^{۳} = c_{ij}^{۴}$	۲۵	۱۰	۱۰	۸	۱۸	۳۵	۳۰	۲۸	۲۸
u_{ij}	۱۶۷۷	۵۴۷	۵۴۷	۳۶۵	–	–	–	–	–

پاسخ: با استفاده از روش HB پاسخ مسئله را به‌دست می‌آوریم

گام اول (جواب اولیه): جواب اولیه برای همه کالاها را به‌ترتیب در زیر آورده‌ایم:

جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: جدول میزان کالای اختصاص داده‌شده به هر یال به‌ازای کالای شماره ۱) و کالای شماره ۲ را در جدول ۴ آورده‌ایم. از آنجا که گراف پایه‌ای برای کالاهای مذکور برابر است، بنابراین هر دو کالا را با یک گراف در شکل ۶ نمایش می‌دهیم.



ℓ نماد Lower bound است و به‌معنای آن است که یال مورد نظر در کران پایین خود قرار دارد.

شکل ۶: گراف جواب اولیه شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲

جدول ۳: میزان عرضه و تقاضا هر گره به‌ازای هر کالا در شبکه حمل‌ونقل

شماره گره / شماره کالا	۱	۲	۳	۴
۱	−۵۱	−۱۶	۰	۰
۲	۷۲۵	۲۰۵	۱۷۱	۶۷
۳	−۸۰	−۸	−۵۵	−۲۱
۴	−۲۹۰	−۸	−۵۳	−۲۱
۵	−۳۰۴	−۱۷۳	−۶۳	−۲۵

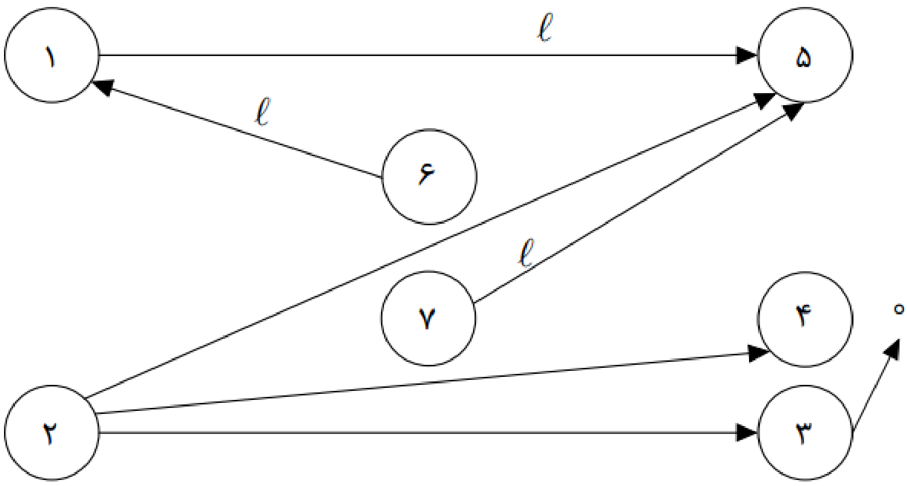
جدول ۴: جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲

x^{1}_{ij}	x^{1}_{26}	x^{1}_{61}	x^{1}_{23}	x^{1}_{24}	x^{1}_{25}
میزان کالای ۱	۵۱	۵۱	۸۰	۲۹۰	۳۰۴
x^{2}_{ij}	x^{2}_{26}	x^{2}_{61}	x^{2}_{23}	x^{2}_{24}	x^{2}_{25}
میزان کالای ۲	۱۶	۱۶	۸	۸	۱۷۳

جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: جدول میزان کالای اختصاص داده‌شده به هر یال به‌ازای کالای شماره ۳ و کالای شماره ۴ را در جدول ۵ آورده‌ایم. از آنجا که گراف پایه‌ای برای کالاهای مذکور برابر است، بنابراین هر دو کالا را با یک گراف در شکل ۷ نمایش می‌دهیم.

جدول ۵: جواب اولیه برای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴

x^{3}_{ij}	x^{3}_{23}	x^{3}_{24}	x^{3}_{25}
میزان کالای ۳	۲۱	۲۱	۲۵
x^{4}_{ij}	x^{4}_{23}	x^{4}_{24}	x^{4}_{25}
میزان کالای ۴	۵۵	۵۳	۶۳



شکل ۷: گراف جواب اولیه شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴

گام دوم (به‌دست‌آوردن $(\overline{c_{ij}}^{p})$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان):

اکنون $(\overline{c_{ij}}^{p})$ها را برای یال‌های پایه‌ای شبکه‌های حمل‌ونقل همه کالاها، به‌ترتیب در زیر به‌دست می‌آوریم:

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: با استفاده از فرمول $w^pB^p = c_{B^p}$ در (۲.۵) داریم:
$w^۱B^۱ = c_{B^۱}$ و $w^۲B^۲ = c_{B^۲}$، از آنجا که $B^۱ = B^۲$ و $c_{B^۱} = c_{B^۲}$، پس داریم $w_i^۱ = w_i^۲$، بنابراین با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$w^۲ = w^۱ \to \begin{bmatrix} w_۱^۱ & w_۲^۱ & \dots & w_۷^۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_۱^۲ & w_۲^۲ & \dots & w_۷^۲ \end{bmatrix}$$

$$c_{B^۲} = c_{B^۱} = \begin{bmatrix} c_{۲۳}^۱ & c_{۲۴}^۱ & c_{۲۵}^۱ & c_{۲۶}^۱ & c_{۶۱}^۱ & c_{۷۵}^۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^۱ = B^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$w_i^۱ = w_i^۲$ها را با استفاده از $w_i^۱ - w_j^۱ = c_{ij}^۱$ با قرار دادن $\overline{c_{ij}}^۱ = ۰$ در (۵.۵)

$$\overline{c_{ij}}^۲ = \overline{c_{ij}}^۱ = z_{ij}^۱ - c_{ij}^۱ = w_i^۱ - w_j^۱ - c_{ij}^۱$$

