مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۶۵۳–۶۶۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.37610.1933

بررسی وجود جواب برای معادله انتگرالی کسری با استفاده از اندازه نافشردگی در فضای باناخ

منوچهر کاظمی [×]

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آشتیان، آشتیان، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۳/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۹

چکیده: در این مقاله، وجود جواب برای دسته‌ای از معادلات انتگرالی غیرخطی کسری در فضای باناخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابزارهای اصلی مورد نیاز، تکنیک اندازه نافشردگی و قضیه نقطه ثابت پترشن می‌باشند. همچنین، به‌منظور نشان دادن کاربردی بودن نتایج، چند مثال ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرالی کسری، وجود جواب، اندازه نافشردگی، قضیه نقطه ثابت پترشن.

رده‌بندی ریاضی: 47H09; 47H10

۱ مقدمه

معادلات انتگرالی کسری، نقش بسیار مهم و اساسی در بیان و تشریح بسیاری از مسائل جهان واقعی دارند و همچنین کاربردهای فراوانی در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی، ریاضیات کاربردی، مسایل فیزیک، الکترومغناطیس، بیولوژی و سایر حوزه‌ها دارند [۱–۴]. قضایای نقطه ثابت و اندازه نافشردگی کاربردهای زیادی در حل انواع معادلات، از جمله معادلات انتگرال و دیفرانسیل دارند. اخیرا تلاش هایی برای به‌کارگیری اندازه نافشردگی و قضایای نقطه ثابت، برای اثبات وجود جواب معادلات انتگرالی غیرخطی صورت گرفته شده است [۵–۸]. همچنین وجود جواب برای معادلات انتگرالی کسری ریمان– لیوویل که در بسیاری از مسایل کاربردی ظاهر می‌شوند، توسط تعدادی از محققین بررسی شده است [۹–۱۴].

تعریف ۱.۱. [۳] فرض کنیم $x \in L^1(a,b), 0 \leq a < b < \infty$ و همچنین فرض کنیم $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی باشد. انتگرال کسری ریمان – لیوویل از مرتبه α به‌صورت

$$I^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds, t \in (a,b),$$

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: m.kazemi@aiau.ac.ir (M. Kazemi),

تعریف می‌شود. که در آن Γ، تابع گاما است.

در این مقاله، با استفاده از قضیه نقطه ثابت پترشن یک قضیه وجودی جدید، برای معادله انتگرالی غیرخطی کسری زیر ارائه و اثبات می‌شود.

$$T(x)(t) = x(t) = f(t) + q\left(t, g(t, x(\alpha(t))), \frac{۱}{\Gamma(\upsilon)}\int_{۰}^{t}\frac{k(t,s,x(\theta(s)))}{(t-s)^{۱-\upsilon}}ds\right), \qquad (۱.۱)$$

که در آن x مجهول و توابع f، g، k و q در شرایط معینی که در ادامه بیان می‌شود، صدق می‌کنند و $t \in I_a = [۰, a]$، $۰ < \upsilon \leq ۱$. اگر $\upsilon = ۱$ آنگاه معادله انتگرال (۱.۱) بدون هر گونه تکینی است و هسته انتگرال یک تابع پیوسته است. برای دسته بندی تکینی‌ها در معادلات انتگرالی، مرجع [۱۵] دیده شود. ابزارهای اصلی برای اثبات وجود جواب برای معادله انتگرالی فوق، اندازه نافشردگی و قضیه نقطه ثابت پترشن [۱۶] است که حالتی کلی‌تر از قضیه نقطه ثابت داربو [۱۷] است. ایده اصلی استفاده از قضیه نقطه ثابت پترشن به‌منظور بررسی وجود جواب برای معادلات انتگرالی ، برای اولین بار در سال ۲۰۱۶، توسط کاظمی و عزتی در [۱۸] آورده شده است که اخیرا نیز، محققین دیگری برای بررسی وجود جواب معادلات انتگرالی از قضیه پترشن استفاده کرده‌اند [۱۹–۲۱] . اما در تمامی کارهای قبلی عموما از قضیه نقطه ثابت داربو استفاده می‌شد به‌طوری‌که تعدادی از محققین تلاش های گسترده‌ای برای وجود جواب دسته‌ای از معادلات انتگرالی بااستفاده از ساختار اندازه نافشردگی و قضیه داربو انجام داده‌اند، به‌عنوان مثال مراجع [۵–۱۴] دیده شود. در اینجا به‌دلایلی که ذکر می‌شود، از قضیه پترشن جای قضیه داربو استفاده شده است. دلایل اصلی و برتری کار انجام شده، به‌شرح زیر است: اولا شرایطی که برای وجود جواب معادله، در قضیه اصلی بیان شده، شرایط ضعیف‌تر و کم‌تری نسبت به شرایطی است که در سایر مقالات آورده شده است. دلیل دوم و مهم‌تر، این است که شرط " شبه خطی" در نتایج (۳.۳) و (۲.۳)، که در اکثر مقالات آورده شده است، نقش مهمی ندارند، چراکه در دل شرط کران‌داری (N۳) از قضیه۱.۳ وجود دارد. به عنوان مثال مراجع [۲۲، ۲۳] که در حالت $\upsilon = ۱$ آورده شده‌اند، دیده شود. مطالب این مقاله به‌شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲ ، مفاهیم و تعاریف اولیه مربوط به اندازه نافشردگی و همچنین قضایای نقطه ثابت مورد نیاز، ارائه شده است. در بخش ۳ یک قضیه وجودی جدید، برای معادله انتگرالی (۱.۱) بیان و اثبات می‌شود. در این بخش همچنین دو نتیجه که از قضیه اصلی حاصل شده است، بیان و اثبات می‌شود. بخش ۴ به مثال‌ها اختصاص داده شده است. در بخش پایانی، نتایج حاصل از این مقاله به‌طور مختصر بیان می‌گردد.

