مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۵۷۳–۵۸۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.37369.1930

عملگر استویچ شارما از فضای بسوف به فضای زیگموند

ابراهیم عباسی [۱]*، سپیده نصراصفهانی [۲]، کمال خلیل‌پور [۱]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مهاباد، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۱۹

چکیده: فرض کنید $H(\mathbb{D})$ مجموعه تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$، $u, v \in H(\mathbb{D})$ و تابع تحلیلی ψ یک خودنگاشت ($\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$) باشد. عملگر استویچ شارما $T_{u,v,\psi}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{u,v,\psi} f(z) = u(z)f(\psi(z)) + v(z)f'(\psi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

در این مقاله کران‌داری و فشردگی عملگراستویچ شارما را از فضای بسوف به فضای زیگموند مورد بررسی قرار می‌دهیم و شرط‌های معادلی برای کران‌داری و فشردگی عملگر مذکور ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: کران‌داری، فشردگی، فضای بسوف، فضای زیگموند، عملگر استویچ شارما .

رده‌بندی ریاضی: 47B38; 30H25; 30H99

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنیم $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ و $H(\mathbb{D})$ مجموعه تمام توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد. فضای بلاخ که با نماد $\mathcal{B}$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از تمام توابع $f \in H(\mathbb{D})$ ، به‌طوری‌که

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(۰)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (۱ - |z|^۲)|f'(z)| < \infty.$$

فضای بلاخ با نرم فوق یک فضای باناخ است.

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: ebrahimabbasi81@gmail.com (E. Abbasi), sepide.nasr@gmail.com (S. Nasresfahani), kamal.khalilpour@gmail.com (K. Khalilpour)

لم ۱.۱. ([۱۵، گزاره ۸]) فرض کنیم n یک عدد طبیعی دلخواه باشد: آنگاه به‌ازای هر $f \in \mathcal{B}$ خواهیم داشت:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \approx \sum_{i=\circ}^{n-۱} |f^{(i)}(\circ)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(۱-|z|^۲)^n|f^{(n)}(z)|.$$

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $۱ < p < \infty$ و $dA(z)$ اندازه مساحت نرمال‌شده روی $\mathbb{D}$ ($\int_{\mathbb{D}} dA(z) = ۱$) باشد. فضای بسوف B_p، از تمام توابع تحلیلی مانند $f \in H(\mathbb{D})$ تشکیل شده است که در خاصیت زیر صدق کنند:

$$b_p(f) = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p(۱-|z|^۲)^{p-۲}dA(z)\Big)^{\frac{۱}{p}} < \infty.$$

فضای بسوف با نرم $\|f\|_{B_p} = |f(\circ)| + b_p(f)$ یک فضای باناخ است. اگر $Aut(\mathbb{D})$ نشان‌دهنده گروه موبیوس روی $\mathbb{D}$ باشد، در این صورت فضاهای بسوف، موبیوس پایایند یعنی برای هر $f \in B_p$ و $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ داریم:

$$b_p(fo\varphi) = b_p(f).$$

اطلاعات تکمیلی در مورد فضاهای بسوف را می‌توان در مراجع [۱۴] و [۱۶] یافت.

لم ۳.۱. [۳] فرض کنیم $۱ < p < \infty$ و $f \in B_p$ باشد. در این‌صورت خواهیم داشت:

الف) $\|f\|_{\mathcal{B}} \preceq \|f\|_{B_p}$

ب)

$$|f(z)| \preceq \|f\|_{B_p}\Big(\log\frac{۲}{۱-|z|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

لم ۴.۱. [۱۶] فرض کنیم $z \in \mathbb{D}$ و $\alpha > -۱$. اگر $|z| \to ۱$ آنگاه داریم:

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|w|^۲)^\alpha}{|۱-z\bar{w}|^{۲+\alpha}}dA(w) \approx \log\frac{۲}{۱-|z|^۲}.$$

تعریف ۵.۱. فضای زیگموند $\mathcal{Z}$، شامل تمام توابعی مانند $f \in H(\mathbb{D})$ است که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\|f\|_{\mathcal{Z}} = |f(\circ)| + |f'(\circ)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(۱-|z|^۲)|f''(z)| < \infty.$$

فضای زیگموند با نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$ یک فضای باناخ است.

هر تابع تحلیلی $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ را خودنگاشت می‌نامند. مجموعه تمام خودنگاشت های تحلیلی روی $\mathbb{D}$ را با $S(\mathbb{D})$ نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم $u, v \in H(\mathbb{D})$ و $\psi \in S(\mathbb{D})$، در این صورت عملگر استویچ شارما را که توسط u، v و ψ تعریف می‌شود با نماد $T_{u,v,\psi}$ نمایش می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{u,v,\psi}f(z) = u(z)f(\psi(z)) + v(z)f'(\psi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

عملگر $T_{u,v,\psi}$، توسط استویچ، شارما و بهات در [۹] معرفی شد. این عملگر کلاس وسیعی از عملگرهای دیگر را شامل می‌شود. به‌عنوان مثال $T_{u,\circ,\psi} = uC_\psi$ عملگر ترکیبی وزن‌دار و $T_{۱,\circ,\psi} = C_\psi$ عملگر وزن‌دار، خواهند شد. همچنین هرگاه D عملگر دیفرانسیل باشد، آنگاه $T_{\circ,v,\psi} = vC_\psi D$ و $T_{u,v,\psi} = uC_\psi + vC_\psi D$. اطلاعات بیشتر درمورد علمگر $T_{u,v,\psi}$ را می‌توان در مراجع [۱، ۲، ۶–۹، ۱۱–۱۳، ۱۷] یافت.

