مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۷۲۷–۷۳۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.36876.1905

یک رده از متغیرهای تصادفی وابسته: ویژگی‌ها و برخی کاربردها

حمید رضا نیلی ثانی * **، مهدی جعفری**

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

دبیر مسئول: غلامعلی پرهام

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۴ تاریخ پذیرش:۱۴۰۰/۱۰/۶

چکیده: در این مقاله نخست یک رده از متغیرهای تصادفی وابسته، $APND$، که شامل رده‌های بزرگی از متغیرهای تصادفی وابسته منفی و برخی رده‌ها از متغیرهای تصادفی وابسته مثبت هستند، معرفی می‌شوند. سپس ارتباط این رده از متغیرها با برخی رده‌های شناخته شده از متغیرهای وابسته تشریح و تعدادی از روابط اساسی شامل نامساوی‌های گشتاوری و ماکسیمال برای رده $APND$ یا زیر رده های آن اثبات می‌شوند. در پایان رفتار حدی آرایه‌ای اختیاری از متغیرهای تصادفی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: متغیرهای تصادفی وابسته منفی، متغیرهای تصادفی $APND$، نامساوی ماکسیمال.

رده‌بندی ریاضی: 60F05, 60F15

۱ مقدمه و پیش نیازها

مفاهیم وابستگی مثبت و منفی بین متغیرهای تصادفی اولین بار توسط [۷] و به دنبال آن توسط [۸] معرفی و مورد بررسی قرار گرفتند. از آن زمان مدت زیادی نمی گذرد. سازگاری تعاریف و دیدگاه های آنان در مدل سازی پدیده های طبیعی موجب گردید که نگاه های بسیاری از محققین به نتایج آنان معطوف و تحقیقات زیادی در این زمینه پایه گذاری گردد (به عنوان نمونه [۱۶] و [۶]). خاصیت خنثی سازی بین متغیرهای تصادفی وابسته منفی موجب گردید که اینگونه متغیرها بیشتر مورد توجه قرار گرفته و تحقیقات در این زمینه با سرعت بیشتری انجام پذیرد ([۲] ، [۱]). هر چند به نظر می رسد مطالعه چنین متغیرهای اسانتر باشد، اما در دنیایی واقعی پدیده های وابسته منفی کمتر مشاهده می شوند. [۱۲] با هدف گسترش متغیرهای تصادفی وابسته منفی، رده متغیرهای تصادفی وابسته $APND$، که شامل متغیرهای تصادفی وابسته منفی و برخی از رده های متغیرهای تصادفی وابسته مثبت می باشد، را معرفی و برخی از رفتارهای حدی این متغیرها را مورد بررسی قرار دادند. در بخش ۲.۱ چند ویژگی دیگر از این متغیرها معرفی می گردند.
در سرتاسر مقاله، (Ω, F, P) و $\{X_n, n \geq ۱\}$ به ترتیب نشان دهنده فضای احتمال و یک دنباله از متغیرهای تصادفی برروی فضای احتمال یکسان خواهد بود. نخست با اعمال پاره‌ای اصلاحات جزئی، تعریف متغیرهای تصادفی $APND$ یادآوری و با ارایه چند مثال تعدادی از ویژگی‌های چنین رده‌ای از متغیرها تصادفی تشریح می‌شوند. در بخش دوم برخی از ویژگی‌های اساسی و نامساوی‌های مرتبط بیان و اثبات خواهند شد. در پایان یک قضیه در خصوص رفتار حدی مجموع وزنی آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی اختیاری چزارو کراندار تصادفی ثابت می‌شود.

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: hnilisani@birjand.ac.ir

تعریف ۱.۱. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ را به طور مجانبی دوبدو از بالا هم راستا وابسته منفی ($APNUOD$) با پارامتر $q_۱$، ($q_۱(n) = o(n^{-\alpha}), \alpha > ۰$) نامیم اگر برای هر زوج از متغیرهای تصادفی X_i و X_j، $i, j \geq ۱$،

$$P(X_i > x_i, X_j > x_j) \leq (۱ + q_۱(|i-j|))P(X_i > x_i)P(X_j > x_j). \tag{۱.۱}$$

با تغییر جهت نامساوی های دو طرف نابرابری (۱.۱) و تعویض $q_۱$ با پارامتر $q_۲$، تعریف دنباله متغیرهای تصادفی به طور مجانبی دوبدو از پایین همراستا وابسته منفی ($APNLOD$) حاصل می شود. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ را به طور مجانبی دوبدو هم راستا وابسته منفی ($APNOD$)، یا به اختصار $APND$، نامیم اگر هم $APNLOD$ و هم $APNUOD$ باشد.