۲ اندازه نافشردگی

در اینجا، فرض می‌کنیم E یک فضای باناخ در میدان $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ باشد. به‌علاوه، فرض کنیم $\bar{B}_r = \{x \in E : \parallel x \parallel \leq r\}$ گوی بسته و $\partial\bar{B}_r = \{x \in E : \parallel x \parallel = r\}$ مرز کره ای به مرکز ۰ و شعاع $r > ۰$ باشد.

تعریف های مختلفی برای اندازه نافشردگی بیان شده است. در ذیل، دو تعریف معروف اندازه نافشردگی که کاربردهای فراوانی دارند، آورده شده است.

تعریف ۱.۲. [۲۴] فرض کنیم M یک زیر مجموعه کران‌دار از فضای E باشد. آنگاه اندازه نافشردگی کاراتفسکی (یا اندازه نافشردگی مجموعه‌ای) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\alpha(M) = \inf\{\varepsilon > ۰$: M به‌وسیله تعداد متناهی ، مجموعه‌های با قطر کم‌تر از ε پوشیده می‌شود $\}$

تعریف ۲.۲. [۲۵] اندازه نافشردگی هاسدروف (یا اندازه نافشردگی گوی‌ها) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\mu(M) = \inf\{\varepsilon > ۰$: یک ε – نت متناهی برای M در E موجود است. $\}$

که در آن ε– نت متناهی یعنی $\{z_۱, z_۲, \dots, z_m\} \subset E$ موجود باشد که گوی‌های $B_\varepsilon(E; z_۱), B_\varepsilon(E; z_۲), \dots, B_\varepsilon(E; z_m)$، مجموعه M را بپوشانند.

اندازه نافشردگی‌های ذکرشده فوق، برای هر زیر مجموعه کران‌دار M در E در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\mu(M) \leq \alpha(M) \leq ۲\mu(M)$$

از لحاظ تاریخی، اندازه نافشردگی تعریف‌شده در تعریف (۱.۲)، یعنی $\alpha(M)$ ، اولین تعریف اندازه نافشردگی است.

قضیه ۳.۲. [۱۶] فرض کنیم E یک فضای باناخ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $M, N \subset E$ دراین‌صورت

(i) $\mu(M \cup N) = \max\{\mu(M), \mu(N)\}$ ؛

(ii) $\mu(M + N) \leq \mu(M) + \mu(N)$ ؛

(iii) $\mu(\lambda M) = \mid \lambda \mid \mu(M)$;

(iv) $\mu(M) \leq \mu(N)$ برای $M \subseteq N$;

(v) $\mu(\bar{co} M) = \mu(M)$;

(vi) $\mu(M) = ۰$ اگر و فقط اگر M دارای بستار فشرده باشد.

در ادامه، تمرکز ما روی فضای باناخ $E = C([۰, a], \mathbb{R})$ یعنی تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[۰, a]$ همراه با نرم استاندارد

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [۰, a]\}$$

است. همچنین، مدول پیوستگی برای تابع $u \in C[۰, a]$ با رابطه زیر تعریف می شود

$$\omega(u, \sigma) = \sup\{|u(x) - u(y)| : |x - y| \leq \sigma\}.$$

در نتیجه با توجه به فرض پیوستگی یکنواخت u روی $[۰, a]$، وقتی $\sigma \to ۰$ آنگاه $\omega(u, \sigma) \to ۰$.

قضیه ۴.۲. [۲۵] فرض کنیم $E = C([۰, a], \mathbb{R})$. دراین‌صورت، تعریف اندازه نافشردگی (۲.۲)، برای هر زیر مجموعه کران‌دار M در E معادل است با

$$\mu(M) = \lim_{\sigma \to ۰} \sup_{u \in M} \omega(u, \sigma) \tag{۱.۲}$$

تعریف ۵.۲. [۲۶] فرض کنیم $T : E \to E$ یک نگاشت پیوسته از فضای باناخ E به توی خودش باشد. دراین‌صورت، T را یک k- انقباض مجموعه‌ای می‌نامند هرگاه به ازای هر $A \subset E$ کران‌دار باشد، $T(A)$ نیز کران‌دار باشد و

$$\mu(TA) \leq k\mu(A), ۰ < k < ۱$$

.

همچنین T را چگال می‌نامند هرگاه به ازای هر $\mu(A) > ۰$ داشته باشیم:

$$\mu(TA) < \mu(A)$$

واضح است که هر k- انقباض، یک تابع چگال است و البته در حالت کلی، عکس این حکم برقرار نیست.

در ادامه، قضیه نقطه ثابت پترشن را بیان می‌کنیم که در بخش بعدی، ابزار اصلی خواهد بود.

قضیه ۶.۲ (قضیه پترشن [۱۶، ۲۷]). فرض کنیم $\bar{B}_r$ یک گوی بسته حول مرکز در فضای باناخ E باشد. اگر $T : \bar{B}_r \to E$ یک نگاشت چگال و پیوسته باشد که در شرط مرزی زیر صدق کند

(P) اگر برای $x \in \partial B_r$ داشته باشیم $T(x) = kx$ آنگاه $k \leq ۱$.