نویسنده اول این مقاله در [۱] کران‌داری و نرم اساسی عملگر $T_{u,v,\psi}$ را بین فضاهای زیگموند مورد بررسی قرار داده است. همچنین کران‌داری و فشردگی عملگر $T_{u,v,\psi}$ از فضای بسوف به فضاهای H_μ^∞ و $\mathcal{B}$ در [۷] و [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. لذا با الهام گرفتن از مقالات ذکرشده، در بخش دوم این مقاله، کران‌داری عملگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و کران‌داری را مشخصه‌سازی خواهیم کرد. همچنین در بخش سوم، شرط‌های معادلی برای فشردگی این عملگر ارائه و اثبات خواهند شد.

در این مقاله، $a \preceq b$، یعنی ثابت c چنان موجود است که $a \leq cb$ و نماد $a \approx b$ بیانگر $b \preceq a \preceq b$ می‌باشد.

۲ کران‌داری

در این بخش، شرط‌های معادلی برای کران‌داری عملگر استوییچ شارما از فضای بسوف به فضای زیگموند ارائه خواهد شد. به‌همین منظور ابتدا چند لم کاربردی بیان خواهند شد. لم بعدی در [۱۸] اثبات شده است.

لم ۱.۲. فرض کنید $۱ < p < \infty$، برای هر $a \in \mathbb{D}$ و $j \in \{۱, \ldots, n\}$ قرار دهید:

$$f_{j,a}(z) = \Big(\frac{۱ - |a|^۲}{۱ - \bar{a}z}\Big)^j, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{۱.۲}$$

در این‌صورت، $f_{j,a} \in B_p$ و $\sup_{a\in\mathbb{D}} \|f_{j,a}\|_{B_p} < \infty$.

با توجه به ساده بودن اثبات لم زیر، از آوردن برهان صرف‌نظر کرده‌ایم.

لم ۲.۲. فرض کنید $a \in \mathbb{D}$ و $f_{i,a}$ توابع تعریف شده در لم قبلی باشند در این‌صورت احکام زیر برقرارند:
الف) اگر $h_{۱,a}(z) = -۶f_{۱,a}(z) + ۱۴f_{۲,a}(z) - ۱۱f_{۳,a}(z) + ۳f_{۴,a}$، آنگاه

$$h_{۱,a}(a) = h''_{۱,a}(a) = h^{(۳)}_{۱,a}(a) = ۰, \quad h'_{۱,a}(a) = \frac{\bar{a}}{۱ - |a|^۲}.$$

ب) اگر $h_{۲,a}(z) = ۲f_{۱,a}(z) - \frac{۱۱}{۲}f_{۲,a}(z) + ۵f_{۳,a}(z) - \frac{۳}{۲}f_{۴,a}(z)$، آنگاه

$$h_{۲,a}(a) = h'_{۲,a}(a) = h^{(۳)}_{۲,a}(a) = ۰, \quad h''_{۲,a}(a) = \frac{\bar{a}^۲}{(۱ - |a|^۲)^۲}.$$

پ) هرگاه $h_{۳,a}(z) = -\frac{۱}{۶}f_{۱,a}(z) + \frac{۱}{۲}f_{۲,a}(z) - \frac{۱}{۲}f_{۳,a}(z) + \frac{۱}{۶}f_{۴,a}(z)$، در این‌صورت

$$h_{۳,a}(a) = h'_{۳,a}(a) = h''_{۳,a}(a) = ۰, \quad h^{(۳)}_{۳,a}(a) = \frac{\bar{a}^۳}{(۱ - |a|^۲)^۳}.$$

نمادگذاری برای سادگی محاسبات، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
A_۱(z) &:= (۱ - |z|^۲)\Big|۲u'(z)\psi'(z) + u(z)\psi''(z) + v''(z)\Big|,\\
A_۲(z) &:= (۱ - |z|^۲)\Big|u(z)\psi'^۲(z) + ۲v'(z)\psi'(z) + v(z)\psi''(z)\Big|,\\
A_۳(z) &:= (۱ - |z|^۲)\Big|v(z)\psi'^۲(z)\Big|.
\end{aligned}$$

لم ۳.۲. فرض کنید $u \in \mathcal{Z}$ و $\psi \in S(\mathbb{D})$. در این صورت احکام زیر با هم معادل‌اند.
الف) $\sup_{j\geq ۱} \|u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\|_{\mathcal{Z}} < \infty$.
ب) اگر $f_{i,a}$ توابع تعریف شده در (۱.۲) باشند، آنگاه

$$\max\Big\{\sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z)\Big\}_{k=۱}^{۳} < \infty, \qquad \max\Big\{\sup_{a\in\mathbb{D}} \|T_{u,v,\psi}f_{i,a}\|_{\mathcal{Z}}\Big\}_{i=۱}^{۴} < \infty.$$