تعریف ۲.۱. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ را به طور ضعیف وابسته (WD) نامیم اگر برای هر زیر دنباله $X_۱, ..., X_n$ مقادیر $a(n) \leq ۱$ و $b(n) \geq ۱$ موجود باشند به قسمی که تابع چگالی احتمال(یا تابع احتمال) توام و حاشیه‌ای آنها در شرط زیر صدق کند:

$$a(n)\prod_{i=۱}^{n} f_i(x_i) \leq f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \leq b(n)\prod_{i=۱}^{n} f_i(x_i). \tag{۲.۱}$$

اگر $a(n) = ۰$ متغیرهای $X_۱, ..., X_n$ به طور ضعیف وابسته منفی (WND) نامیده می‌شود که توسط [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

تعریف ۳.۱. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ را به طور مجانبی ضعیف وابسته (AWD) با پارامترهای $\{q(n), n \geq ۱\}$ و $\{\alpha(n), n \geq ۱\}$ ($q(n) \sim ۱$، $\alpha(n) \sim ۱$، $\alpha(n) \leq ۱$ و $q(n) \geq ۱$) نامیم اگر برای هر زیر دنباله متناهی $X_۱, ..., X_n$، هر $۱ \leq i \neq j \leq n$ و برای تمام $x_i, x_j \in R$

$$\alpha(|i-j|)f_i(x_i)f_j(x_j) \leq f_{i,j}(x_i, x_j) \leq (q(|i-j|))f_i(x_i)f_j(x_j). \tag{۳.۱}$$

در مدل سازی پدیده ها، درک مفاهیم و تجزیه و تحلیل وابستگی ضروری است. این تجزیه و تحلیل شامل تعیین نوع و دامنه وابستگی است که مدل می تواند اختیار کند. یک ابزار مهم برای تعیین نوع و تحلیل وابستگی ها، تابع مفصل است. مفصل یک تابع چند متغیره است که ارتباط بین تابع توزیع توام(چند متغیره) و توابع توزیع حاشیه ای(یک متغیره) آنها را مشخص می کند. پس از مرور تعریف مفصل، به نمونه های از مفصل های اشاره خواهد شد که می توان آنها را بر حسب ساختارهای وابستگی معرفی شده در این مقاله، نیز نمایش داد.

تعریف ۴.۱. برای هر $n \geq ۲$، تابع $C : \mathbf{I^n} \longrightarrow \mathbf{I}$ را یک مفصل n بعدی نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف: به طور مختصاتی نانزولی است.

ب: برای هر $\mathbf{u} \in \mathbf{I^n}$ که حداقل یکی از مولفه های آن برابر صفر باشد، $C(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

ج: برای تمام $i = ۱, ۲, ..., n,\ u_i \in \mathbf{I}$

$$C(۱, ..., ۱, u_i, ۱, ..., ۱) = u_i.$$

د: C , n افزایشی است، یعنی برای هر $a = (a_۱, ..., a_n), b = (b_۱, ..., b_n) \in \mathbf{I^n}$ که $i = ۱, ..., n, a_i \leq b_i$ داریم

$$\sum_{j_۱=۱}^{۲} \cdots \sum_{j_n=۱}^{۲} (-۱)^{j_۱+\ldots+j_n} C(u_{۱j_۱}, ..., u_{nj_n}) \geq ۰$$

که برای هر $u_{i۱} = a_i, u_{i۲} = b_i\ , i = ۱, ..., n$.

در قضیه زیر که توسط اسکلار (۱۹۵۹) بیان و اثبات شده است، ارتباط بین تابع مفصل، تابع توزیع و توابع توزیع حاشیه ای نشان داده می شود.

قضیه ۵.۱. فرض کنید F تابع توزیع توام n بعدی با توابع توزیع حاشیه ای $F_۱, ..., F_n$ باشد. مفصل n بعدی C وجود دارد به قسمی که برای هر $(x_۱, x_۲, ..., x_n) = \mathbf{x} \in \bar{\mathbf{R}}^\mathbf{n}$،

$$F(x_۱, x_۲, ..., x_n) = C(F_۱(x_۱), F_۲(x_۲), ..., F_n(x_n)). \tag{۴.۱}$$

اگر $F_۱, ...F_n$ پیوسته باشند، C منحصر بفرد خواهد بود، در غیر این صورت C برروی $RanF_۱ \times RanF_۲ \times ... \times RanF_n$ به طور منحصر بفرد تعیین می شود. بالعکس اگر C یک مفصل n بعدی و $F_۱, ...F_n$ توابع توزیع باشند، پس تابع F که به وسیله (۱.۴) تعریف می شود یک تابع توزیع n بعدی با توابع توزیع حاشیه ای $F_۱, ...F_n$ خواهد بود.

در صورتی که C مطلقا پیوسته باشد

$$c(u_1, ..., u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, ..., u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 ... \partial u_n}$$

را چگالی مفصل C نامیم. اگر f و f_i $i = 1, ..., n,$ به ترتیب تابع چگالی F و F_i، $i = 1, ..., n$ باشد، آنگاه

$$f(x_1, ..., x_n) = c(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)) f_1(x_1), ..., f_n(x_n).$$

در ادامه برخی از مفصل های مهم و پرکاربرد معرفی می شوند.
الف: مفصل علی -میکاییل - حق (AMH). این مفصل با ضابطه

$$C_\alpha(u, v) = \frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}, \quad (u, v) \in \mathbf{I^2}$$

که در آن $|\alpha| \leq 1$، تعریف می شود.
ب: خانواده

$$C_\theta(u, v) = uvexp(\theta(1-u)(1-v)), u, v \in \mathbf{I^2}, \mathbf{-1} \leq \theta \leq \mathbf{1},$$