در این‌صورت، مجموعه نقاط ثابت T در $\bar{B}_r$ ناتهی است.

۳ قضیه وجودی

در این بخش تحت شرایط زیر، به بررسی وجود جواب برای معادله (۱.۱) می‌پردازیم.

N۱: فرض کنیم تابع $k : I_a \times I_a \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته، به‌طوری که برای هر $t \in I_a$، $k(t, \cdot, \cdot)$ متعلق به $L^۲(I_a \times \mathbb{R})$ باشد و $x, f \in C(I_a, \mathbb{R})$، $q \in C(I_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$، $g \in C(I_a \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ و همچنین توابع $\alpha, \theta : I_a \to I_a$ پیوسته باشند.

N۲: ثابت های نامنفی c_1, c_2, c_3 و $c_1c_3 < 1$ موجود باشند، به‌طوری که برای هر $t \in I_a, x, \bar{x}.y.\bar{y}, u, \bar{u} \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$|q(t,u,y) - q(t,\bar{u},\bar{y})| \le c_1|u-\bar{u}| + c_2|y-\bar{y}|,$$
$$|g(t,x) - q(t,\bar{x})| \le c_3|x-\bar{x}|.$$

N۳: (شرط مرزی) عدد $r_\circ \ge \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری که در شرط مرزی زیر صدق کند.

$$\sup\{|f(t) + q(t,u,y)| : t \in I_a, -r_\circ \le u \le r_\circ, |y| \le \frac{M_1 t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\} \le r_\circ,$$

که در آن

$$M_1 = \sup\{|k(t,s,x)| : \forall t,s \in I_a, x \in [-r_\circ, r_\circ]\}.$$

قضیه ۱.۳. فرض کنیم شرایط (N_1)، (N_2) و (N_3) برقرار باشند. آنگاه معادله (۱.۱)، حداقل یک جواب $x = x(t)$ متعلق به $B_{r_\circ} \subset C(I_a)$ دارد.

اثبات. برای اثبات ، از قضیه (۶.۲) که ابزار اصلی است، استفاده می‌کنیم. عملگر $T : B_{r_\circ} \to E$ را با رابطه (۱.۱) تعریف می‌کنیم. با توجه به شرایطی که برای k در نظر گرفته شده انتگرال رابطه (۱.۱) موجود است و لذا T خوش تعریف است. حال نشان می‌دهیم که عملگر T در گوی $B_{r_\circ}$ پیوسته است. برای این‌کار فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ و $x, y \in B_{r_\circ}$ به‌طوری‌که $\| x-y \| \le \varepsilon$ آنگاه، برای $t \in I_a$ داریم:

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= |q(t, g(t, x(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds) \\
&- q(t, g(t, y(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,y(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds)| \\
&\le |q(t, g(t, x(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds) \\
&- q(t, g(t, y(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds)| \\
&+ |q(t, g(t, y(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds) \\
&- q(t, g(t, y(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t \frac{k(t,s,y(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds)| \\
&\le c_1|g(t, x(\alpha(t))) - g(t, y(\alpha(t)))| \\
&+ \frac{c_2}{\Gamma(\upsilon)}\int_\circ^t |\frac{k(t,s,x(\theta(s))) - k(t,s,y(\theta(s)))}{(t-s)^{1-\upsilon}}|ds \\
&\le c_1c_3|x(\alpha(t)) - y(\alpha(t))| + \frac{c_2 t^\upsilon}{\Gamma(1+\upsilon)}\omega(k,\varepsilon).
\end{aligned}$$

با سوپریمم گرفتن از نامساوی اخیر داریم:

$$\sup_{t\in I_a}|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \le c_1c_3||x-y|| + \frac{c_2 t^\upsilon}{\Gamma(1+\upsilon)}\omega(k,\varepsilon).$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$||Tx - Ty|| \le c_1c_3\varepsilon + \frac{c_2 a^\upsilon}{\Gamma(1+\upsilon)}\omega(k,\varepsilon).$$

که برای $\varepsilon > \circ$ تعریف می‌کنیم:

$$\omega(k,\varepsilon) = \sup\{|k(t,s,x) - k(t,s,y)| : t,s \in I_a, x,y \in [-r_\circ, r_\circ], \|x-y\| \le \varepsilon\}.$$

