مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۷۳۹-۷۴۹

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2022.37847.1942

حل عددی معادله انتگرال تصادفی غیرخطی نوع سوم به‌کمک ماتریس عملیاتی با استفاده از چندجمله ای‌های برنشتاین

مرتضی خدابین *، پروانه جامی

گروه ریاضیات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی نیا

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۳

چکیده: در این مقاله به حل عددی معادلات انتگرال تصادفی نوع سوم با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا ماتریس عملیاتی و ماتریس عملیاتی تصادفی چندجمله‌ای‌های برنشتاین را به‌دست می‌آوریم. تمامی توابع موجود در معادله‌ی انتگرال تصادفی نوع سوم را با استفاده از سری چندجمله‌ای‌های برنشتاین تقریب می‌زنیم و سپس از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین استفاده می‌کنیم. با این کار حل معادله‌ی انتگرال تصادفی نوع سوم به حل یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود، که با روش نیوتن می‌توان آن را حل کرد. تجزیه و تحلیل همگرایی روش مطرح می‌شود و برای بررسی دقت و کارایی روش، دو مثال عددی ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های برنشتاین، معادله انتگرال تصادفی نوع سوم، ماتریس عملیاتی انتگرال تصادفی.

رده‌بندی ریاضی: 60H05,60H20,65C30,60H35

۱ مقدمه

ارائه مدل‌های ریاضی یکی از روش‌های علمی برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های طبیعی است. این مدل‌ها در واقع بیان‌گر واقعیت‌های حاکم بر مسائل، به‌ویژه بیان روابط میان داده‌ها و مجهول‌ها می‌باشند. طیف گسترده‌ای از مسائل در فیزیک، مکانیک، داروسازی، اقتصاد، جامعه شناسی و زیست‌شناسی به معادلات انتگرال تصادفی منجر می‌شود. این سیستم‌ها وابسته به یک منبع اختلال‌اند. بنابراین مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی طبیعتاً نیاز به استفاده از معادلات انتگرال تصادفی دارد [۱] الی [۵]. چون بسیاری از این معادله‌ها را نمی‌توان به‌طور تحلیلی حل کرد، لذا به‌دست آوردن جواب تقریبی با استفاده از روش‌های عددی مناسب از اهمیت ویژه برخوردار است. درسال‌های اخیر محققان و پژوهشگران از روش‌ها و چندجمله‌ای‌های مختلفی برای حل این معادلات استفاده کرده‌اند. از جمله روش‌های هم محلی، گلرکین، موجک‌ها، روش‌های تصویری، استفاده از توابع ترکیبی برای حل این معادلات به‌کار برده شده است [۵] الی [۱۲]. برخی از مدل‌سازی‌های ریاضی که مرتبط با

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: E-mail:m-khodabin@kiau.ac.ir

مسائل انتقال نوترون، کشش و نظریه پراکندگی ذرات هستند تبدیل به معادلات انتگرال تصادفی نوع سوم می‌شوند.
معادلات انتگرال تصادفی نوع سوم که در این مقاله در نظر گرفته می‌شود به‌صورت زیر است:

$$t^{\beta}Y(t) = Y_0 + \lambda_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} a(s, Y(s))ds + \lambda_2 \int_0^t b(s, Y(s))dB(s), \qquad t \in [0, 1] \tag{1.1}$$

که در آن $\alpha + \beta > 0$، $\beta > 0$، $\beta \in \mathbb{R}$، $\alpha \in [0, 1)$ و λ_1 و λ_2 اعداد حقیقی یا مختلط ناصفراند و Y_0 و $a(s, Y(s))$ و $b(s, Y(s))$ برای $s, t \in [0, T]$ فرایندهای تصادفی‌اند که روی فضای احتمال (Ω, F, P) تعریف شده‌اند. $Y(t)$ تابع مجهول و $B(t)$ یک حرکت براونی است. همان‌طور که بیان گردید یافتن راه حل تحلیلی برای این معادلات دشوار است، لذا بسیار مهم است که روش‌های محاسباتی جهت تقریب آن‌ها فراهم آید که قابل اعتماد و کارا باشند. در سال‌های اخیر ریاضیدانان بسیاری، تحقیقات گسترده‌ای جهت یافتن روش حل عددی مناسب برای این معادلات انجام داده‌اند [۱۳] الی [۱۶]. در این مقاله سعی شده است روشی جهت حل عددی این معادلات ارائه گردد، بدین صورت که با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین معادله انتگرال به دستگاه جبری خطی تبدیل می‌شود. ابتدا از چندجمله‌ای‌های برنشتاین به‌عنوان توابع تقریب استفاده می‌شود وتوسط آن ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین ساخته خواهد شد. در نهایت معادله انتگرال اصلی به یک دستگاه از معادلات غیرخطی جبری تبدیل شود که به‌راحتی حل می‌شوند.