پ)

$$\max\Big\{\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{A_k(z)}{(۱ - |\psi(z)|^۲)^k}\Big\}_{k=۱}^{۳} < \infty.$$

اثبات. الف ... ب)، برای هر $i \in \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{D}$، داریم:

$$f_{i,a}(z) = (۱ - |a|^۲)^i \sum_{j=۰}^{\infty} \binom{i + j - ۱}{j} \bar{a}^j z^j.$$

در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\|T_{u,v,\psi}f_{i,a}\|_{\mathcal{Z}} \leq (1-|a|^2)^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j} |\bar{a}|^j \|T_{u,v,\psi}z^j\|_{\mathcal{Z}}$$
$$\leq (1-|a|^2)^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j} |\bar{a}|^j \|u\psi^j + jv\psi^{j-1}\|_{\mathcal{Z}} \leq 2^i \sup_{j\geq 0} \|u\psi^j + jv\psi^{j-1}\|_{\mathcal{Z}}.$$

بنابراین $\max\left\{\sup_{a\in\mathbb{D}}\|T_{u,v,\psi}f_{i,a}\|_{\mathcal{Z}}\right\}_{i=1}^{4} < \infty$. حال با استفاده از اثر عملگر $T_{u,v,\psi}$ بر روی توابع $p_1(z) = z$، $p_2(z) = z^2$ و $p_3(z) = z^3$ به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\max\left\{\sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z)\right\}_1^3 < \infty.$$

ب ... پ)، برای هر $a \in \mathbb{D}$ به‌طوری‌که $|\psi(a)| > \frac{1}{2}$ و برای هر $k \in \{1,2,3\}$، به کمک لم ۲.۲ خواهیم داشت:

$$\frac{|\psi(a)|^k A_k(a)}{(1-|\psi(a)|^2)^k} \leq \sup_{a\in\mathbb{D}} \|T_{u,v,\psi}h_{k,\psi(a)}\|_{\mathcal{Z}} \leq 6\sum_{j=1}^{4} \sup_{a\in\mathbb{D}} \|T_{u,v,\psi}f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}}.$$

لذا بنابر فرض (ب) داریم:

$$\max\left\{\sup_{|\psi(z)|>\frac{1}{2}} \frac{A_k(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^k}\right\}_1^3 < \infty.$$

همچنین با استفاده از (ب)، برای هر $k \in \{1,2,3\}$، داریم:

$$\sup_{|\psi(z)|\leq\frac{1}{2}} \frac{A_k(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^k} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^k \sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \max\{\sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z)\}_1^3 < \infty.$$

حال باتوجه به دو رابطه قبلی اثبات (پ) به اتمام می‌رسد.

پ ... الف)، برای هر $k \in \{1,2,3\}$، بنابر [۱۰] داریم:

$$S_k := \sup_{z\in\mathbb{D}} \prod_{t=0}^{k-1} (j-t)|\psi^{j-k}(z)|(1-|\psi(z)|^2)^k \preceq 1. \tag{۲.۲}$$

لذا با استفاده از لم ۱.۱ خواهیم داشت :

$$(1-|z|^2)|(u(z)\psi^j(z) + jv(z)\psi^{j-1}(z))''| \preceq$$
$$(1-|z|^2)|u''(z)| + \frac{3S_1A_1(z)}{1-|\psi(z)|^2} + \frac{6S_2A_2(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^2} + \frac{6S_3A_3(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^3} \preceq$$
$$\|u\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{k=1}^{3} \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{A_k(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^k}. \tag{۳.۲}$$

همچنین

$$\lim_{j\to\infty} |u(0)\psi^j(0) + jv(0)\psi^{j-1}(0)| = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty} \left|u'(0)\psi^j(0) + j\psi^{j-1}(0)(u(0)\psi'(0) + v'(0)) + j(j-1)\psi^{j-2}(0)\psi'(0)\right| = 0. \tag{۴.۲}$$

حال با استفاده از (۳.۲) و (۴.۲)، نتیجه مورد انتظار به‌دست خواهد آمد. □

لم ۴.۲. هرگاه $\psi \in S(\mathbb{D})$، آنگاه برای هر $a \in \mathbb{D}$، تابع $l_a \in B_p$ چنان موجود است که

$$l_a(\psi(a)) = \Big(\log \frac{۲}{۱-\mid \psi(a)\mid^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}, \quad l'_a(\psi(a)) = l''_a(\psi(a)) = l_a^{(۳)}(\psi(a)) = ۰.$$

اثبات. فرض کنیم $a \in \mathbb{D}$ به‌طوری‌که $\psi(a) \neq ۰$. قرار می‌دهیم

$$g_{a,k}(z) = \frac{\Big(\log \frac{۲}{۱-\overline{\psi(a)}z}\Big)^{۲+k}}{\Big(\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}\Big)^{۱+k+\frac{۱}{p}}} \qquad k \in \{۰,۱,۲,۳\}. \tag{۵.۲}$$

واضح است که

$$g_{a,k}(\psi(a)) = \Big(\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}.$$