برای یال‌های پایه‌ای به‌دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$w_۱^۱ = w_۱^۲ = -۱۶ \quad , \quad w_۲^۱ = w_۲^۲ = ۳۴ \quad , \quad w_۳^۱ = w_۳^۲ = ۰ \quad , \quad w_۴^۱ = w_۴^۲ = ۱۹$$

$$w_۵^۱ = w_۵^۲ = ۱۱ \quad , \quad w_۶^۱ = w_۶^۲ = ۹ \quad , \quad w_۷^۱ = w_۷^۲ = ۱۸$$

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: با استفاده از فرمول $w^pB^p = c_{B^p}$ در (۲.۵) داریم:
$w^۳B^۳ = c_{B^۳}$ و $w^۴B^۴ = c_{B^۴}$، از آنجا که $B^۳ = B^۴$ و $c_{B^۳} = c_{B^۴}$، پس داریم $w_i^۳ = w_i^۴$، بنابراین با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$w^۴ = w^۳ \to \begin{bmatrix} w_۱^۳ & w_۲^۳ & \dots & w_۷^۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_۱^۴ & w_۲^۴ & \dots & w_۷^۴ \end{bmatrix}$$

$$c_{B^۴} = c_{B^۳} = \begin{bmatrix} c_{۱۵}^۳ & c_{۲۳}^۳ & c_{۲۴}^۳ & c_{۲۵}^۳ & c_{۶۱}^۳ & c_{۷۵}^۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^۳ = B^۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$w_i^۳ = w_i^۴$ها را با استفاده از $w_i^۳ - w_j^۳ = c_{ij}^۳$ با قرار دادن $\overline{c_{ij}}^۳ = ۰$ در (۵.۵)

$$\overline{c_{ij}}^۴ = \overline{c_{ij}}^۳ = z_{ij}^۳ - c_{ij}^۳ = w_i^۳ - w_j^۳ - c_{ij}^۳$$

برای یال‌های پایه‌ای به‌دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$w_۱^۳ = w_۱^۴ = ۱۸ \quad , \quad w_۲^۳ = w_۲^۴ = ۳۵ \quad , \quad w_۳^۳ = w_۳^۴ = ۰ \quad , \quad w_۴^۳ = w_۴^۴ = ۱۷$$

$$w_۵^۳ = w_۵^۴ = ۱۰ \quad , \quad w_۶^۳ = w_۶^۴ = ۴۶ \quad , \quad w_۷^۳ = w_۷^۴ = ۲۰$$

گام سوم (به‌دست‌آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی):

در این گام $\overline{c_{ij}}^p$ ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای هر شبکه حمل‌ونقل با استفاده از $\overline{c_{ij}}^p$ در (۵.۵) به‌دست آورده‌ایم.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: با توجه به این‌که $B^۱ = B^۲$ با استفاده از $w_i^۱ = w_i^۲$ های به‌دست‌آمده برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲، اکنون $\overline{c_{ij}}^۱ = \overline{c_{ij}}^۲$ها را با استفاده از $\overline{c_{ij}}^۱$ در (۵.۵) برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{۱۲}}^۱ = -۷۷ \to (\overline{c_{۱۲}}^۱ < ۰ \ , \ x_{۱۲}^۱ = l_{۱۲}) \quad , \quad \overline{c_{۲۱}}^۱ = ۲۳ \to (\overline{c_{۲۱}}^۱ > ۰ \ , \ x_{۲۱}^۱ = l_{۲۱}) \quad \surd$$

$$\overline{c_{۱۵}}^۱ = -۳۲ \to (\overline{c_{۱۵}}^۱ > ۰ \ , \ x_{۱۵}^۱ = l_{۱۵}) \quad , \quad \overline{c_{۲۷}}^۱ = ۹ \to (\overline{c_{۲۷}}^۱ > ۰ \ , \ x_{۲۷}^۱ = l_{۲۷}) \quad \surd$$

مواردی که در انتهای سطر اول و دوم با علامت $\surd$ مشخص شده‌اند، متقاضی ورود به پایه‌اند.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: با توجه به این‌که $B^۳ = B^۴$ با استفاده از $w_i^۳ = w_i^۴$های به‌دست‌آمده برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴، $\overline{c_{ij}}^۳ = \overline{c_{ij}}^۴$ها را با استفاده از $\overline{c_{ij}}^۳$ در (۵.۵) برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{۱۲}}^۳ = -۴۷ \to (\overline{c_{۱۲}}^۳ < ۰ \ , \ x_{۱۲}^۳ = l_{۱۲}) \quad , \quad \overline{c_{۲۶}}^۳ = -۳۹ \to (\overline{c_{۲۶}}^۳ > ۰ \ , \ x_{۲۶}^۱ = l_{۲۶})$$

$$\overline{c_{۲۱}}^۳ = -۱۳ \to (\overline{c_{۲۱}}^۳ < ۰ \ , \ x_{۲۱}^۳ = l_{۲۱}) \quad , \quad \overline{c_{۲۷}}^۳ = ۵ \to (\overline{c_{۲۷}}^۳ > ۰ \ , \ x_{۲۷}^۳ = l_{۲۷}) \quad \surd$$

موردی که در انتهای سطر دوم با علامت $\surd$ مشخص شده، متقاضی ورود به پایه است.

گام چهارم (محورگیری):

در این گام به‌ازای هر شبکه یک δ^p انتخاب می‌شود. با توجه به تعاریف گفته شده، توجه داریم که:

$$\delta^۱ = \delta^۲ \quad , \quad \delta^۳ = \delta^۴$$

بنابراین یال‌های متقاضی ورود به پایه همه کالاها، به‌ترتیب مشخص شده‌اند:

$$\overline{c_{۲۱}}^۱ = \overline{c_{۲۱}}^۲ = ۲۳ \quad , \quad \overline{c_{۲۷}}^۱ = \overline{c_{۲۷}}^۲ = ۹ \quad , \quad \overline{c_{۲۷}}^۳ = \overline{c_{۲۷}}^۴ = ۵$$

از میان یال‌های متقاضی ورود به پایه همه کالاها δ^p در (۶.۵) را به‌دست می‌آوریم، به‌طوری‌که به‌ازای هر کالا $\delta^p = max|\overline{c_{ij}}^p|$. بنابراین:

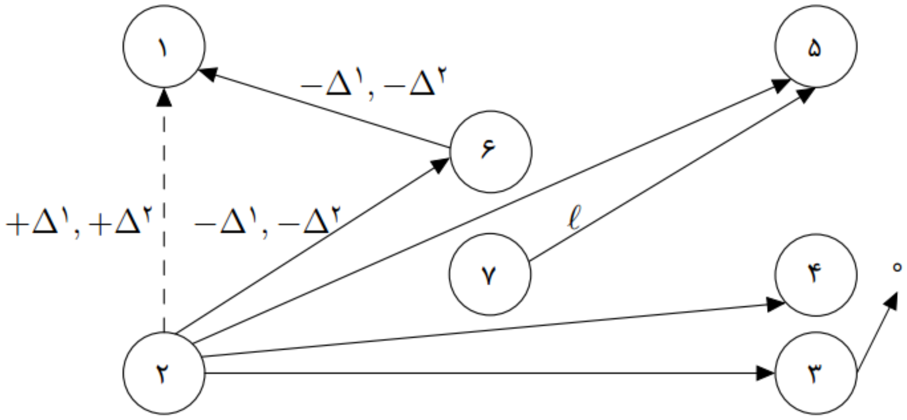
$$\delta^۲ = \delta^۱ = max\{|\overline{c_{۲۱}}^۱| \ , \ |\overline{c_{۲۷}}^۱|\} = ۲۳ \quad , \quad \delta^۴ = \delta^۳ = \overline{c_{۲۷}}^۳ = ۵$$

اولین یال منتخب $\delta_\lambda^{p^\star}$ جهت محورگیری

$\delta_\lambda^{p^\star}$ در (۷.۵) را طوری به‌دست می‌آوریم که:

$$\delta_\lambda^{p^\star} = max\{\delta^۱, \delta^۲, \dots, \delta^۷\}$$

به‌عبارتی دیگر اولین یال منتخب، برای عملیات محورگیری، $\delta_۱^{p^\star} = max\{\delta^۱ \ , \ \delta^۳\} = \delta^۱ = ۲۳$ و پس از آن دومین یال منتخب، $\delta_۲^{p^\star} = \delta^۳ = ۵$ خواهد بود. بنابراین با توجه به برابر بودن اولویت $\delta^۱ = \delta^۲$ عملیات محورگیری را در این مرحله برای شبکه‌های حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲ انجام خواهیم داد.



شکل ۸: گراف محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲

محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: محورگیری را بر اساس $\delta_{۱}^{\star} = \delta^{۱} = \delta^{۲}$ در شکل ۸ انجام می‌دهیم. $\Delta^{۱}$ و $\Delta^{۲}$ را به شیوه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta^{۱} = min\{x_{۲۶}^{۱} - l_{۲۶}\ ,\ x_{۶۱}^{۱} - l_{۶۱}\} = min\{۵۱ - ۰\ ,\ ۵۱ - ۰\} = ۵۱$$

$$\Delta^{۲} = min\{x_{۲۶}^{۲} - l_{۲۶}\ ,\ x_{۶۱}^{۲} - l_{۶۱}\} = min\{۱۶ - ۰\ ,\ ۱۶ - ۰\} = ۱۶$$

بنابراین تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

$$x_{۲۱}^{۱} + \Delta^{۱} = ۰ + ۵۱ = ۵۱ \quad , \quad x_{۲۱}^{۲} + \Delta^{۲} = ۰ + ۱۶ = ۱۶$$

$$x_{۲۶}^{۱} - \Delta^{۱} = ۵۱ - ۵۱ = ۰ \quad , \quad x_{۲۶}^{۲} - \Delta^{۲} = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

$$x_{۶۱}^{۱} - \Delta^{۱} = ۵۱ - ۵۱ = ۰ \quad , \quad x_{۲۶}^{۲} - \Delta^{۲} = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

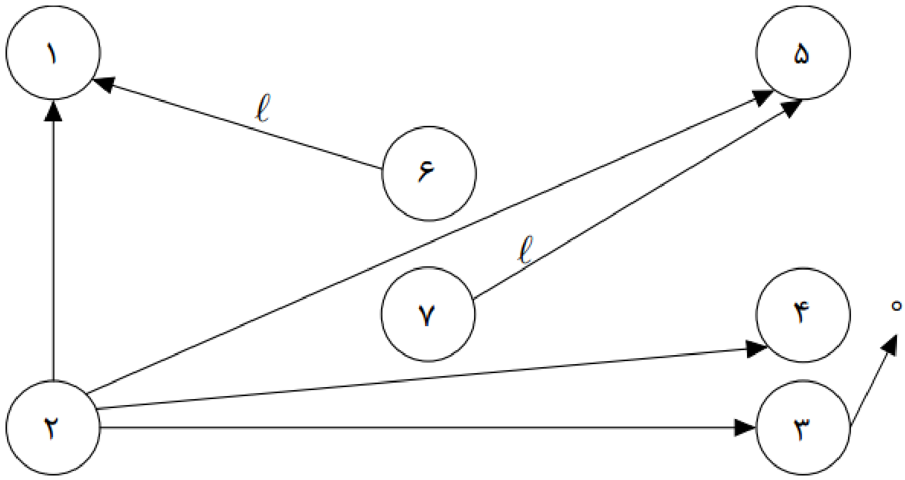
جدول ۶: جواب شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲

$x_{ij}^{۱}$	$x_{۲۱}^{۱}$	$x_{۲۳}^{۱}$	$x_{۲۴}^{۱}$	$x_{۲۵}^{۱}$
میزان کالای ۱	۵۱	۸۰	۲۹۰	۳۰۴
$x_{ij}^{۲}$	$x_{۲۱}^{۲}$	$x_{۲۳}^{۲}$	$x_{۲۴}^{۲}$	$x_{۲۵}^{۲}$
میزان کالای ۲	۱۶	۸	۸	۱۷۳