از طرفی چون تابع $k=k(t,s,x)$ روی زیر بازه فشرده $[۰,a]\times[۰,a]\times[-r_{۰},r_{۰}]$ پیوسته یکنواخت است پس وقتی $\varepsilon\to ۰$ خواهیم داشت $\omega(k,\varepsilon)\to ۰$. لذا، نامساوی اخیر نشان می‌دهد که عملگر T در $B_{r_{۰}}$ پیوسته است. حال نشان می‌دهیم که عملگر T در شرط چگال بودن، نسبت به اندازه μ تعریف شده، در رابطه (۱.۲) صدق می‌کند. برای این منظور، یک ثابت دلخواه $\varepsilon>۰$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $x\in M$ و M زیر مجموعه کرانداری از E باشد و همچنین $t_{۱},t_{۲}\in I_a$. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که $t_{۱}\le t_{۲}$ و $t_{۲}-t_{۱}\le\varepsilon$. دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t_{۲})-(Tx)(t_{۱})| &\le |f(t_{۲})-f(t_{۱})|\\
&+ |q(t_{۲},g(t_{۲},x(\alpha(t_{۲}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۲}}\frac{k(t_{۲},s,x(\theta(s))}{(t_{۲}-s)^{۱-v}}ds)\\
&- q(t_{۱},g(t_{۱},x(\alpha(t_{۱}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds)|\\
&\le \omega(f,\varepsilon)\\
&+ |q(t_{۲},g(t_{۲},x(\alpha(t_{۲}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۲}}\frac{k(t_{۲},s,x(\theta(s))}{(t_{۲}-s)^{۱-v}}ds)\\
&- q(t_{۲},g(t_{۲},x(\alpha(t_{۲}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds|\\
&+ |q(t_{۲},g(t_{۲},x(\alpha(t_{۲}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds)\\
&- q(t_{۲},g(t_{۱},x(\alpha(t_{۱}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds|\\
&+ |q(t_{۲},g(t_{۱},x(\alpha(t_{۱}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds)\\
&- q(t_{۱},g(t_{۱},x(\alpha(t_{۱}))),\frac{۱}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}ds)|\\
&\le \frac{c_{۲}}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\left|\frac{k(t_{۲},s,x(\theta(s))-k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۲}-s)^{۱-v}}\right|ds\\
&+ \frac{c_{۲}}{\Gamma(v)}\int_{۰}^{t_{۱}}\left|\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۲}-s)^{۱-v}}-\frac{k(t_{۱},s,x(\theta(s))}{(t_{۱}-s)^{۱-v}}\right|ds\\
&+ \frac{c_{۲}}{\Gamma(v)}\int_{t_{۱}}^{t_{۲}}\left|\frac{k(t_{۲},s,x(\theta(s))}{(t_{۲}-s)^{۱-v}}\right|ds\\
&+ c_{۱}|g(t_{۲},x(\alpha(t_{۲}))-g(t_{۱},x(\alpha(t_{۱}))|+\omega_{q_{۱}}(I_a,\varepsilon).
\end{aligned}$$

برای سادگی، از نمادهای تعریف شده زیر استفاده می‌کنیم.

$$\omega(f,\varepsilon)=\sup\{|f(t)-f(\bar{t})|:|t-\bar{t}|\le\varepsilon,t,\bar{t}\in I_a\},$$
$$\omega_{k_{۱}}(I_a,\varepsilon)=\sup\{|k(t,s,x)-k(\bar{t},s,x)|:|t-\bar{t}|\le\varepsilon,t,s\in I_a,\ x\in[-r_{۰},r_{۰}]\},$$
$$\omega_{q_{۱}}(I_a,\varepsilon)=\sup\{q(t,u,y)-q(\bar{t},u,y)|:|t-\bar{t}|\le\varepsilon,t,s\in I_a,\ u\in[-r_{۰},r_{۰}],|y|\le\frac{M_{۱}t^{v}}{\Gamma(۱+v)}\}$$

با استفاده از رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)-(Ty)(t)| \le \frac{c_{۲}\omega_{k_{۱}}(I_a,\varepsilon)}{\Gamma(۱+v)}\{t_{۲}^{v}-(t_{۲}-t_{۱})^{v}\}+\frac{c_{۲}M_{۱}}{\Gamma(۱+v)}\{t_{۱}^{v}-t_{۲}^{v}+(t_{۲}-t_{۱})^{v}\}\\
+\frac{c_{۲}M_{۱}}{\Gamma(۱+v)}(t_{۲}-t_{۱})^{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ cc_1|x(\alpha(t_2)) - x(\alpha(t_1))| + \omega_{q_1}(I_a, \varepsilon)\\
&\leq \frac{c_2\omega_{k_1}(I_a,\varepsilon)}{\Gamma(1+\upsilon)}t_1^{\upsilon} + \frac{c_2 M_1}{\Gamma(1+\upsilon)}2(t_2-t_1)^{\upsilon} + \frac{c_2 M_1}{\Gamma(1+\upsilon)}(t_2-t_1)^{\upsilon}\\
&+ c_1c_3|x(\alpha(t_2)) - x(\alpha(t_1))| + \omega_{q_1}(I_a, \varepsilon),\\
&\leq \frac{c_2\omega_{k_1}(I_a,\varepsilon)}{\Gamma(1+\upsilon)}a^{\upsilon} + \frac{c_2 M_1}{\Gamma(1+\upsilon)}3(\varepsilon)^{\upsilon}\\
&c_1c_3|x(\alpha(t_2)) - x(\alpha(t_1))| + \omega_{q_1}(I_a, \varepsilon),
\end{aligned}$$

یا

$$\omega(Tx,\varepsilon) \leq c_1c_3\omega(x,\omega(\alpha,\varepsilon)) + \frac{c_2\omega_{k_1}(I_a,\varepsilon)}{\Gamma(1+\upsilon)}a^{\upsilon} + \frac{c_2 M_1}{\Gamma(1+\upsilon)}3(\varepsilon)^{\upsilon} + \omega_{q_1}(I_a,\varepsilon), \qquad x \in M.$$