به مفصل NC مشهور می باشد.
ج: خانواده مفصل های گامبل - بارنت (GB) از ضابطه زیر پیروی می کند

$$C_\alpha(u, v) = uvexp(-\alpha lnulnv), u, v \in \mathbf{I^2}, \mathbf{-1} \leq \alpha \leq \mathbf{1},$$

د: خانواده

$$C_\alpha(u, v) = uv(1 + \alpha(1-u)(1-v)), u, v \in \mathbf{I^2}, \mathbf{-1} \leq \alpha \leq \mathbf{1}.$$

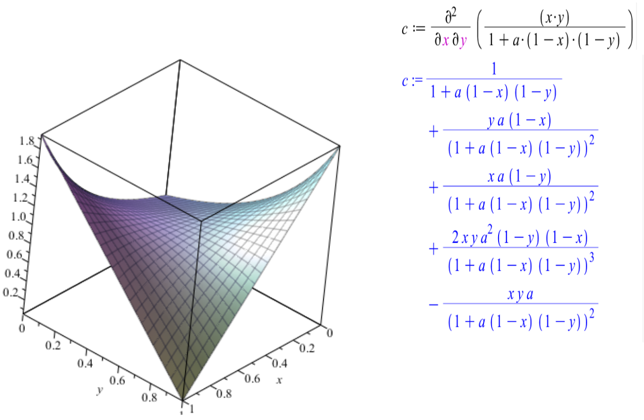
از مفصل ها، به خانواده فارلی، گمبل - مورگنسترن(FGM) مشهور است.
با ضابطه ی مشابه توزیع FGM تعریف می گردد. فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی با تابع توزیع توام F و توابع توزیع های حاشیه ای F_X و F_Y باشند. (X, Y) دارای توزیع FGM با پارامتر α است اگر

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)(1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y)), \ \ |\alpha| < 1.$$

شرح بیشتری در خصوص مفاهیم، کاربردها و ویژگی های مفصل های اخیر را می توانید در [۱۰]، [۶] و [۴] و مراجع و نتایج مرتبط با آنان بیابید. مفصل NC توسط [۲۲] معرفی و بررسی شده است.

مثال ۶.۱. رده متغیرهای $APND$ شامل متغیرهای PND ([۱۱]) $NUOD$، $NLOD$، NA و AWD می باشد ([۶]،[۹]). همچنین مفصل (و توزیع) FGM ، مفاصل AMH، NC و GB زیر رده هایی از خانواده متغیرهای $APND$ به ترتیب با پارامترهای $1 + \alpha$ ، $\frac{1}{1-\alpha}$ ، $q = e^\theta$ و $q = e^{-\alpha}$ هستند.

مثال ۷.۱. فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی با مفصل $C(x, y) = \frac{xy}{1+\alpha(1-x)(1-y)}$ ، $0 < \alpha \leq 0/95$ مفصل (ارشمیدسی)علی میکائیل حق (با پارامتر محدود شده) ، و چگالی مفصل $c_{(X,Y)}$ باشد. در شکل ۱(الف) چگالی این مفصل و (ب) نمایش هندسی آن ملاحظه می شود.
نتایج نرم افزار میپل (۱۸) نشان می دهد، تحت شرایط ذکر شده برای پارامتر، مقدار تابع چگالی مفصل AMH از بالا به ۲ کراندار است (به دلیل وجود نقطه زینی مقدار کران بالا در دو مرحله محاسبه شده است). لذا متغیرهایی با مفصل علی میکائیل حق (تحت محدودیت ذکر شده برای پارامتر) از نوع WD به ازای $b = 2$ می باشند. برای هنگامی که α منفی می باشد با شیوه مشابه می توان نشان داد که متغیرهایی با مفصل علی میکائیل حق(با پارامتر محدود شده) همچنان WD با پارامتر مناسب اند. ویژگی مشابهی برای مفصل کلایتون به ازای مقدار پارامترهای نامنفی برقرار است. در هنگامی که پارامتر منفی باشد، مفصل، بجز برروی دم های توزیع(در اطراف مبدا مختصات) در شرط $APND$ صدق می کند. به عنوان نمونه برای این مفصل و به ازای پارامتر$\theta = -0/5$ بجز برروی دم های توزیع، دارای ویژگی توزیع های $APND$ است.



(ب) (الف)