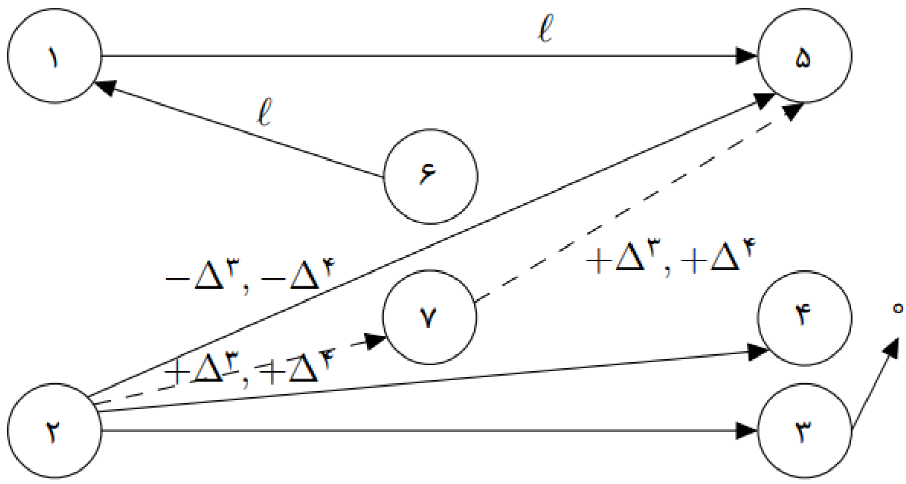
دومین یال منتخب $\delta_{\lambda}^{p^\star}$ جهت محورگیری

با توجه به برابر بودن اولویت $\delta^{۳} = \delta^{۴}$ عملیات محورگیری را در این مرحله برای شبکه‌های حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴ انجام خواهیم داد.

محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: محورگیری را بر اساس $\delta_{۲}^{\star} = \delta^{۳} = \delta^{۴}$ انجام می‌دهیم.



شکل ۹: گراف بشکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲



شکل ۱۰: گراف محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴

$\Delta^{۳}$ و $\Delta^{۴}$ را به شیوه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta^{۳} = min\{u^{\star}_{۲۷} - x^{۳}_{۲۷} \text{ ، } u^{\star}_{۷۵} - x^{۳}_{۷۵} \text{ ، } x^{۳}_{۲۵} - l_{۲۵}\} = min\{۵۴۷ - ۲۵ \text{ ، } ۵۴۷ - ۲۵ \text{ ، } ۲۵ - ۰\} = ۲۵$$

$$\rightarrow u^{\star}_{۲۷} = u_{۲۷} - \Delta^{۳} = ۵۴۷ - ۲۵ = ۵۲۲$$

$$\Delta^{۴} = min\{u^{\star}_{۲۷} - x^{۴}_{۲۷} \text{ ، } u^{\star}_{۷۵} - x^{۴}_{۷۵} \text{ ، } x^{۴}_{۲۵} - l_{۲۵}\} = min\{۵۲۲ - ۶۳ \text{ ، } ۵۲۲ - ۶۳ \text{ ، } ۶۳ - ۰\} = ۶۳$$

$$\rightarrow u^{\star}_{۲۷} = u_{۲۷} - \Delta^{۴} = ۵۲۲ - ۶۳ = ۴۵۹$$

بنابراین تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

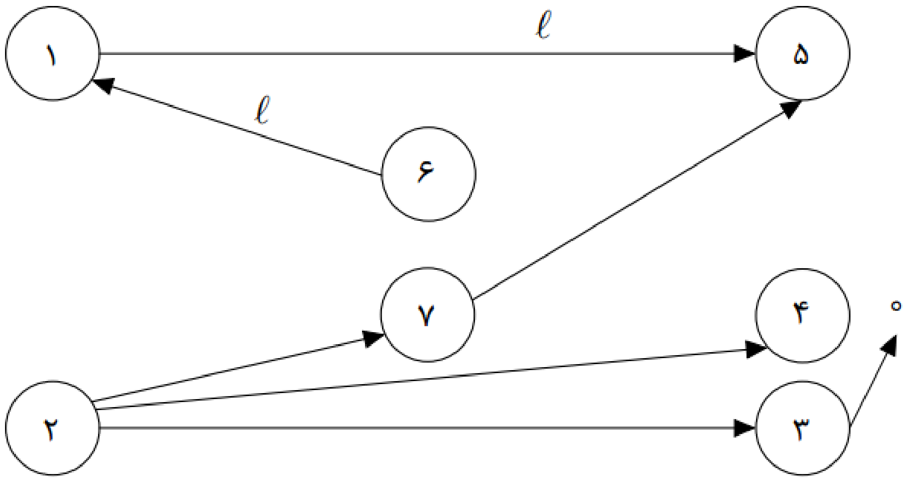
$$x^{۳}_{۲۷} + \Delta^{۳} = ۰ + ۲۵ = ۲۵ \quad \text{،} \quad x^{۴}_{۲۷} + \Delta^{۴} = ۰ + ۶۳ = ۶۳$$

$$x^{۳}_{۷۵} + \Delta^{۳} = ۰ + ۲۵ = ۲۵ \quad \text{،} \quad x^{۴}_{۷۵} + \Delta^{۴} = ۰ + ۶۳ = ۶۳$$

$$x^{۳}_{۲۵} - \Delta^{۳} = ۲۵ - ۲۵ = ۰ \quad \text{،} \quad x^{۴}_{۲۵} - \Delta^{۴} = ۶۳ - ۶۳ = ۰$$

جدول ۷: جواب شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴

x^{3}_{ij}	x^{3}_{23}	x^{3}_{24}	x^{3}_{27}	x^{3}_{75}
میزان کالای ۳	۲۱	۲۱	۲۵	۲۵
x^{4}_{ij}	x^{4}_{23}	x^{4}_{24}	x^{4}_{27}	x^{4}_{27}
میزان کالای ۴	۵۵	۵۳	۶۳	۶۳



شکل ۱۱: گراف شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴

تکرار دوم گام دوم (به‌دست‌آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان):

اکنون $\left(\overline{c_{ij}}^{p}\right)$ها را برای یال‌های پایه‌ای شبکه‌های حمل‌ونقل همه کالاها، به‌ترتیب در زیر به‌دست می‌آوریم:

$\overline{c_{ij}}^{p}$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: می‌دانیم $w^{2}_{i} = w^{1}_{i}$ ، بنابراین داریم:

$$c_{B^{2}} = c_{B^{1}} = \begin{bmatrix} c^{1}_{23} & c^{1}_{24} & c^{1}_{25} & c^{1}_{21} & c^{1}_{61} & c^{1}_{75} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{1} = B^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه $w^{2}_{i} = w^{1}_{i}$ برابر است با:

$$w^{1}_{1} = w^{2}_{1} = 7 \quad , \quad w^{1}_{2} = w^{2}_{2} = 34 \quad , \quad w^{1}_{3} = w^{2}_{3} = 0 \quad , \quad w^{1}_{4} = w^{2}_{4} = 19$$

$$w^{1}_{5} = w^{2}_{5} = 11 \quad , \quad w^{1}_{6} = w^{2}_{6} = 32 \quad , \quad w^{1}_{7} = w^{2}_{7} = 18$$

$\overline{c_{ij}}^{p}$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: می‌دانیم $w^{4}_{i} = w^{3}_{i}$ ، بنابراین داریم:

$$c_{B^{4}} = c_{B^{3}} = \begin{bmatrix} c^{3}_{15} & c^{3}_{23} & c^{3}_{24} & c^{3}_{27} & c^{3}_{61} & c^{3}_{75} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{3}=B^{4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه $w_i^{3}=w_i^{4}$ برابر است با:

$$w_1^{3}=w_1^{4}=23 \quad , \quad w_2^{3}=w_2^{4}=35 \quad , \quad w_3^{3}=w_3^{4}=0 \quad , \quad w_4^{3}=w_4^{4}=17$$

$$w_5^{3}=w_5^{4}=15 \quad , \quad w_6^{3}=w_6^{4}=51 \quad , \quad w_7^{3}=w_7^{4}=25$$

گام سوم (به‌دست‌آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی):

در این گام $\overline{c_{ij}}^p$ ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای هر شبکه حمل‌ونقل به‌دست آورده‌ایم.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲: اکنون $\overline{c_{ij}}^{2}=\overline{c_{ij}}^{1}$ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{12}}^{1}=-54\rightarrow(\overline{c_{12}}^{1}<0 \ , \ x_{12}^{1}=l_{12}) \quad , \quad \overline{c_{26}}^{1}=-23\rightarrow(\overline{c_{26}}^{1}<0 \ , \ x_{21}^{1}=l_{21})$$

$$\overline{c_{15}}^{1}=-9\rightarrow(\overline{c_{15}}^{1}<0 \ , \ x_{15}^{1}=l_{15}) \quad , \quad \overline{c_{27}}^{1}=9\rightarrow(\overline{c_{27}}^{1}>0 \ , \ x_{27}^{1}=l_{27}) \quad \surd$$

موردی که در انتهای سطر دوم با علامت $\surd$ مشخص شده، متقاضی ورود به پایه است.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴: اکنون $\overline{c_{ij}}^{4}=\overline{c_{ij}}^{3}$ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه مذکور به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{c_{12}}^{3}=-42\rightarrow(\overline{c_{12}}^{3}<0 \ , \ x_{12}^{3}=l_{12}) \quad , \quad \overline{c_{25}}^{3}=-5\rightarrow(\overline{c_{25}}^{3}<0 \ , \ x_{25}^{1}=l_{25})$$

$$\overline{c_{21}}^{3}=-18\rightarrow(\overline{c_{21}}^{3}<0 \ , \ x_{21}^{3}=l_{21}) \quad , \quad \overline{c_{26}}^{3}=-44\rightarrow(\overline{c_{26}}^{3}<0 \ , \ x_{26}^{3}=l_{26})$$

– با توجه به اینکه هیچ یالی متقاضی ورود به پایه نیست، شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴ بهینه است.

گام چهارم (محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲):

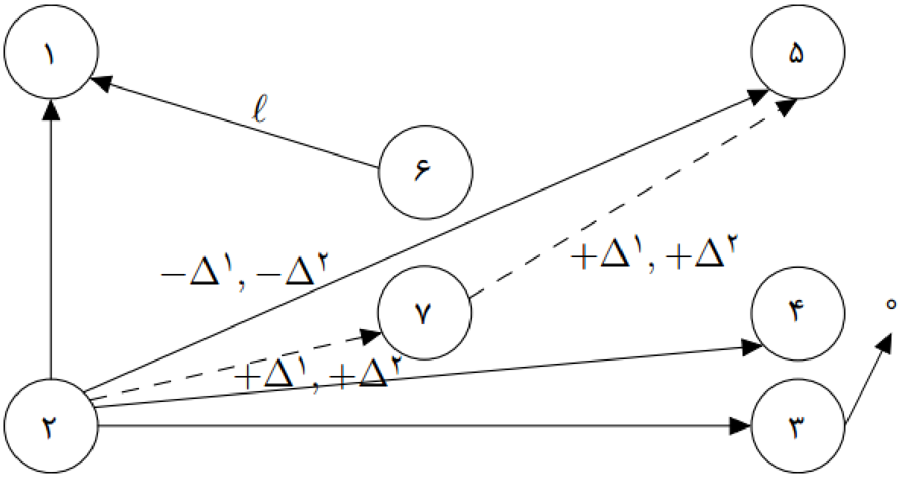
در این گام برای شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲ یک δ^p انتخاب می‌شود. یال متقاضی ورود به پایه مشخص شده است: $\delta^{2}=\delta^{1}=\overline{c_{27}}^{1}$
Δ^{1} و Δ^{2} را به شیوه زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta^{1}=min\{x_{25}^{1}-l_{25} \ , \ u_{27}^{\star}-x_{27}^{1}, \ u_{75}^{\star}-x_{75}^{1}\}=min\{304-0 \ , \ 459-0, \ 459-0\}=304$$

$$\rightarrow u_{27}^{\star}=u_{27}-\Delta^{3}=459-304=155$$

$$\Delta^{2}=min\{x_{25}^{2}-l_{25} \ , \ u_{27}^{\star}-x_{27}^{2}, \ u_{75}^{\star}-x_{75}^{2}\}=min\{173-0 \ , \ 155-0, \ 155-0\}=155$$