با توجه به این واقعیت که توابع k و f روی زیر مجموعه‌های فشرده $[-r_0, r_0] \times [0,a] \times [0,a]$ و $[0,a]$ پیوسته یکنواخت‌اند، وقتی $\varepsilon \to 0$، آنگاه داریم $\omega_{k_1}(I_a,\varepsilon) \to 0$ و $\omega_{q_1}(I_a,\varepsilon)$. در نتیجه:

$$\omega(Tx,\varepsilon) \leq c_1c_3\omega(x,\varepsilon).$$

بنابر این با سوپریمم گرفتن روی M و رابطه (۱.۲) وقتی $\varepsilon \to 0$، خواهیم داشت:

$$\mu(TM) \leq c_1c_3\mu(M)$$

یعنی T یک نگاشت چگال است. حال شرط (P) را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $x \in \partial\bar{B}_{r_0}$ ، دراین‌صورت اگر $Tx = kx$ آنگاه خواهیم داشت: $\|Tx\| = k\|x\| = kr_0$ با استفاده از شرط (N۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$|Tx(t)| = |f(t) + q\big(t, g(t,x(\alpha(t))), \frac{1}{T(\upsilon)}\int_0^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-\upsilon}}ds\big)| \leq r_0,$$

که در آن $t \in I_a$. لذا $\|Tx\| \leq r_0$. این نشان می‌دهد که $k \leq 1$ و اثبات تمام است.

□

نتیجه زیر، در حالت خاص $\upsilon = a = 1$ و $\theta(s) = s$ ، قضیه اصلی در مرجع [۲۳] است که از قضیه اصلی (۱.۳) آن را به راحتی می‌توان به‌دست آورد.

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم

P۱: $g \in C(I_a \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), k \in C(I_a \times I_a \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ و ثابت‌های نامنفی k_1 و b_1 موجود باشند، به‌طوری که

$$\begin{gathered}
|g(t,x) - g(t,\bar{x})| \leq k_1|x - \bar{x}|,\\
|g(t,0)| \leq b_1
\end{gathered}$$

P۲: (شرط شبه خطی) فرض کنیم $k(t,s,x) \in C([0,a]\times[0,a]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ و اعداد نامنفی c_1, c_2 وجود داشته باشند، به‌طوری که

$$|k(t,s,x)| \leq c_1 + c_2|x| \quad \forall t,s \in [0,a], \quad x \in \mathbb{R}.$$

P۳: $(\alpha-\beta)^2 > 2(\alpha+\beta) - 1$ که در آن $\alpha = \frac{k_1c_1a^{\upsilon}}{\Gamma(1+\upsilon)}, \beta = \frac{b_1c_2a^{\upsilon}}{\Gamma(1+\upsilon)}$

P۴: $kk' < 1$ که در آن

$$k' = \sup\{|k(t,s,x)| : \forall t,s \in I_a, x \in [-r_0, r_0]\}.$$

آنگاه معادله

$$x(t) = g(t, x(\beta(t))) \int_{\circ}^{t} \frac{\text{۱}}{\Gamma(\upsilon)} \frac{k(t, s, x(\theta(s)))}{(t-s)^{\text{۱}-\upsilon}} ds, \qquad t \in I_a$$

حداقل یک جواب در فضای باناخ $E = C(I_a)$ دارد.

اثبات. قرار می‌دهیم

$$f(t) + q(t, u, y) = uy$$

که در آن

$$u = g(t, x(\alpha(t))), y = \frac{\text{۱}}{\Gamma(\upsilon)} \int_{\circ}^{t} \frac{k(t, s, x(\theta(s)))}{(t-s)^{\text{۱}-\upsilon}} ds$$

واضح است که $(N\text{۲})$ از $(P\text{۱})$ نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم که $(N\text{۳})$ نیز برقرار است. فرض کنیم $\|x\| \leq r_\circ, r_\circ > \circ$، قرار می‌دهیم $M_\text{۱} = k' = c_\text{۱} + c_\text{۲} r_\circ$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |\frac{g(t, x(\alpha(t)))}{\Gamma(\upsilon)} \int_{\circ}^{t} \frac{k(t, s, x(\theta(s)))}{(t-s)^{\text{۱}-\upsilon}} ds| \\ &\leq (|g(t, x(\alpha(t))) - g(t, \circ)| + |g(t, \circ)|)|\frac{\text{۱}}{\Gamma(\upsilon)} \int_{\circ}^{t} \frac{k(t, s, x(\theta(s)))}{(t-s)^{\text{۱}-\upsilon}} ds| \\ &\leq (k_\text{۱} \|x(\alpha(t))\| + b_\text{۱}) \left(\frac{t^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)} (c_\text{۱} + c_\text{۲} \|x\|) \right) \\ &\leq k_\text{۱} c_\text{۲} \|x\|^\text{۲} + (\frac{a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)})(k_\text{۱} c_\text{۱} + b_\text{۱} c_\text{۲}) \|x\| + \frac{b_\text{۱} c_\text{۱} a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)} \end{aligned}$$

در این‌صورت با توجه به شرط $(P\text{۴})$ عدد $r_\circ \geq \circ$ وجود دارد که در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$k_\text{۱} c_\text{۲} \|x\|^\text{۲} + (\frac{k_\text{۱} c_\text{۱} a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)} + \frac{b_\text{۱} c_\text{۲} a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)}) \|x\| + \frac{b_\text{۱} c_\text{۱} a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)} \leq r_\circ$$

□

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم

M۱: $g \in C(I_a \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), q \in C(I_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), k \in C(I_a \times I_a \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ و ثابت های نامنفی $k_\text{۱}, k_\text{۲}$ و $k_\text{۳}$ موجود باشند، به‌طوری که

$$\begin{aligned} &|q(t, u, y) - q(t, \bar{u}, \bar{y})| \leq k_\text{۱} |u - \bar{u}| + k_\text{۲} |y - \bar{y}| \\ &|g(t, x) - g(t, \bar{x})| \leq k_\text{۳} |x - \bar{x}| \end{aligned}$$