حال نشان می‌دهیم که

$$g_{a,k} \in B_p, \qquad \sup_{a\in\mathbb{D}} \|g_{a,k}\|_{B_p} < \infty.$$

با توجه به نامساوی $|۱-\overline{\psi(a)}z| \geq ۱-|\overline{\psi(a)}|$ داریم:

$$\Big|\log \frac{۲}{۱-\overline{\psi(a)}z}\Big| \leq \log \frac{۲}{|۱-\overline{\psi(a)}z|} + ۲\pi \leq \log \frac{۴}{۱-|\overline{\psi(a)}|^۲} + ۲\pi$$
$$= ۲(\log \frac{۲}{۱-|\overline{\psi(a)}|^۲} + \pi).$$

لذا

$$\begin{aligned}
b_p^p(g_{a,k}(z)) &= \frac{(۲+k)^p|\psi(a)|^p}{\Big(\log \frac{۲}{(۱-|\psi(a)|^۲}\Big)^{p(k+۱)+۱}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|z|^۲)^{p-۲}}{|۱-\overline{\psi(a)}z|^p}\Big|\log \frac{۲}{۱-\overline{\psi(a)}z}\Big|^{p(k+۱)} dA(z)\\
&\leq \frac{۲^{p(k+۱)}(۲+k)^p}{\Big(\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}\Big)}\Big(۱+\frac{\pi}{\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}}\Big)^{p(k+۱)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|z|^۲)^{p-۲}}{|۱-\overline{\psi(a)}z|^p} dA(z)\\
&\leq \frac{۲^{p(k+۱)}(۲+k)^p\Big(۱+\frac{\pi}{\log ۲}\Big)^{p(k+۱)}}{\Big(\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}\Big)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(۱-|z|^۲)^{p-۲}}{|۱-\overline{\psi(a)}z|^p} dA(z)
\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

با توجه به رابطه فوق

$$b_p^p(g_{a,k}(z)) \leq \frac{۲^{p(k+۱)}(۲+k)^p\Big(۱+\frac{\pi}{\log ۲}\Big)^{p(k+۱)}}{(p-۱)(۱-|\overline{\psi(a)}|)^p\Big(\log \frac{۲}{۱-|\psi(a)|^۲}\Big)} < \infty$$

پس $g_{a,k} \in B_p$. همچنین با استفاده از لم ۴.۱ و رابطه (۶.۲)، $\sup_{a\in\mathbb{D}} \|g_{a,k}\|_{B_p} < \infty$.
حال با استفاده از توابع $g_{a,k}$ تابع l_a را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_a(z) = \begin{cases} ۲۰g_{a,۰}(z) - ۴۵g_{a,۱}(z) + ۳۶g_{a,۲}(z) - ۱۰g_{a,۳}(z) & \psi(a) \neq ۰ \\ \Big(\log ۲\Big)^{۱-\frac{۱}{p}} & \psi(a) = ۰ \end{cases}$$

□

قضیه ۵.۲. فرض کنید $1 < p < \infty$، $u \in \mathcal{Z}$ و $\psi \in S(\mathbb{D})$. در این صورت احکام زیر با هم معادل‌اند.
الف) عملگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ کران‌دار است.
ب) اگر $g_{a,k}$ توابع تعریف‌شده در (۵.۲) باشند، آنگاه داریم:

$$\sup_{j\geq 1}\|u\psi^j + jv\psi^{j-1}\|_{\mathcal{Z}} < \infty, \qquad \max\left\{\sup_{a\in\mathbb{D}}\|T_{u,v,\psi}g_{a,k}\|_{\mathcal{Z}}\right\}_{k=0}^{3} < \infty.$$

پ) اگر $Q := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|u''(z)|\Big(\log\frac{2}{1-|\psi(z)|^2}\Big)^{1-\frac{1}{p}}$ در این صورت

$$\max\left\{\sup_{j\geq 1}\|u\psi^j + jv\psi^{j-1}\|_{\mathcal{Z}},\ Q\right\} < \infty.$$

ت) اگر $f_{i,a}$ توابع تعریف‌شده در (۱.۲) باشند، آنگاه

$$\max\left\{\max\{\sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z)\}_{k=1}^{3},\ \max\{\sup_{a\in\mathbb{D}}\|T_{u,v,\psi}f_{i,a}\|_{\mathcal{Z}}\}_{i=1}^{4},\ Q\right\} < \infty.$$

ث)

$$\max\left\{\max\{\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{A_k(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^k}\}_{k=1}^{3},\ Q\right\} < \infty.$$

اثبات. بنابر لم ۳.۲ احکام ذکرشده در (پ)، (ت) و (ث) با هم معادل‌اند.
الف ... ت)، فرض کنید برای هر $a \in \mathbb{D}$، l_a تابع تعریف‌شده در لم ۴.۲ باشد. در این‌صورت

$$L = \sup\{\|l_a\|_{B_p} : a \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

لذا برای هر $a \in \mathbb{D}$ خواهیم داشت:

$$(1-|a|^2)|u''(a)|\Big(\log\frac{2}{1-|\psi(a)|^2}\Big)^{1-\frac{1}{p}} = (1-|a|^2)|u''(a)||l_a(\psi(a))| =$$
$$(1-|a|^2)\Big|\Big(T_{u,v,\psi}l_a\Big)''(\psi(a))\Big| \leq L\|T_{u,v,\psi}\|.$$