$$\rightarrow u_{27}^{\star}=u_{27}-\Delta^{3}=155-155=0$$



شکل ۱۲: گراف محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲

بنابراین تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

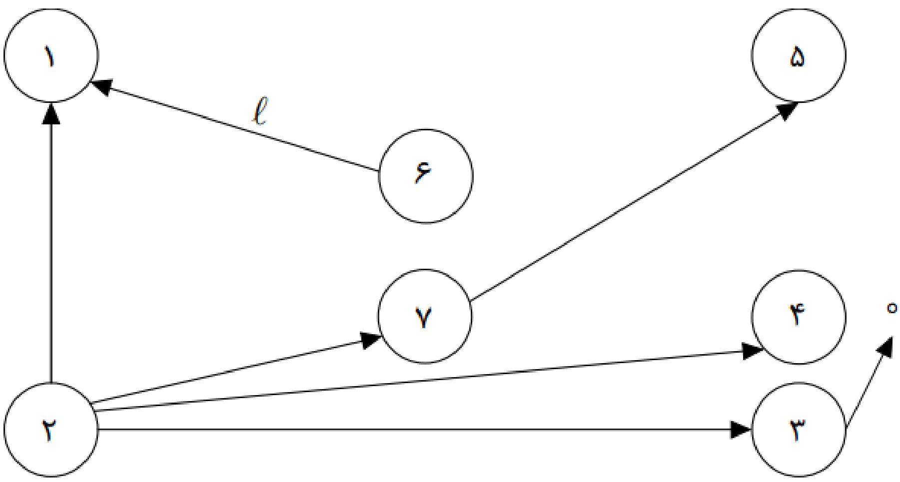
$$x^{۱}_{۲۷} + \Delta^{۱} = ۰ + ۳۰۴ = ۳۰۴ \quad , \quad x^{۲}_{۲۷} + \Delta^{۲} = ۰ + ۱۵۵ = ۱۵۵$$

$$x^{۱}_{۷۵} + \Delta^{۱} = ۰ + ۳۰۴ = ۳۰۴ \quad , \quad x^{۲}_{۷۵} + \Delta^{۲} = ۰ + ۱۵۵ = ۱۵۵$$

$$x^{۱}_{۲۵} - \Delta^{۱} = ۳۰۴ - ۳۰۴ = ۰ \quad , \quad x^{۲}_{۲۵} - \Delta^{۲} = ۱۷۳ - ۱۵۵ = ۱۸$$

جدول ۸: جواب شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالای ۱

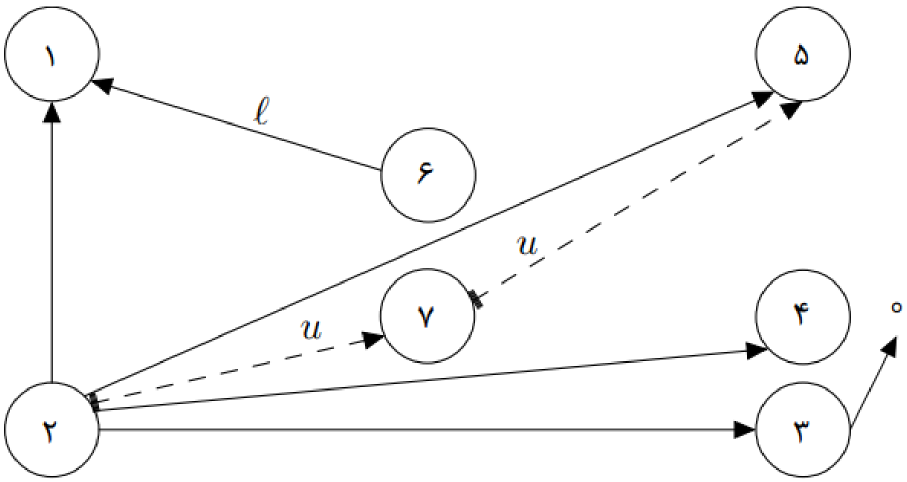
$x^{۱}_{ij}$	$x^{۱}_{۲۱}$	$x^{۱}_{۲۳}$	$x^{۱}_{۲۴}$	$x^{۱}_{۲۷}$	$x^{۱}_{۷۵}$
میزان کالای ۱	۵۱	۸۰	۲۹۰	۳۰۴	۳۰۴



شکل ۱۳: گراف شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالای ۱

جدول ۹: جواب شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالای ۲

$x_{ij}^{۲}$	$x_{۲۱}^{۲}$	$x_{۲۳}^{۲}$	$x_{۲۴}^{۲}$	$x_{۲۵}^{۲}$	$x_{۲۷}^{۲}$	$x_{۷۵}^{۲}$
میزان کالای ۲	۱۶	۸	۸	۱۸	۱۵۵	۱۵۵



شکل ۱۴: گراف شبکه بعد از محورگیری در شبکه حمل‌ونقل کالای ۲

تکرار سوم گام دوم (به‌دست‌آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های پایه‌ای با استفاده از جواب دوگان):

با توجه به اینکه شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۳ و ۴ در حالت بهینه قرار دارد، از این پس صرفا شبکه حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد، بنابراین $(\overline{c_{ij}}^p)$ ها را به‌ترتیب برای یال‌های پایه‌ای شبکه‌های حمل‌ونقل کالاهای ۱ و ۲ به‌دست می‌آوریم:

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱: با استفاده از فرمول $w^pB^p = c_{B^p}$ در (۲.۵) و با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$c_{B^۱} = \begin{bmatrix} c_{۲۳}^{۱} & c_{۲۴}^{۱} & c_{۲۷}^{۱} & c_{۲۱}^{۱} & c_{۶۱}^{۱} & c_{۷۵}^{۱} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $w_i^{۱}$ برابر است با:

$$w_{۱}^{۱} = ۷ \quad , \quad w_{۲}^{۱} = ۳۴ \quad , \quad w_{۳}^{۱} = ۰ \quad , \quad w_{۴}^{۱} = ۱۹$$
$$w_{۵}^{۱} = ۲۰ \quad , \quad w_{۶}^{۱} = ۳۲ \quad , \quad w_{۷}^{۱} = ۲۷$$