M۲: ثابت های نامنفی $b_\text{۱}$ و $b_\text{۲}$ وجود داشته باشند، به‌طوری که

$$\begin{aligned} |g(t, \circ)| &\leq b_\text{۱} \\ |q(t, \circ, \circ)| &\leq b_\text{۲} \end{aligned}$$

M۳: (شرط شبه خطی) فرض کنیم $k(t, s, x) \in C([\circ, a] \times [\circ, a] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ و اعداد نامنفی $c_\text{۱}, c_\text{۲}$ وجود داشته باشند، به‌طوری که $|k(t, s, x)| \leq c_\text{۱} + c_\text{۲} |x| \quad \forall t, s \in [\circ, a], \quad x \in \mathbb{R}$

M۴: $k_\text{۱} k_\text{۳} + \frac{k_\text{۲} c_\text{۲} a^\upsilon}{\Gamma(\text{۱}+\upsilon)} < \text{۱}$

آنگاه معادله

$$x(t) = q\left(t, g(t, x(\beta(t))), \frac{\text{۱}}{\Gamma(\upsilon)} \int_{\circ}^{t} \frac{k(t, s, x(\theta(s)))}{(t-s)^{\text{۱}-\upsilon}} ds \right), \qquad t \in I_a$$

حداقل یک جواب در فضای باناخ $E = C(I_a)$ دارد.

اثبات. قرار می‌دهیم $r_0 = \frac{L_2}{1-L_1}$ که در آن

$$L_1 = k_1 k_3 + \frac{k_2 c_2 a^v}{\Gamma(1+v)}, \quad L_2 = k_1 b_1 + b_2 + \frac{k_2 c_1 a^v}{\Gamma(1+v)},$$

و

$$f(t) + q(t,u,y) = q(t,u,y)$$

با

$$u = g(t, x(\alpha(t))), \quad y = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-v}} ds$$

از (M۴) داریم $L_1 < 1$. بنابراین r_0 یک عدد حقیقی مثبت است. به‌علاوه به‌آسانی می‌توان نشان داد که $(N2)$ از (M۱) و (M۲) نتیجه می‌شود. اکنون نشان می‌دهیم که $(N3)$ نیز برقرار است. قرار می‌دهیم $M_1 = c_1 + c_2|x|$. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |q(t, g(t, x(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-v}} ds)| \\
&\le |q\left(t, g(t, x(\alpha(t))), \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-v}} ds\right) - q(t,0,0)| \\
&+ |q(t,0,0)| \\
&\le k_1|g(t, x(\alpha(t))) - g(t,0)| + k_1|g(t,0)| + k_2|\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t \frac{k(t,s,x(\theta(s))}{(t-s)^{1-v}} ds| + b_2 \\
&\le k_1 k_3 |x| + k_1 b_1 + b_2 + k_2 \frac{k_2 t^v}{\Gamma(1+v)} (c_1 + c_2|x|) \\
&\le (k_1 k_3 + \frac{k_2 c_2 a^v}{\Gamma(1+v)})|x| + k_1 b_1 + b_2 + \frac{k_2 c_1 a^v}{\Gamma(1+v)}
\end{aligned}$$

برای هر $t \in I_a$، در نتیجه داریم

$$\sup_{t \in I_a} |q(t,u,v,w)| \le L_1 r_0 + L_2 = L_1 \frac{L_2}{1-L_1} + L_2 = r_0.$$

حال نتیجه مطلوب، از قضیه (۱.۳) به‌دست می‌آید. □

۴ مثال ها

مثال ۱.۴. معادله انتگرالی کسری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{t^2}{4+4t^2} \ln(1 + |x(t^3)|) \\
&+ \frac{1}{(2 + |\cos(t)|)\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^t \frac{e^{-3t^2}(e^t + t\sin(s+1) + \frac{1}{4}(x(\sqrt{s})))}{(t-s)^{\frac{2}{3}}} ds, \qquad t \in [0,1] \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

واضح است که با توجه به معادله (۱.۴) و مقایسه آن با (۱.۱) داریم:
$q : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha, \theta : [0,1] \to [0,1]$ و $k : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ همچنین:

$$v = \frac{1}{3}, \alpha(t) = t^3, \theta(t) = \sqrt{t}, \qquad \forall \qquad t \in [0,1],$$

و

$$f(t)=\frac{1}{8}e^{-t},\quad u=\frac{t^{2}}{4+4t^{2}}\ln(1+|x(t^{3})|),\quad y=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\int_{0}^{t}\frac{k(t,s,x(\theta(s)))}{(t-s)^{\frac{2}{3}}}ds,$$
$$k(t,s,x)=\frac{e^{-3t^{2}}(e^{t}+t\sin(s+1)+\frac{1}{4}x)}{2+|\cos(t)|}$$

اکنون، وجود جواب برای معادله فوق را در $C[0,1]$ بررسی می‌کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که توابع فوق در فرض داده شده (N۱) و (N۲) صدق می‌کنند. حال نشان می‌دهیم که (N۳) نیز برقرار است. فرض کنیم $\|x\|\le r_0, r_0>0$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$|x(t)|=|\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{t^{2}}{4+4t^{2}}\ln(1+|x(t^{3})|)$$
$$+\frac{1}{(2+|\cos(t)|)\Gamma(\frac{1}{3})}\int_{0}^{t}\frac{e^{-3t^{2}}(e^{t}+t\sin(s+1)+\frac{1}{4}(x(\sqrt{s})))}{(t-s)^{\frac{2}{3}}}ds|\le r_0,$$

برای هر $t\in I_a$. در این صورت (N۳) برقرار است اگر

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}r_0+\frac{1}{2\Gamma(\frac{4}{3})}(e+1+\frac{1}{4}r_0)\le r_0.$$

این نشان می‌دهد که $r_0=3/6179$. بنابر این با توجه به قضیه (۱.۳) معادله (۱.۴) حداقل یک جواب در دارد.