پس $Q < \infty$. همچنین بنابر لم ۱.۲ برای هر $i \in \{1,2,3,4\}$، داریم:

$$\sup_{a\in\mathbb{D}}\|T_{u,v,\psi}f_{i,a}\|_{\mathcal{Z}} \leq \|T_{u,v,\psi}\|\sup_{a\in\mathbb{D}}\|f_{i,a}\|_{B_p} < \infty.$$

ازطرفی با اثر عملگر $T_{u,v,\psi}$، روی توابع $p_1(z) = z$، $p_2(z) = z^2$ و $p_3(z) = z^3$ به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\max\{\sup_{z\in\mathbb{D}} A_k(z)\}_{k=1}^{3} < \infty.$$

ث ...الف)، با استفاده از لم‌های ۱.۱ و ۳.۱، برای هر $f \in B_p$ داریم:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(T_{u,v,\psi}f)''(z)| \preceq \|f\|_{B_p}\Big(\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|u''(z)|\big(\log\frac{2}{1-|\psi(z)|^2}\big)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{A_k(z)}{(1-|\psi(z)|^2)^k}\Big).$$

لذا $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ کران‌دار است. پس (الف) نیز با (پ)، (ت) و (ث) معادل است.
الف ...ب)، چون (الف) و (پ) با هم معادل‌اند، لذا

$$\sup_{j\geq ۱} \|u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\|_{\mathcal{Z}} < \infty.$$

از طرفی با استفاده از لم ۴.۱، به ازای $k \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$، $\sup_{a\in\mathbb{D}} \|g_{a,k}\|_{B_p} < \infty$. پس

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \|T_{u,v,\psi} g_{a,k}\|_{\mathcal{Z}} \leq \|T_{u,v,\psi}\| \max\{\sup_{a\in\mathbb{D}} \|g_{a,k}\|_{B_p}\}_{k=۰}^{۳} < \infty.$$

ب ...پ)، لم ۴.۲.
به این ترتیب اثبات قضیه در اینجا به اتمام خواهد رسید.

□

ملاحظه ۶.۲. با جای‌گذاری $v(z) = ۰$، در قضیه ۵.۲، شرط‌های معادلی برای کران‌داری عملگر $uC_\psi : B_p \to \mathcal{Z}$ ارائه خواهد شد (به قضیه ۳ [۴] مراجعه شود).

ملاحظه ۷.۲. با قرار دادن $u(z) = ۰$، در قضیه ۵.۲، شرط‌های معادلی برای کران‌داری عملگر $vC_\psi D : B_p \to \mathcal{Z}$ ارائه خواهد شد.

۳ فشردگی

در این بخش، شرط‌های معادلی برای فشردگی عملگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ پیدا خواهیم کرد. در این راستا، لم زیر را بیان خواهیم کرد. از آنجا که اثبات آن مشابه اثبات گزاره ۳.۱۱ [۵] است، از آوردن اثبات صرف‌نظر کرده‌ایم.

لم ۱.۳. فرض کنید $۱ < p < \infty$، $u \in H(\mathbb{D})$ و $\psi \in S(\mathbb{D})$. در این‌صورت عملگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ فشرده است، اگر و تنها اگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ کران‌دار بوده و برای هر دنباله کران‌دار $\{f_k\}$ در B_p که روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ به‌طور یکنواخت همگرا به صفر باشد، داشته باشیم:

$$\lim_{k\to\infty} \|T_{u,v,\psi} f_k\|_{\mathcal{Z}} = ۰.$$

لم ۲.۳. فرض کنید $\psi \in S(\mathbb{D})$ و $u \in H(\mathbb{D})$، به‌طوری‌که $\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱ - |z|^۲)|u''(z)| = ۰$. در این‌صورت، هرگاه یکی از شرایط لم ۳.۲، برقرار باشد، احکام زیر با هم معادل‌اند.
الف) $\lim_{j\to\infty} \|u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\|_{\mathcal{Z}} = ۰$.
ب) اگر $f_{j,a}(z) = \left(\frac{۱-|a|^۲}{۱-\bar{a}z}\right)^j$، در این‌صورت برای هر $j \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $\limsup_{|a|\to ۱} \|T_{u,v,\psi} f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}} = ۰$.
پ) برای هر $k \in \{۱, ۲, ۳\}$، $\lim_{|\psi(z)|\to ۱} \frac{A_k(z)}{(۱-|\psi(z)|^۲)^k} = ۰$.

اثبات. الف ... ب)، برای هر ϵ دلخواه، عدد طبیعی N چنان موجود است که برای هر $k \geq N \geq ۲$

$$\|u\psi^k + kv\psi^{k-۱}\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon.$$

از طرفی داریم:

$$f_{j,a}(z) = (۱ - |a|^۲)^j \left\{ \sum_{k=۰}^{N-۱} \binom{j+k-۱}{k} \bar{a}^k z^k + \sum_{k=N}^{\infty} \binom{j+k-۱}{k} \bar{a}^k z^k \right\}.$$

پس برای هر $j \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ داریم:

$$\|T_{u,v,\psi} f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}} \leq ۲ \max\{\|u\psi^k + kv\psi^{k-۱}\|_{\mathcal{Z}}\}_{k=۰}^{N-۱} (۱ - |a|^۲)^{j-۱}(۱ - |a|^N) \binom{j+N-۲}{N-۲} + ۲^j\epsilon.$$