شکل ۱: الف– چگالی مفصل، ب– نمودار چگالی مفصل به ازای $a = ۰/۹۵$

قابلیت اعتماد سیستم مبین احتمال تداوم عملکرد سیستم بدون وقوع از کار افتادن آن می باشد. در برخی از سیستم ها، سیستم یا اجزا (یا قطعات) سیستم تحت تاثیر نیروی خارجی، تنش، قرار می گیرند. عملکرد سیستم (جزء یا قطعه) وابسته به مقاومت آن در مقابل تنش وارد شده است. اگر Y نشان دهنده مقاومت سیستم(قطعه) و X تنش تحمیل شده به آن باشد، آنگاه $R = P(X \leq Y)$ احتمال غلبه مقاومت بر تنش و فعال بودن و ادامه عملکرد سیستم خواهد بود. R یک اندازه از کارایی سیستم بوده آن را پارامتر قابلیت اعتماد سیستم و چنین الگوهایی را الگوهایی تنش– مقاومت نامند. در واقع مدل تنش–مقاومت به بررسی استقامت مولفه مورد نظر در برابر فشار وارده بر آن می پردازد که میزان فشار وارده و استقامت هر کدام متغیری تصادفی هستند. اخیرا پارامتر R و بررسی ویژگی ها و خصوصیات آن مورد توجه محققین بسیاری از آن جمله [۵] قرار گرفته است.
در الگوهای تنش– مقاومت عموما فرض می شود که متغیر های متناظر با تنش و مقاومت مستقل از هم می باشند، فرضی که در عمل چندان واقع بینانه نیست. در چنین حالت هایی، سیستم خراب می شود اگر تنش تحمیل شده ، X، بیش از مقاومت، Y، باشد. به عنوان نمونه موضوع عرضه و تقاضا را در نظر بگیرید. اگر تنش را تقاضا و عرضه را مقاومت در نظر بگیریم، بندرت می توان پذیرفت این دو متغیر از هم مستقل باشند. به نظر می رسد در این حالت می توان پذیرفت که بین دو متغیر X و Y یک نوع همبستگی، به عنوان نمونه از جنس WD، برقرار باشد .

مثال ۸.۱. فرض کنید (X, Y) دارای ساختار وابستگی WD (یا مفصل AMH با پارامتر محدود شده) باشد. در این صورت اگر $X \sim G(p)$ ، $Y \sim Poi(\lambda)$ و R^* اندازه کارایی سیستم تحت استقلال متغیرها باشد، از تعریف ۱.۲، R و روابط زیر

$$\begin{aligned} a(1 - e^{-\lambda p}) &= a \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{y} p(1-p)^{x-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = aR^* \\ &\leq \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{y} P(X = x, Y = y) = R \\ &\leq b \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{y} p(1-p)^{x-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = b(1 - e^{-\lambda p}) = bR^* \end{aligned}$$

نتیجه می شود که $aR^* \leq R \leq bR^*$. این گزاره برای هر دو متغیر با ساختار وابستگی WD برقرار می‌باشد.

۲ نتایج اصلی

در قسمت اول این بخش برخی ویژگی‌های اساسی و در قسمت دوم چند نامساوی‌ها برای متغیرهای تصادفی وابسته آورده می‌شود. قسمت سوم به رفتار حدی یک دنباله اختیاری از متغیرهای تصادفی اختصاص یافته است. در ادامه c مقدار ثابتی است که در مکان های مختلف می‌تواند مقادیر متفاوتی باشد.

۱.۲ ویژگی های اساسی

در این بخش برخی از ویژگی های اساسی متغیرهای تصادفی $APND$ از جمله ساختار کوواریانس آنها مورد بحث قرار می گیرند.

لم ۱.۲. فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی $APND$ و $\{f_n, n \geq ۱\}$ یک دنباله از توابع همراستا و i و j دو عدد طبیعی باشند.

(الف) مجموعه روابط (۱.۱) (و سایر روابطی که در تعریف ۱.۱ به آن اشاره شده است) با روابطی که از جایگزینی هر یک از نامساوی های $X_i \leq x_i$، $X_j \leq x_j$، $X_i > x_i$ یا $X_j > x_j$ با روابط متناظر $X_i < x_i, X_j < x_j, X_i \geq x_i$ یا $X_j \geq x_j$ حاصل می شود، هم ارز است.

(ب) $\{f_n(X_n), n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای $APND$ با همان پارامتر های اولیه $q_۱$ و $q_۲$ هستند.

(پ) $P(X_i \geq x_i, X_j < x_j) \geq P(X_i \geq x_i)[۱ - (۱ + q_۲|i-j|)P(X_j \geq x_j)]$.

(ت) $P(X_i \leq x_i, X_j > x_j) \geq P(X_i \leq x_i)[۱ - (۱ + q_۱|i-j|)P(X_j \leq x_j)]$.

(ث) $E(X_iX_j) \leq (۱ + q_۲\,|i-j|)E(|X_i|)E(|X_j|)$.

(ج) $Cov(X_i, X_j) \leq \max(q_۲(|i-j|), ۱)E|X_i|E|X_j|)$.

(چ) برای ثابتی مانند $r > ۱$، $Cov(X_i, X_j) \leq \frac{۴q_۲(|i-j|)}{(r-۱)^۲}E(|X_i|^r)E(|X_j|^r)$، مشروط بر آنکه امیدهای ریاضی طرف راست وجود داشته باشند.

اثبات. اثبات (الف)، (ب)، (پ)، (ت) را می توانید در لم ۱ از [۱۱] بیابید. اثبات (ث) از لم هافدینگ و شیوه اثبات لم ۲ از [۱۱] نتیجه می شود. (ج) برای متغیرهای تصادفی نامنفی در لم ۲ از [۱۱] اثبات شده است. اثبات (ج) در حالت کلی، $X = X^+ - X^-$، با یک اصلاح جزئی از لم ۲ از [۱۱] و در نظر گرفتن این نکته که $Cov(X_i^-, X_j^+) \geq -E(X_i^-)E(X_j^+)$ حاصل می شود. (چ) یک نتیجه از برابری هافدینگ و نامساوی چی بی چف می باشد. □

۲.۲ نامساوی ها

در این قسمت چند نامساوی در ارتباط با مجموع، ماکسیمم و ماکسیمم مجموع های جزیی متغیرهای وابسته به همراه یک نامساوی در ارتباط با گشتاورهای متغیرهای وابسته و نسخه های مستقل آنها اثبات می شوند.