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های پایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲: با استفاده از فرمول $w^pB^p = c_{B^p}$ در (۲.۵) و با توجه به (۳.۵)، (۱.۳) و (۴.۵) داریم:

$$c_{B^۲} = \begin{bmatrix} c_{۲۳}^{۲} & c_{۲۴}^{۲} & c_{۲۵}^{۲} & c_{۲۱}^{۲} & c_{۶۱}^{۲} & c_{۷۵}^{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $w_i^{۲}$ برابر است با:

$$w_{۱}^{۲} = ۷ \quad , \quad w_{۲}^{۲} = ۳۴ \quad , \quad w_{۳}^{۲} = ۰ \quad , \quad w_{۴}^{۲} = ۱۹$$

$$w_{۵}^{۲} = ۱۱ \quad , \quad w_{۶}^{۲} = ۳۲ \quad , \quad w_{۷}^{۲} = ۱۸$$

گام سوم (به‌دست‌آوردن $\overline{c_{ij}}$ برای یال‌های غیرپایه‌ای با استفاده از جواب دوگان و بررسی شرایط بهینگی):

در این گام $\overline{c_{ij}}^p$ ها را برای یال‌های غیرپایه‌ای هر شبکه حمل‌ونقل به‌دست آورده‌ایم.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۱:

$$\overline{c_{۱۲}}^{۱} = -۵۴ \rightarrow (\overline{c_{۱۲}}^{۱} < ۰ \ , \ x_{۱۲}^{۱} = l_{۱۲}) \quad , \quad \overline{c_{۲۵}}^{۱} = -۹ \rightarrow (\overline{c_{۲۵}}^{۱} < ۰ \ , \ x_{۲۵}^{۱} = l_{۲۵})$$

$$\overline{c_{۱۵}}^{۱} = -۱۸ \rightarrow (\overline{c_{۱۵}}^{۱} < ۰ \ , \ x_{۱۵}^{۱} = l_{۱۵}) \quad , \quad \overline{c_{۲۶}}^{۱} = -۲۳ \rightarrow (\overline{c_{۲۶}}^{۱} < ۰ \ , \ x_{۲۶}^{۱} = l_{۲۶})$$

– با توجه به اینکه هیچ یالی متقاضی ورود به پایه نیست، شبکه حمل‌ونقل کالای ۱ بهینه است.

$\overline{c_{ij}}^p$ برای یال‌های غیرپایه‌ای شبکه حمل‌ونقل کالای ۲:

$$\overline{c_{۱۲}}^{۲} = -۵۴ \rightarrow (\overline{c_{۱۲}}^{۲} < ۰ \ , \ x_{۱۲}^{۲} = l_{۱۲}) \quad , \quad \overline{c_{۲۶}}^{۲} = -۲۳ \rightarrow (\overline{c_{۲۶}}^{۲} < ۰ \ , \ x_{۲۶}^{۲} = l_{۲۶})$$

$$\overline{c_{۱۵}}^{۲} = -۹ \rightarrow (\overline{c_{۱۵}}^{۲} < ۰ \ , \ x_{۱۵}^{۲} = l_{۱۵}) \quad , \quad \overline{c_{۲۷}}^{۲} = ۹ \rightarrow (\overline{c_{۲۷}}^{۲} > ۰ \ , \ x_{۲۷}^{۲} = u_{۲۷}) \quad \times$$

– موردی که در انتهای سطر دوم با علامت $\times$ مشخص شده است، متقاضی ورود به پایه است، ولی حلقه‌منحصربه‌فرد مربوطه (به‌دلیل اینکه یال‌های $(۲, ۷)$ و $(۷, ۵)$ در کران بالای خود قرار دارند) تشکیل نمی‌شود. بنابراین یال $(۲, ۷)$ قابلیت ورود به پایه را ندارد.
– با توجه به اینکه هیچ یالی متقاضی ورود به پایه نیست و برای یالی که متقاضی ورود به پایه است، نمی‌توان حلقه منحصربه‌فرد تشکیل داد، شبکه حمل‌ونقل کالای ۲ بهینه است.

جواب بهین :

با توجه به اینکه به‌ازای هر $\overline{c_{ij}}^P < ۰$ و $\overline{c_{ij}}^P > ۰$ به‌ترتیب داریم $x_{ij}^P = l_{ij}$ و $x_{ij}^P = u_{ij}$ ، نتیجه می‌گیریم که شبکه در حالت بهینه قرار دارد. بنابراین اطلاعات جدول ۱۰ در شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار با استفاده از روش ابتکاری HB به‌دست‌آمده است:

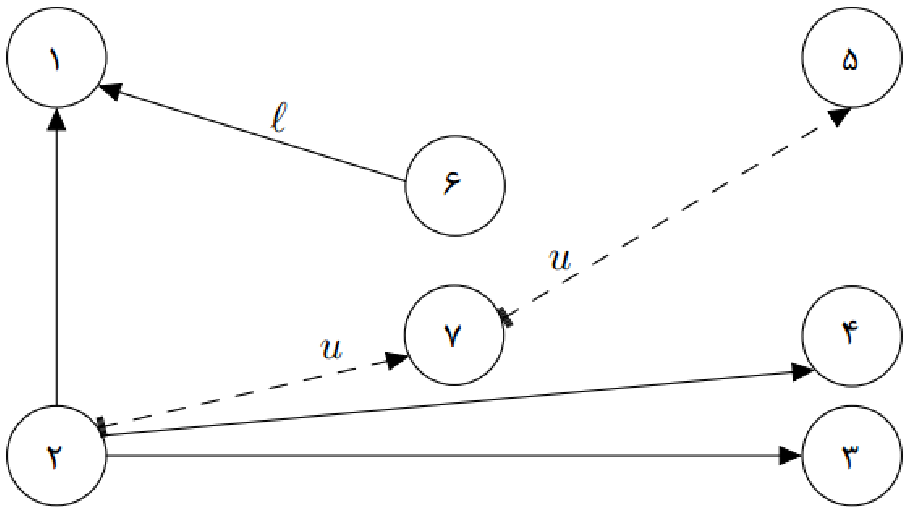
هزینه حمل‌ونقل کالاها در شبکه هزینه حمل‌ونقل در جواب اولیه و جواب بهینه را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