حال با حد گرفتن از رابطه فوق هنگامی که $|a| \to ۱$، خواهیم داشت:

$$\limsup_{|a|\to ۱} \|T_{u,v,\psi} f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}} \preceq \epsilon.$$

باتوجه به دلخواه بودن ϵ

$$\limsup_{|a|\to ۱} \|T_{u,v,\psi} f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}} = ۰.$$

ب ... پ)، فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{D}$ باشد، به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} |\psi(a_n)| = ۱$. در این صورت با استفاده از لم ۲.۲، برای هر $k \in \{۱, ۲, ۳\}$، خواهیم داشت:

$$\max\left\{\frac{A_k(a_n)}{(۱ - |\psi(a_k)|^۲)^k}\right\}_۱^۳ \preceq \sum_{j=۱}^{۴} \sup_{\psi(a_n)\in\mathbb{D}} \|T_{u,v,\psi} f_{j,\psi(a_n)}\|_{\mathcal{Z}}.$$

با حد گرفتن از رابطه فوق، هنگامی که $n \to \infty$، خواهیم داشت:

$$\lim_{|\psi(a)|\to ۱} \frac{A_k(a_n)}{(۱ - |\psi(a_n)|^۲)^k} = ۰, \quad k \in \{۱, ۲, ۳\}.$$

پ ... الف)، برای هر ϵ دلخواه، ثابت مثبت δ چنان موجود است که اگر $\delta < |\psi(z)| < ۱$، آنگاه

$$(۱ - |z|^۲)|u''(z)| < \epsilon, \qquad \max\{\frac{A_k(z)}{(۱ - |\psi(z)|^۲)^k}\}_{k=۱}^{۳} < \epsilon. \tag{۱.۳}$$

از طرفی

$$(۱ - |z|^۲)\left|\left(u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\right)''(z)\right| \le \underbrace{\sup_{|\psi(z)|\le\delta} (۱ - |z|^۲)|u''(z)\psi^j(z)|}_{E_۰} + \tag{۲.۳}$$

$$\underbrace{\sup_{|\psi(z)|>\delta} (۱ - |z|^۲)|u''(z)\psi^j(z)|}_{H_۰} + \sum_{k=۱}^{۳}\left(\underbrace{\sup_{|\psi(z)|\le\delta} \frac{S_k A_k(z)}{(۱ - |\psi(z)|^۲)^k}}_{E_k} + \underbrace{\sup_{|\psi(z)|>\delta} \frac{S_k A_k(z)}{(۱ - |\psi(z)|^۲)^k}}_{H_k}\right).$$

با استفاده از لم ۳.۲ و (۲.۲) واضح است که

$$\limsup_{j\to\infty} E_k = ۰, \quad k \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}. \tag{۳.۳}$$

همچنین با استفاده از روابط (۲.۲) و (۱.۳)، داریم:

$$\limsup_{j\to\infty} H_k = ۰, \quad k \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}. \tag{۴.۳}$$

لذا با استفاده از (۴.۲)، (۲.۳)، (۳.۳) و (۴.۳)، (الف) حاصل می‌شود و اثبات تمام خواهد شد. $\square$

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $۱ < p < \infty$، $\psi \in S(\mathbb{D})$ و $u, v \in H(\mathbb{D})$، به‌طوری‌که $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ کران‌دار باشد. در این‌صورت احکام زیر با هم معادل‌اند.
الف) عملگر $T_{u,v,\psi} : B_p \to \mathcal{Z}$ فشرده است.
ب) هرگاه $g_{a,k}$ توابع تعریف‌شده در (۵.۲) باشند، آنگاه

$$\lim_{j\to\infty} \|u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\|_{\mathcal{Z}} = \lim_{|a|\to ۱} \|T_{u,v,\psi} g_{a,k}\|_{\mathcal{Z}} = ۰, \quad k \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}.$$

پ)

$$\lim_{j\to\infty}\|u\psi^j+jv\psi^{j-1}\|_{\mathcal{Z}}=\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|\Big(\log\frac{۲}{۱-|\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}=\circ.$$

ت) هرگاه $f_{j,a}$ توابع تعریف‌شده در (۱.۲) باشند، آنگاه برای $j\in\{۱,۲,۳,۴\}$، داریم:

$$\lim_{|a|\to ۱}\|T_{u,v,\psi}f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}}=\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|\Big(\log\frac{۲}{۱-|\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}=\circ.$$

ث) برای هر $k\in\{۱,۲,۳\}$، داریم:

$$\lim_{|\psi(z)|\to ۱}\frac{A_k(z)}{(۱-|\psi(z)|^۲)^k}=\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|\Big(\log\frac{۲}{۱-|\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}=\circ.$$

اثبات. چون $T_{u,v,\psi}:B_p\to\mathcal{Z}$ کران‌دار است، با استفاده از قضیه ۵.۲، خواهیم داشت:

$$\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|=\circ.$$

پس بنابر لم ۲.۳، شرط‌های (پ)، (ت) و (ث) با هم معادل‌اند.
الف ... ت)، فرض کنید $\{a_k\}$ دنباله ای در $\mathbb{D}$ باشد، به‌طوری‌که $\lim_{k\to\infty}|\psi(a_k)|=۱$. قرار می‌دهیم

$$l_{a_k,k}(z)=۲\circ g_{a_k,\circ}(z)-۴۵g_{a_k,۱}(z)+۳۶g_{a_k,۲}(z)-۱\circ g_{a_k,۳}(z).$$