لم ۲.۲. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی WD با پارامترهای a و b باشند، آنگاه برای هر $u, v \in R$ داریم

$$\begin{aligned}\max(A, B) &\leq P(X + Y < u)\\ &\leq P(X < u + v)(۱ - aP(Y < -v)) + P(Y < -v)\end{aligned}$$

که در آن $A = bP(X < u + v)P(Y < -v)$ و $B = P(X < u - v) - P(Y > v)$.

اثبات. برهانی برای درستی $P(X + Y < u) \geq B$ را می توانید در لم ۷.۱ از [۱۳] بیابید. از

$$\begin{aligned}P(X + Y < u) &\geq P((X < u + v) \cap (Y < -v))\\ &\geq bP(X < u + v)P(Y < -v) = A\end{aligned}$$

اولین نامساوی (طرف چپ) نتیجه می شود. همچنین از

$$\begin{aligned}P(X + Y < u) &\leq P((X < u + v) \cup (Y < -v))\\ &= P(X < u + v) + P(Y < -v) - P((X < u + v) \cap (Y < -v))\\ &\leq P(X < u + v)(۱ - aP(Y < -v)) + P(Y < -v)\end{aligned}$$

اثبات کامل می گردد. □

لم ۳.۲. فرض کنید $\{X, X_n, n \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی همتوزیع WND با پارامتر $\{q_n\}$ باشد، آنگاه

$$(i) \qquad nP(X > t) - \ln(q_n) \leq -\ln(۱ - P(\max_{۱\leq i\leq n} X_i > t)),$$

$$(ii) \quad nP(|X| > t) - \ln(q_n) \leq -۲\ln(۱ - P(\max_{۱\leq i\leq n} |X_i| > t)).$$

اثبات. چون $X_i \leq |X_i|$ و $-X_i < |X_i|$ لذا

$$P(\max X_i > t) \leq P(\max |X_i| > t)$$

و

$$P(\max(-X_i) > t)) \leq P(\max |X_i| > t).$$

از نامساوی شناخته شده $1 - x \leq e^{-x}$ داریم

$$\begin{aligned} P(\max_{1\leq i\leq n} X_i > t) &= 1 - P(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq t) = 1 - P(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t), \\ &\geq 1 - q_n P^n(X \leq t) \\ &= 1 - q_n(1 - P(X > t))^n \\ &\geq 1 - q_n(\exp(-nP(X > t)), \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} &\ln(1 - P(\max_{1\leq i\leq n} X_i > t)) \leq \ln(q_n \exp(-nP(X > t))) \\ &\Rightarrow nP(X > t) - \ln q_n \leq -\ln(1 - P(\max_{1\leq i\leq n} X_i > t)) \end{aligned}$$

با جایگذاری $-X_i$ به جای X_i و تکرار مراحل فوق و با توجه به

$$nP(-X > t) - \ln(q_n) \leq -\ln(1 - P(\max -X_i > t))$$

اثبات قسمت (ii) کامل می گردد. □

به شیوه مشابه می توان نشان داد که لم ۳.۲ برای متغیرهای END ([۱۴]) و $WUOD$ ([۲۰]) . نیز برقرار است. بنابراین لم ۱.۲ از ([۲۱]) نتیجه ای از لم ۳.۲ است. لم ۳.۲ تعمیمی از لم ۲.۲ از ([۲۱]) می باشد.

لم ٤.۲. فرض کنید $\{X, X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی همتوزیع WND (END یا $WUOD$) با پارامتر $\{q_n\}$ باشد، آنگاه

$$P(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| > t) \geq 1 - q_n \exp(\frac{-n}{2} P(|X| > 2t)). \tag{۱.۲}$$

اثبات. از $P(\max_{1\leq i\leq n}|S_i| \geq t) \geq P(\max_{1\leq i\leq n}|X_i| \geq 2t)$ و لم ۳.۲ ، رابطه (۱.۲) نتیجه می شود. □

یکی از موضوعات قابل توجه، یافتن ارتباط بین گشتاورهای مختلف متغیرهای وابسته و نسخه های مستقل از آنها می باشد، ([۱۷]). در لم بعدی و برای متغیرهای $APND$ چنین ارتباطی بررسی می شود.

لم ٥.۲. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دنباله ای متناهی از متغیرهای تصادفی $APND$ نامنفی و همتوزیع با پارامتر $q_1 = q_2$ و $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ دنباله ای متناهی از متغیرهای مستقل و مستقل از $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشد به قسمی که برای هر $1 \leq i \leq n$، X_i و X_i^* همتوزیع هستند و f تابعی محدب باشد به قسمی که برای $\alpha < 1$

$$(f(X_1 + t + 1) - f(X_1 + t)) < f(X_1)t^\alpha, \quad a.s.$$

آنگاه

$$E(f(\sum_{i=1}^n X_i)) \leq E(f(\sum_{i=1}^n X_i^*)) + c\max(1, q(1))E(|f(\sum_{i=2}^n X_i^*)|)E(X_1^{(\alpha+1)}))$$

مشروط بر آنکه امیدهای ریاضی طرف راست موجود باشند.