هزینه حمل‌ونقل در شبکه در جواب اولیه:

$$z = \sum_{p=۱}^{t} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{m} c_{ij}^{p} x_{ij}^{p} = \sum_{p=۱}^{۴} \sum_{i=۱}^{۸} \sum_{j=۱}^{۸} c_{ij}^{p} x_{ij}^{p} = ۲۷۹۷۵$$

جدول ۱۰: جواب بهین شبکه حمل‌ونقل چندکالایی و کران‌دار

یال / کالا	۱	۲	۳	۴
$x_{۱۲}$	۰	۰	۰	۰
$x_{۱۵}$	۰	۰	۰	۰
$x_{۲۱}$	۵۱	۱۶	۰	۰
$x_{۲۳}$	۸۰	۸	۲۱	۵۵
$x_{۲۴}$	۲۹۰	۸	۲۱	۵۳
$x_{۲۵}$	۰	۱۵۵	۰	۰
$x_{۲۶}$	۰	۰	۰	۰
$x_{۶۱}$	۰	۰	۰	۰
$x_{۲۷}$	۳۰۴	۱۸	۲۵	۶۳
$x_{۷۵}$	۳۰۴	۱۸	۲۵	۶۳



شکل ۱۵: گراف شبکه حمل‌ونقل کالاها در حالت بهینه

هزینه حمل‌ونقل در شبکه در جواب بهینه:

$$Minimize\ z = \sum_{p=۱}^{t} \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{m} c_{ij}^{p} x_{ij}^{p} = \sum_{p=۱}^{۴} \sum_{i=۱}^{۸} \sum_{j=۱}^{۸} c_{ij}^{p} x_{ij}^{p} = ۱۹۹۶۲$$

اختلاف هزینه نسبت به جواب اولیه و جواب بهینه

$$z - Minimize\ z = ۲۷۹۷۵ - ۱۹۹۶۲ = ۸۰۱۳$$

همان‌طور که ملاحظه شد، جواب بهینه نسبت به جواب اولیه کاهش قابل‌ملاحظه‌ای داشته و این روش کارایی خود را در این مثال نشان داده است.

فهرست منابع

[۱] دودانگه، مدل ریاضی حمل‌ونقل در سیستم‌های لجستیک، فصلنامه مدیریت زنجیره تامین، شماره ۳۲، (۱۳۹۰)

[2] Archetti C. and Speranza M.G., *A Tabu search algorithm for the split delivery VRP*, Transportation Science, Vol.40, No.1, (2006), 64-73.

[3] Bazaraa M.S., Jarvis J.J. and Sherali H.D., *linear programming and network flows*, Wiley Publication, Fourth Edition 2010, (1990).

[4] Charnes A. and Klingman D, *The Distribution Problem with Upper and Lower Bounds on the Node Requirements*, Management Science, 16, (1970), 638-642.

[5] Crainic G. and Laporte G., *Planning models for freight transportation*, European Journal of Operational Research, (1997), 409-438.

[6] Dantzig G. and Ramser J., *The truck dispatching problem*, Management Science, V.6, (1959), 80-91.

[7] Gary M. and Johnson D., *Computers and intractability: A guide to the theory of NP completeness*, Freeman, San Francisco, (1979).

[8] Hakan Akyuz M., Öncan T. and Kuban Altınel İ., *Branch and bound algorithms for solving the multi-commodity capacitated multi-facility Weber problem*, Annals of Operations Research, Vol. 279, (2019), 1-42

[9] Hitchcock F.L. and Frank L., *The Distribution of a Product from Several Sources to Nulmerous Localities*, Journalof Mathematical Physics, 20 , (1941), 224-230.

[10] Koopmans T.C., *Optimum Utilization of the Transportation System*, Econometrica, Supplement, 17, (1949), 136-146.

[11] Laporte G. and Dejax J., *Dynamic Location-routing problem*, Journal of Operation Research Society, V.40, No.5, (1989), 471-482.

[12] Laporte G. and Nobert Y., *Exact algorithms for the VRP*, Annals of Discrete Mathematics, 31, (1987), 147-184.

[13] Lenstra J. and Rinooy K.A., *Complexity of vehicle routing and scheduling problems*, Networks, V.11, N.2, (1981), 221-227.

[14] Olusina J., *Solving Minimum Cost Multi-Commodity Network Flow Problem Using Lexicographic Goal Programming Approach*, Journal of Applied Sciences and Environmental Management, Vol. 22 (3), (2018), 414–420

[15] Rodrigo N., Rjapaksha L., *SMathematical Model and a Case Study for Multi-Commodity Transportation Problem*, International Journal of Theoretical and Applied Mathematics Vol. 4, Issue 1, (2018), 1-7

[16] Stojčić M. *Application of ANFIS model in road traffic and transportation: a literature review from 1993 to 2018*, Operational Research in Engineering Sciences: Theory and Applications, Vol.1, Issue1, (2018), 40-61.

[17] Toth P. and Vigo D., *The vehicle routing problem*, Siam Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, USA, (2002).

[18] Vaziri Sh., Etebari F. and Vahdani B., *Development and optimization of a horizontal carrier collaboration vehicle routing model with multi-commodity request allocation*, Journal of Cleaner Production, (2019).

[19] Yano C. and McGetting D., *Vehicle rpoting at quality stores*, Interfaces, V.17, N.2, (1987), 52-63.

A new approach for solving multi-commodity and bounded network transportation problems

Hadi Basirzadeh [†] **, Milad Habibinia**

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University Of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 2021/4/24 Accepted: 2021/8/19

Communicated by: Sohrab Effati

Abstract: The purpose of this paper is to present a new method for solving multi-commodity and bounded transportation networks in optimization problems. Multi-commodity and bounded transport networks with the aim of minimizing the total cost of transporting goods in the network, is an important and widely used issue in optimization problems. Two very important and key features of multi-commodities and bounded are examined in different articles and have provided algorithms to solve it. We are ,based on the network simplex method, offer an innovative method without any complexity to obtain the solutions of multi-commodity and bounded transportation networks problems. At the end, the efficiency of this method is shown with some numerical examples.

Keywords: Multi Commodity Network flows, Bounded transportation problem.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: basirzad@scu.ac.ir (H. Basirzadeh), habibinia@iran.ir (M. Habibinia).