لذا $\{l_{a_k,k}\}\subset B_p$. همچنین این دنباله در B_p کران‌دار و روی زیرمجموعه‌ها فشرده $\mathbb{D}$ به‌طور یکنواخت همگرا به صفر است. حال با استفاده از لم‌های ۴.۲ و ۱.۳ برای دنباله $\{l_{a_k,k}\}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{|\psi(z)|\to ۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|\Big(\log\frac{۲}{۱-|\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}=\circ.$$

از طرفی بنابر لم‌های ۱.۲ و ۱.۳ خواهیم داشت:

$$\lim_{|a|\to ۱}\|T_{u,v,\psi}f_{j,a}\|_{\mathcal{Z}}=\circ,\qquad j\in\{۱,۲,۳,۴\}.$$

ث ...الف)، فرض کنید ϵ یک عدد مثبت دلخواه باشد. لذا یک $\delta\in(\circ,۱)$ چنان موجود است که

$$\begin{aligned}&\sup_{\delta<|\psi(z)|<۱}(۱-|z|^۲)|u''(z)|\Big(\log\frac{۲}{۱-|\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}}<\epsilon,\\&\max\Big\{\sup_{\delta<|\psi(z)|<۱}\Big\{\frac{A_k(z)}{(۱-|\psi(z)|^۲)^k}\Big\}\Big\}_{k=۱}^{۳}<\epsilon.\end{aligned}\tag{۵.۳}$$

فرض کنید $\{f_k\}$ دنباله‌ای کران‌دار در B_p باشد، به‌طوری‌که روی زیرمجموعه‌ها فشرده $\mathbb{D}$ به‌طور یکنواخت به صفر همگرا است. در این‌صورت

$$\begin{aligned}(۱-|z|^۲)\Big|\Big(T_{u,v,\psi}f_k\Big)''(z)\Big|\le&\underbrace{\sup_{|\psi(z)|\le\delta}(۱-|z|^۲)|u''(z)f_k(\psi(z))|}_{L_۱}+\sum_{t=۱}^{۳}\underbrace{\sup_{|\psi(z)|\le\delta}A_t(z)|f_k^{(t)}(\psi(z))|}_{L_{۲t+۱}}\\&+\underbrace{\sup_{|\psi(z)|>\delta}(۱-|z|^۲)|u''(z)f_k(\psi(z))|}_{L_۲}+\sum_{t=۱}^{۳}\underbrace{\sup_{|\psi(z)|>\delta}A_t(z)|f_k^{(t)}(\psi(z))|}_{L_{۲t+۲}}.\end{aligned}\tag{۶.۳}$$

بنابر قضیه کوشی $\{f'_k\}$، $\{f''_k\}$ و $\{f_k^{(۳)}\}$ روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ به‌طور یکنواخت همگرا به صفر خواهند شد. لذا با استفاده از قضیه ۵.۲، داریم:

$$\limsup_{k\to\infty} L_{۲t+۱} = ۰, \quad t \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}. \tag{۷.۳}$$

از طرفی

$$L_۲ \leq \|f_k\|_{B_p} \sup_{|\psi(z)|>\delta} (۱ - |z|^۲)|u'(z)|\Big(\log \frac{۲}{۱ - |\psi(z)|^۲}\Big)^{۱-\frac{۱}{p}},$$

همچنین با استفاده از (۵.۳)، خواهیم داشت:

$$\limsup_{k\to\infty} L_۲ \leq \epsilon \sup_k \|f_k\|_{B_p}. \tag{۸.۳}$$

به طور مشابه با به‌کارگیری لم‌های ۱.۱، ۳.۱ و (۵.۳)، داریم :

$$\limsup_{k\to\infty} L_{۲t+۲} \leq \epsilon \sup_k \|f_k\|_{B_p}, \quad t \in \{۱, ۲, ۳\}. \tag{۹.۳}$$

همچنین

$$\limsup_{k\to\infty} |(T_{u,v,\psi} f_k)(۰)| = \limsup_{k\to\infty} |(T_{u,v,\psi} f_k)'(۰)| = ۰. \tag{۱۰.۳}$$

به توجه به روابط (۶.۳)، (۷.۳)، (۸.۳)، (۹.۳)، (۱۰.۳) و لم ۱.۳، حکم (الف) حاصل خواهد شد. تا کنون معادل بودن (الف)، (پ)، (ت) و (ث) ثابت شده است. حال معادل بودن (ب) با بقیه احکام مورد بررسی قرار می‌گیرد.
الف ... ب)، چون (الف) و (پ) با هم معادل‌اند، پس

$$\lim_{j\to\infty} \|u\psi^j + jv\psi^{j-۱}\|_{\mathcal{Z}} = ۰.$$

از طرفی $g_{a,k}$ در B_p کران‌دار است و همچنین روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ ، به‌طور یکنواخت همگرا به صفرند، لذا با استفاده از لم ۱.۳ برای $\{g_{a,k}\}$ ، خواهیم داشت :

$$\lim_{|a|\to۱} \|T_{u,v,\psi} g_{a,k}\|_{\mathcal{Z}} = ۰, \quad k \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}.$$

ب ... پ)، اثبات این قسمت مشابه، اثبات الف ... ت) است.
به این ترتیب اثبات قضیه در اینجا به اتمام می‌رسد. □

ملاحظه ۴.۳. با جای‌گذاری $v(z) = ۰$، در قضیه ۳.۳، شرط‌های معادلی برای فشردگی عملگر $uC_\psi : B_p \to \mathcal{Z}$ ارائه خواهند شد (به قضیه ۷ [۴] مراجعه شود).