مثال ۲.۴. معادله انتگرالی

$$x(t)=1+x(t)\int_{0}^{t}\frac{t}{t+s}\phi(s)x(s)ds, t\in[0,a] \tag{۲.۴}$$

حالت خاصی از معادله (۱.۱) است با $f(t)+q(t,u,y)=1+uy$ که در آن

$$v=1,\alpha(t)=\theta(t)=t,u=g(t,x(\alpha(t)))=x(t),k(t,s,x)=\frac{t}{t+s}\phi(s)x.$$

از طرفی اگر در معادله فوق قرار دهیم $\phi(s)=\frac{s^{2}}{4}$، آنگاه خواهیم داشت:

$$x(t)=1+x(t)\int_{0}^{t}\frac{ts^{2}}{t+s}x(s)ds, t\in[0,a] \tag{۳.۴}$$

شرایط $(N1)$ و $(N2)$ به‌وضوح برقرار است. برای بررسی شرط $(N3)$ داریم:

$$\frac{r_0^{2}}{4}+1\le r_0$$

در نتیجه، $r_0=2$ جوابی از نامساوی فوق است. بنابراین تمام شرایط قضیه (۱.۳) برای $r_0=2$ و $|k(t,s,x)|<\frac{1}{2}$ برقرار است. پس معادله (۳.۴) حداقل یک جواب دارد.

معادله (۲.۴) به معادله انتگرالی کوادراتیک نوع چان دراسخار معروف است [۲۸–۳۰]که کاربردهای فراوانی در نظریه انتقال اشعه، حرکت نوترون و انرژی جنبشی گازها دارد [۳۱، ۳۲].

مثال ۳.۴. اگر $q(t,u,y)=y$ و $\theta(s)=s$، آنگاه معادله (۱.۱) به معادله انتگرالی آبل نوع دوم

$$x(t)=f(t)+\frac{1}{\Gamma(v)}\int_{0}^{t}\frac{k(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-v}}ds, \tag{۴.۴}$$

تبدیل می‌شود

مثال ۴.۴. اگر $q(t,u,y)=y$، $k(t,s,x)=g(t)k_1(s,x)$ و $\theta(s)=s$، آنگاه معادله (۱.۱) به معادله انتگرالی

$$x(t)=f(t)+\frac{g(t)}{\Gamma(v)}\int_{0}^{t}\frac{k_1(s,x(s))}{(t-s)^{1-v}}ds, \tag{۵.۴}$$

تبدیل می‌شود.

بعضی از مسائل در نظریه صف و بیولوژی بعد از مدل سازی ریاضی، به فرم معادله انتگرالی غیرخطی (۵.۴) منجر می‌شوند [۳۳] .

۵ نتیجه گیری

با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت پترشن در بخش ۳، یک روش جدید، برای اثبات وجود جواب برای دسته‌ای از معادلات انتگرالی کسری غیرخطی ارائه گردید. برتری قضیه نقطه ثابت پترشن نسبت به سایر قضایای نقطه ثابت (قضیه نقطه ثابت شاودر و داربو) در کاربرد این قضیه است، که نیازی به محدب بودن و بررسی این‌که نگاشت ، گوی‌ها را به خودش ببرد نیست. همچنین شرط مرزی (P)، راجع به مقادیر ویژه عملگر غیرخطی بحث می‌کند (برای تعاریف و قضایای مربوطه به [۳۴–۳۶] رجوع شود)، که امیدواریم در آینده، این موضوع موجب تحقیقاتی بیشتری در این زمینه گردد.

فهرست منابع

[1] Samko S.G., A.A. Kilbas and Marichev O.I. , *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science*, Yverdon, Switzerland, 1993.

[2] Saxena R.K. and Kalla S.L. , *On a fractional generalization of free electron laser equation*, Appl. Math. Comput., 143 (2003), 89-97.

[3] Abbas S. , Benchohra M. and Henderson J., *On global asymptotic stability of solutions of nonlinear quadratic Volterra integral equations of fractional order*, Commun. Appl. Nonlinear Anal., 19 (2012), 79-89.

[4] Mishra L. N. , Sen M. and Mohapatra R. N. , *On existence theorems for some generalized nonlinear functional-integral equations with applications*, Filomat, 31(7)(2017), 2081-2091.

[5] Das A. ,Hazarika B. and Kumam P. , *Some new generalization of Darbo's fixed point theorem and its applications on integral equations*, Mathematics, 7(3) (2019), 214.

[6] Deep A. , Deepmala, Roshan J. R., Nisar K. S. and Abdeljawad T. , *An extension of Darbo's fixed point theorem for a class of system of nonlinear integral equations*, Adv. Differ. Equ., 483, (2020), 1-17.

[7] Rabbani M. , Das A. , Hazarika B. and Arab R. , *Existence of solution for two dimensional non-linear fractional integral equation by measure of noncompactness and iterative algorithm to solve it*, J. Comput. App. Math. 370, 112654, (2020), 1-17.