ملاحظه ۶.۲. شرط همتوزیعی را می توان به شرط به ازای هر i،

$$f(X_i+t+۱)-f(X_i+t)) < f(X_i)t^\alpha \quad a.s., \;\; \alpha < ۱$$

تضعیف کرد. شرط برابری پارامترها برای ساده سازی محاسبات آورده شده است که می توان این شرط را نیز حذف کرد.

اثبات. فرض کنید $(Y_۱, Y_۲)$ نسخه $(X_۱, X_۲)$ و مستقل از آن باشد

$$\begin{aligned}
&f(X_۱+X_۲)+f(Y_۱+Y_۲)-f(X_۱+Y_۲)-f(X_۲+Y_۱)\\
&\quad=\int_{X_۱}^{Y_۱} f'(Y_۲+t)-f'(X_۲+t))dt\\
&\quad=\int_۰^{\infty}(f'(Y_۲+t)-f'(X_۱+t))(I(Y_۱>t)-I(X_۱>t))dt
\end{aligned}$$

که f' مشتق راست f است. لذا

$$\begin{aligned}
۲E(f(X_۱+X_۲)-f(X_۱^*+X_۲^*)) &= E(f(X_۱+X_۲)+f(Y_۱+Y_۲)\\
&\qquad -f(X_۱+Y_۲)-f(X_۲+Y_۱)\\
&= E\int_{X_۱}^{Y_۱}(f'(Y_۲+t)-f'(X_۲+t))dt\\
&= \int_۰^{\infty} E(f'(Y_۲+t)-f'(X_۲+t))(I(Y_۱>t)-I(X_۱>t))dt\\
&= ۲\int_۰^{\infty} Cov(f'(X_۲+t)), I(X_۱>t))dt = ۲A
\end{aligned}$$

اما بنا به لم ۱.۲

$$\begin{aligned}
A &\le \int_۰^{\infty}\max(۱,q(۱))(E(|f'(X_۲+t)|P(X_۱>t))dt\\
&\le \int_۰^{\infty}\max(۱,q(۱))E(|f(X_۲+t+۱)-f(X_۲+t)|P(X_۱>t))dt\\
&\le \max(۱,q(۱))E(|f(X_۲)|)\int_۰^{\infty} t^\alpha P(X_۱>t)dt\\
&\le c\max(۱,q(۱))E(|f(X_۲^*)|)|)E(X_۱^{(\alpha+۱)})
\end{aligned}$$

که c تنها به α بستگی دارد. فرض کنید $g(x)=E(f(x+\sum_{i=۱}^{n-۱}X_i))$. بنا به فرض استقرا

$$\begin{aligned}
g(x)=E(f(x+\sum_{i=۱}^{n-۱}X_i)) &\le E(f(x+\sum_{i=۱}^{n-۱}X_i^*))+\\
&\quad c\max(۱,q(۱))E(|f(x+\sum_{i=۲}^{n-۱}X_i^*)|)E(X_۱^{(\alpha+۱)})
\end{aligned}$$

چون $\sum_{i=۲}^{n-۱}X_i$ و $X_۱$ توابع صعودی هستند، لذا $APND$ هستند و داریم

$$\begin{aligned}
E(f(\sum_۱^n X_i)) &\le E(f(X_n^*+\sum_{i=۱}^{n-۱}X_i^*))+\\
&\quad c\max(۱,q(۱))E(|f(X_n^*+\sum_{i=۲}^{n-۱}X_i^*)|)E(X_۱^{(\alpha+۱)})
\end{aligned}$$

و بنابراین اثبات کامل می گردد. □

نامساوی در ارتباط با مجموع های جزئی متغیرهای تصادفی WD می تواند در اثبات قضایای حدی مربوط به آنها مفید باشد.

لم ۷.۲. فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی WD با میانگین های صفر و ضرائب a و b باشند، به قسمی که برای ثابتی مانند $A > ۰$، $sup_n|X_n| \leq A$ آنگاه

$$P(max_{۱\leq k\leq n}|S_k| \leq x) \leq \frac{(x+A)^۲}{a\sum_{k=۱}^{n} Var(X_k)}.$$

اثبات. برای هر $k = ۱, ..., n$، فرض کنید

$$A_k = \{max_{۱\leq j\leq k-۱}|S_j| \leq x, |S_k| > x\}, \qquad B_k = \{max_{۱\leq j\leq k}|S_j| \leq x\}.$$

بنابراین

$$S_{k-۱}I(B_{k-۱}) + X_kI(B_{k-۱}) = S_kI(B_{k-۱}) = S_kI(B_k) + S_kI(A_k).$$

طرف چپ نامساوی را به توان دوم رسانده، از آن امید ریاضی می گیریم. از تعریف متغیرهای تصادفی وابسته WD داریم

$$\begin{aligned} E(S_{k-۱}I(B_{k-۱}))^۲ + aVar(X_k)P(B_{k-۱}) &\leq E(S_kI(B_{k-۱}))^۲ \\ &\leq E(S_{k-۱}I(B_{k-۱}))^۲ + bVar(X_k)P(B_{k-۱}) \end{aligned}$$