ملاحظه ۵.۳. با قرار دادن $u(z) = ۰$، در قضیه ۳.۳، شرط‌های معادلی برای فشردگی عملگر $vC_\psi D : B_p \to \mathcal{Z}$ به‌دست خواهیم آورد.

فهرست منابع

[1] Abbasi E., *A class of operator related weighted composition operators between Zygmund space*, AUT J. Math. Com. **2**(1) (2021) 17–25.

[2] Abbasi E. and Zhu X., *Product-type operators from the Bloch space into Zygmund-type spaces*, Bull. Iran. Math. Soc. (2021) doi 10.1007/s41980-020-00523-1.

[3] Colonna F. and Li S., *Weighted composition operators from the Besov spaces to the Bloch spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **36** (2013) 1027–1039.

[4] Colonna F. and Li S., *Weighted composition operators from the Bloch space and the analytic Besov spaces into the Zygmund space*, J. Operators, **2013** (2013), ID 154029-154038.

[5] Cowen C. C. and MacCluer B. D., *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[6] Liu Y. and Yu Y., *On a Stević-Sharma operator from Hardy spaces to the logarithmic Bloch spaces*, J. Inequal. Appl. **2015** 2015:22, doi 10.1186/s13660-015-0547-1.

[7] Liu Y. and Yu Y., *On Stević-Sharma type operators from the Besov spaces into the weighted-type space* H_μ^∞, Math. Inequal. Appl. **22**(3) (2019) 1037–1053.

[8] Stević S., Sharma A. and Bhat A., *Essential norm of products of multiplications composition and differentiation operators on weighted Bergman spaces*, Appl. Math. Comput. **218** (2011) 2386–2379.

[9] Stević S., Sharma A. and Bhat A., *Products of multiplication composition and differentiation operators on weighted Bergman spaces*, Appl. Math. Comput. **217** (2011) 8115–8125.

[10] Wulan H., Zheng D. and Zhu K., *Compact composition operators on BMOA and the Bloch space*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009) 3861–3868.

[11] Yu Y. and Liu Y., *On Stević type operator from* H^∞ *space to the logarithmic Bloch spaces*, Complex Anal. Oper. Theory, **9**(8) (2015) 1759–1780.

[12] Zhang F. and Liu Y., *On the compactness of the Stević-Sharma operator on the logarithmic Bloch spaces*, Math. Inequal. Appl. **19**(2) (2016) 625–6426.

[13] Zhang F. and Liu Y., *On a Stević-Sharma operator from Hardy spaces to Zygmund-type spaces on the unit disk*, Complex Anal. Oper. Theory, **12**(1) (2018) 81–100.

[14] Zhu K., *Analytic Besov spaces*, J. Math. Anal. Appl. **157**(2) (1991) 318–336.

[15] Zhu K., *Bloch type spaces of analytic functions*, Rocky Mountain J. Math. **23**(3) (1993) 1143–1177.

[16] Zhu K., *Operator Theory in Function Spaces*, Amer. Math. Soc. second edition, 2007.

[17] Zhu X., Abbasi E. and Ebrahimi A., *Product-type operators on the Zygmund space*, Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci. (2021) doi 10.1007/s40995-021-01138-9.

[18] Zhu X., Abbasi E. and Ebrahimi A., *A class of operator-related composition operators from the Besov spaces into the Bloch space*, Bull. Iran. Math. Soc. **47** (2021) 171–184.

Stević-Sharma type operator from Besov space into Zygmund space

Ebrahim Abbasi[1,†], **Sepide Nasresfahani**[2], **Kamal Khalilpour**[1]

(1) Department of Mathematics, Mahabad Branch, Islamic Azad University, Mahabad, Iran.
(2) Department of Mathematics, University of Isfahan, Isfahan , Iran.

Received: 2021/5/7 Accepted: 2021/9/10

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Abstract: Let $H(\mathbb{D})$ be the space of all analytic functions on $\mathbb{D}$. For $u, v \in H(\mathbb{D})$ and self-map $\psi(\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D})$ the Stević-Sharma type operator is defined as follows

$$T_{u,v,\psi}f(z) = u(z)f(\psi(z)) + v(z)f'(\psi(z)), \quad f \in H(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

In this paper, we study boundedness and compactness of Stević-Sharma type operator from Besov space into Zygmund space and we obtain some equivalence conditions for boundedness and compactness of such operator.

Keywords: Boundedness, Compactness, Besov space, Zygmund Space, Stević-Sharma type operator.

†Corresponding author.
E-mail addresses: ebrahimabbasi81@gmail.com (E. Abbasi), sepide.nasr@gmail.com (S. Nasresfahani) kamal.khalilpour@gmail.com (K. Khalilpour).