[8] Rabbani M. and Deep A. , *On some generalized non-linear functional integral equations of two variables via measures of noncompactness and numerical method to solve it*, Math. Sci. (2021), 1-8.

[9] Mishra L. N. and Sen M., *On the concept of existence and local attractivity of solutions for some quadratic Volterra integral equation of fractional order*, Appl. Math. Comput., 285(2016), 174-183.

[10] Banas J. and ORegan D. , *On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order*, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008), 573-582.

[11] Aghajani A. , Banaś J. and Jalilian Y. , *Existence of solutions for a class of nonlinear Volterra singular integral equations*, Comput. Math. Appl., 62(3) (2011), 1215-1227.

[12] Darwish M. A. , *On quadratic integral equation of fractional orders*, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 112-119.

[13] Banas J. , Rzepka E., *Monotonic solutions of a quadratic integral equation of fractional order*, J. Math. Anal. Appl. 322 (2007), 1371-1379.

[14] Banas J. , Zajac T., *A new approach to the theory of functional integral equations of fractional order*, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), 375-387.

[15] Derakhshan M. , Jahanshahi M. and Kazemi Demneh H., *Investigation the boundary and initial value problems including fractional integro-differential equations with singular kernels*, Journal of Advanced Mathematical Modeling, 11(1), (2021), 97-108.

[16] Petryshyn W. V., *Structure of the fixed points sets of k-set-contractions*, Arch. Rational Mech. Anal. 40 (1970/1971), 312-328.

[17] Banaś J. , Goebel K., *Measures of noncompactness in Banach spaces*, volume 60 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.

[18] Kazemi M. and Ezzati R., *Existence of solution for some nonlinear two-dimensional volterra integral equations via measures of noncompactness*, Appl. Math. Comput., 275 (2016), 165-171.

[19] Kazemi M. and Ezzati R., *Existence of solutions for some nonlinear Volterra integral equations via Petryshyn's fixed point theorem*, Int. J. Anal. Appl. 9(2018), 1-12.

[20] Rabbani M. and Deep A., *On some generalized non-linear functional integral equations of two variables via measures of noncompactness and numerical method to solve it*, Math. Sci. (2021), 1-8.

[21] Ramezani M., Baghani H., Ege O. and De la Sen M., *A New Version of Schauder and Petryshyn Type Fixed Point Theorems in S-Modular Function Spaces*, Symmetry 12(1) (2020), 15.

[22] Maleknejad K. , Nouri K. , and Mollapourasl R. , *Existence of solutions for some nonlinear integral equations*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14(6) (2009), 2559-2564.

[23] Maleknejad K. , Nouri K. , and Mollapourasl R. , *Investigation on the existence of solutions for some nonlinear functional-integral equations*, Non. Anal. 71 (2009), 1575-1578 .

[24] Kuratowski K. , *Sur les espaces completes*. Fund. Math. 15 (1934), 301-335.

[25] Goldenstein L. S. and Markus A. S., *On the measure of non-compactness of bounded sets and of linear operators*, In Studies in Algebra and Math. Anal. (Russian), pages 45–54. Izdat. "Karta Moldovenjaske", Kishinev, 1965.

[26] Nussbaum R. D. , *The fixed-point index and fixed point theorem for k-set contractions*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1969. Thesis (Ph.D.)–The University of Chicago.

[27] Singh S. , Watson B. , and Srivastava P. , *Fixed point theory and best approximation: the KKM-map principle*, volume 424 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[28] Chandrasekhar S. , *Radiative Transfer*, Oxford Univ. Press, London, 1950.

[29] Argyros I. K., *Quadratic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations*, Boll. Austral. Math. Soc. 32 (1985) 275- 292.

[30] Bana´s J. , Lecko M. and El-Sayed W. G., *Existence theorems of some quadratic integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 222 (1998) 276-285.

[31] Hu S. , Khavani M. and Zhuang W. , *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, Appl. Anal. 34 (1989) 261-266.

[32] Kelley C. T. , *Approximation of solutions of some quadratic integral equations in transport theory*, J. Integr. Equ., 4(1982), 221-237.

[33] Deimling K. , *Nonlinear Functional Analysis*, Springer- Verlag, Berlin, 1985.

[34] Appell J. , De Pascale E. and Vignoli A. , *Nonlinear spectral theory*, de Gruyter, 2008.

[35] Chiappinelli R., *An application of Ekeland's variational principle to the spectrum of non-linear homogeneous gradient operators*, J. Math. Anal. Appl., 340(1)(2008), 511–520.

[36] Giorgieri E. , Appell J. and Väth M., *Nonlinear spectral theory for homogeneous operators*, Nonlinear Funct. Anal. Appl., 7(4)(2002), 589–618.

On the existence of solutions for fractional integral equations by measure of non-compactness in Banach space

Manochehr Kazemi †

Department of Mathematics, Ashtian Branch, Islamic Azad University, Ashtian, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2021/5/31 Accepted: 2021/10/31

Abstract: In this paper, the existence of the solutions of a class of fractional integral equations in Banach algebra, are investigated. The main tools here are the technique of the measure of non-compactness and the Petryshyn's fixed point theorem. Also, for applicability of the obtained results, some examples are given.

Keywords: Nonlinear fractional integral equations, Existence of solution, Measures of noncompactness, Petryshyn's fixed point theorem.

†Corresponding author.
E-mail addresses: m.kazemi@aiau.ac.ir (M. Kazemi).