همین کار را برای طرف راست انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} E(S_kI(B_{k-۱}))^۲ &= E(S_kI(B_k) + S_kI(A_k))^۲ \\ &\leq E(S_kI(B_k))^۲ + E(S_{k-۱}I(A_k) + X_kI(A_k))^۲ \\ &\leq E(S_kI(B_k))^۲ + (x+A)^۲P(A_k) \end{aligned}$$

از اینکه برای هر k ,$B_n \subseteq B_k$ داریم

$$aVar(X_k)P(B_n) \leq E(S_kI(B_k))^۲ - E(S_{k-۱}I_{B_{k-۱}})^۲ + (x+A)^۲P(A_k)$$

با مجموع گیری از هر طرف برروی مقادیر ۱ تا n اثبات کامل می شود. □

۳.۲ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی

در قسمت پایانی یک قضیه در خصوص رفتار حدی($a.s.$) مجموع وزنی متغیرهای تصادفی اثبات می شود.

قضیه ۸.۲. فرض کنید $\{X_۰, X_{nm}, ۱ \leq m \leq n,\ n \geq ۱\}$ آرایه ای از متغیرهای تصادفی چزارو به طور تصادفی کراندار به $X_۰$ یعنی

$$\frac{۱}{n}\sum_{m=۱}^{n} P(|X_{nm}| > x) \leq P(|X_۰| > x), \qquad \forall x > ۰, n \geq ۱,$$

$\{c_n, n \geq ۱\}$ دنباله ای از مقادیر صعودی و مثبت و

$$N(x) = Card\{n, c_n \leq x\}, \qquad \forall x > ۰$$

باشد. اگر برای مقداری مانند $p > ۰$،

$$\int_۰^۱ EN(\frac{|X_۰|)}{t^{۱/p}})dt < \infty$$

آنگاه ، الف:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nc_n^p}\sum_{m=1}^{n}E(|X_{nm}||^pI(|X_{nm}|\leq c_n)<\infty.$$

ب: علاوه بر این اگر $0<p\leq 1$ و a_n و b_n دو دنباله از مقادیر مثبت، $c_n=\frac{b_n}{a_n}$ یک دنباله صعودی و $b_n\uparrow\infty$ باشد، آنگاه

$$\frac{1}{b_k}\sum_{n=1}^{k}a_n(\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{m=1}^{n}X_{nm}I(|X_{nm}|\leq\frac{b_n}{a_n}))\to 0\quad a.s..$$

$N(x)$ یک ابزار مهم در اثبات قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی است.

اثبات. از نامساوی شناخته شده برای متغیرهای برش یافته(لم ۲.۱ از [۱۸]) داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^p}(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(|X_{nm}|^pI(|X_{nm}|\leq c_n))$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^p}(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}E(|X_{nm}|^pI(|X_{nm}|^p\leq c_n^p))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^p}(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\int_0^{c_n^p}P(|X_{nm}|^p>x)dx)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^p}\int_0^{c_n^p}P(|X_0|^p>x)dx$$

از تغییر متغیر $x=c_n^pt\ \Rightarrow\ dx=c_n^pdt$ داریم

$$=\lim_k\sum_{n=1}^{k}\int_0^1P(\frac{|X_0|}{t^{1/p}}>c_n)dt,$$

و چون $N(\frac{|X_0|}{t^{1/p}})=\sum_{n=1}^{\infty}I(\frac{|X_0|}{t^{1/p}}>c_n)$ لذا

$$=\int_0^1EN(\frac{|X_0|}{t^{1/p}})dt<\infty.$$

ب: از الف نتیجه می شود که $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})^p\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|X_{nm}|^pI(|X_{nm}|\leq\frac{b_n}{a_n})<\infty$. در نتیجه از لم کرونکر داریم

$$\frac{1}{b_k^p}\sum_{n=1}^{k}a_n^p(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|X_{nm}|^pI(|X_{nm}|\leq\frac{b_n}{a_n}))\to 0\quad a.s..$$

از نامساوی C_r و چون $0<p\leq 1$ داریم

$$||\frac{1}{b_k}\sum_{n=1}^{k}a_n(\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{m=1}^{n}|X_{nm}|I(|X_{nm}|\leq\frac{b_n}{a_n}))|^p$$
$$\leq\frac{1}{b_k^p}\sum_{n=1}^{k}a_n^p(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}|X_{nm}|^pI(|X_{nm}|\leq\frac{b_n}{a_n}))\to 0\quad a.s..$$

□

بحث و نتیجه‌گیری

در رده متغیرهای تصادفی وابسته منفی خاصیت خنثی سازی بیشتر مشاهده و معمولا تعمیم نتایج مرتبط با قوانین اعداد بزرگ از رده متغیرهای مستقل به وابسته منفی آسانتر انجام می‌شود . اما در دنیای واقعی این متغیرها کمتر مشاهده می‌شوند. لذا مطالعه رده هایی از متغیرهای تصادفی که برخی از ساختارهای وابستگی مثبت را نیز شامل شوند، از اهمیت مضاعفی برخوردار است. در این مقاله نخست برخی از رده های متغیرهای تصادفی وابسته که پاره ای از جنبه های وابستگی مثبت بین متغیرها را نیز شامل باشند، معرفی گردیدند. در بخش دوم نخست کران های برای کوواریانس و پیشامدهایی مرتبط با توزیع توام دو متغیره از متغیرهای $APND$ تعیین شدند. این کران‌ها در اثبات قضایای حدی دارای اهمیت بسیار می‌باشند. به دلیل اهمیت نامساوی ها در مباحث نظری و کاربردی قسمت دوم را به تعیین نامساوی هایی برای متغیرهای $APND$ و زیر رده های آن اختصاص دادیم. امید است با استفاده از نتایج این مقاله بتوان قضایای حدی مرتبط را نیز اثبات نمود. دربخش پایانی یک قانون قوی برای آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی اختیاری بدست آمد.

فهرست منابع

[1] N.H. Bingham and H.R. Nili Sani, Summability methods and negatively associated random variables, Journal of Applied Probability. **41(A)** (2004) 231-238.

[2] A. Bozorgnia and R.F. Patterson and R.L. Taylor, Limit theorems for dependent random variables, Proceedings of the first world congress on World congress of nonlinear analysts, **92** volume II (1996) 1639-1650.

[3] Q. Dehua, and K.C. Chang and R.G. Antonini and A. Volodin, On the strong rates of convergence for arrays of rowwise negatively dependent random variables, Stochastic Analysis and Applications,**29** (2011) 375-385.

[4] C. Genest and B. Remillard and D. Beaudoinc, Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study, Insurance: Mathematics and Economic, **4**4 (2009) 199–213.

[5] S. Kotz and Y. Lumelskii and M. Pensky, *The stress-strength model and its generalizations-Theory and Applications*,World Scientific Publishing Co., 2003.

[6] H. Joe, *Dependence modeling with copulas*, CRC press, 2015.

[7] H.S. Konijn, Positive and negative depencence two random variables, Sankhyā: The Indian Journal of Statistic, **2** (1959) 269-280.

[8] E.L. Lehmann, Some concepts of dependence, Ann. Math. Stat., **3**1 (1966) 1137–1153.

[9] D.D. Mari and S. Kotz, *Correlation and Dependene*, Imperial College Press, 2004.

[10] R.B. Nelson, *An Introduction to Copulas*, Springer Science & Business Media, 2006.

[11] H.R. Nili Sani and M. Amini and A. Bozorgnia, Strong Laws for Weighted Sums of Negative dependent Random Variables, J. of Sci., I.R.I, **16(3)** (2005) 261–265.

[12] H.R. Nili Sani and M. Amini and A. Bozorgnia, Complete convergence for weighted sums of arrays of $APND$ random variables, Commun. Stat.Theory Methods, **7(10)** (2018) 2425-2431.

[13] V.V. Petrov, *Limit theorems of probability theory*, Clarendon Press, 1995.

[14] D. Qiu and P. Chen and R.G. Antonini and A. Volodin, On the complete convergence for arrays of rowwise extended negatively dependent random variables, J. Korean Math. Soc., **2** (2013) 379–392.

[15] V. Ranjbar and M. Amini and A. Bozorgnia, Asymptoti Behavior Weighted Sums of Weakly Negative dependent Random Variables, Journal of Sienes Islami Republi of Iran, **19** (2008) 357-363.

[16] B.P. Rao, *Associated sequences, demimartingales and nonparametric inference*, Springer Science & Business Media, 2012.

[17] Q.M. Shao, A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables, Journal of Theoretical Probability ,**13(2)** (2000) 343-356.

[18] G. Shixin, On On almost sure convergence of weighted sums of random element sequences, Acta Mathematica Scientia, **30B(4)** (2010) 1021-1028.

[19] A. Sklar, Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris,**8**(1959) 229–231.

[20] K. Wang and Y. Wang and Gao and Q. Qiu, Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate, Methodol Comput. Appl. Proba., **15** (2013) 109–124.

[21] Y. Yi and D. Qiu, A note on the Kolmogorov-Feller weak law of large numbers, Journal of Mathematical Research with Applications, **35(2)** (2015) 223–228.

[22] K. Zhang and J. Lin and C. HUANG, Some new results on weighted geometric mean for copulas, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems , **21(2)** (2013) 277–288.

A class of dependent random variables, properties and applications

Nili Sani, H. R. [†] **, Jafari, M.**

Department of Statstics, University of Birjand, Birjand , Iran.

Communicated by: Gholam Ali Parham

Received: 2021/3/24 Accepted: 2021/12/27

Abstract: In this paper, after calling a class of dependent random variables, APND, that contains some big classes of negatively dependent and some classes of positively dependent random variables, the relationship of this class of random variables with well known classes of dependent variables are explained and some basic relations, contain moment and maximal inequalities are proofed. At the end, the limiting behavior of an arbitrary array of random variables is studied.

Keywords: Negatively dependent random variables, $APND$ random variables, Maximal inequality.

vspace0.2cm

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: hnilisani@birjand.ac.ir