۲ تعاریف و قضیه‌ها

چندجمله‌ای‌های برنشتاین با استفاده از رابطه زیر ساخته می‌شوند، [۱۷]

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} t^{i+k}, \qquad t \in [0, 1], \tag{1.2}$$

که در آن $i = 0, 1, \ldots, n$، با استفاده از رابطه (۱.۲)، بردار برنشتاین را معرفی می‌کنیم:

$$\phi(t) = [B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \ldots, B_{n,n}(t)]^T,$$

از طرفی بردار توابع برنشتاین را می‌توانیم به فرم زیر بنویسیم:

$$\phi(t) = MT_n(t), \tag{2.2}$$

که در آن M، یک ماتریس بالا مثلثی مرتبه $(n+1) \times (n+1)$ به‌صورت زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} (-1)^0\binom{n}{0} & (-1)^1\binom{n}{0}\binom{n-0}{1} & \cdots & (-1)^{n-0}\binom{n}{0}\binom{n-0}{n-0} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & (-1)^0\binom{n}{i} & 0 & (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-i} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0\binom{n}{n} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ماتریس $T_n(t)$ از مرتبه $(n+1) \times 1$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(t) = \left[1, t, t^2, \ldots, t^n\right]^T.$$

فرض کنیم $f(t) \in L^2[0, 1]$ تابعی یک متغیره دلخواه باشد، این تابع را می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین به‌صورت زیر تقریب زد [۱۶].

$$f(t) \simeq B_n(f(t)) = A\phi(t) \tag{4.2}$$

که در آن $A = [a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]^T$ بردار ضرایب چندجمله‌ای‌های برنشتاین است.
تقریب انتگرال تابع برداری $\phi(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^t \phi(s)ds \simeq P\phi(t) \tag{5.2}$$

که در آن P، ماتریس عملیاتی انتگرال متناظر با $\phi(t)$ از مرتبه $(n+۱)\times(n+۱)$ است.
انتگرال هر تابع دلخواهی مانند f را می‌توانیم به‌صورت (۶.۲) تقریب بزنیم:

$$\int_{۰}^{t} f(s)ds \simeq \int_{۰}^{t} MT_n(s)ds \simeq MT_n(t). \qquad (۶.۲)$$

تعریف ۱.۲. برای دستیابی به یک حل عددی ازمعادله (۱.۱)، تعریف عملگر انتگرال کسری ریمان–لیوویل I_t^{α} را در نظر می‌گیریم. عملگر انتگرال ریمان–لیوویل I_t^{α} از درجه $\alpha \geqslant ۰$ با رابطه زیر تعریف می‌شود: [۱۸]

$$I_t^{\alpha}Y(t)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-x)^{\alpha-۱}Y(x)dx, & \alpha>۰\\ Y(x), & \alpha=۰\end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{۰}^{\infty} t^{\alpha-۱}e^{-t}dt.$$

قضیه ۲.۲. [۱۹] فرض کنیم، همه جا $\phi(t)$ بردار چندجمله‌ای متعامد رابطه (۲.۲) باشد. از آنجایی که $\alpha>۰$، داریم:

$$I_t^{\alpha}\phi(t)\simeq p^{(\alpha)}\phi(t).$$

قضیه ۳.۲. [۲۰] فرض کنیم $Q=\{(t,Y(t))\int \mathbb{R}^{۲} \mid t\in[۰,T], \|Y(t)\|\leqslant r\}$ که $r>۰$ ثابت است و برای هر $۰\leqslant t\leqslant T$ مجموعه تمام فرایندهای تصادفی $-F_t$ سازگار $\int_{۰}^{T}E\left[|Y(t)|^{۲}\right]dt<\infty$ را با χ نمایش دهیم. قرار می‌دهیم:

$$M=\{Y(t)\in\chi \mid \|Y(t)\|<r\}.$$

همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشد:

۱- $a(t,Y(t),b(t,Y(t)):Q\to\mathbb{R}$ روی ناحیه $[۰,T]\times\Omega$ پیوسته و اندازه‌پذیر باشند.

۲- فرض کنیم $d=\sup\limits_{(t,Y(t))\in Q}\{\|a(t,Y(t))\|,\|b(t,Y(t))\|\}$، T و d اعداد حقیقی و متغیر تصادفی h به‌صورتی باشند که

$$۳E|h^{۲}|+۳T(۱+T)d^{۲}<r^{۲}.$$

آنگاه معادله انتگرال تصادفی (۱.۱) دارای حداقل یک جواب $Y(t)\in M$ است.

قضیه ۴.۲. [۲۰] شرایط زیر را در نظر بگیرید:

۱- $a(t,Y(t))$ و $b(t,Y(t))$ روی ناحیه $[۰,T]\times\Omega$، اندازه‌پذیر باشند.

۲- $\alpha_۲$، $\alpha_۱ < ۱$ ،$۰\leqslant$ و T وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|a(s,Y(s))-a(s,X(s))|\leqslant\alpha_۱|Y(s)-X(s)|,$$
$$|b(s,Y(s))-b(s,X(s))|\leqslant\alpha_۲|Y(s)-X(s)|.$$

۳- اعداد حقیقی T و $\alpha=\max\{\alpha_۱,\alpha_۲\}$ به‌صورتی داده شده باشند که در شرط زیر صدق کنند:

$$۰\leqslant ۲T\alpha^{۲}(۱+T)<۱.$$

آنگاه معادله انتگرال تصادفی (۱.۱) دارای حداقل یک جواب $Y(t)\in M$ است.

قضیه ۵.۲. [۲۱] (خاصیت ایزومتری) فرض کنیم $f\in v(S,T)$ ، آنگاه

$$E\left[\int_{S}^{T}f(t,w)dW(t)(w)\right]^{۲}=E\left[\int_{S}^{T}f^{۲}(t,w)dt\right].$$

۳ ماتریس عملیاتی انتگرال با استفاده چندجمله‌ای‌های برنشتاین

فرض کنیم $\phi(t)$ بردار توصیف شده در رابطه (۲.۲) باشد، بنابراین انتگرال ایتوی چندجمله‌ای‌های برنشتاین را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\int_{\circ}^{t}\phi(s)dB(s)=\int_{\circ}^{t}MT_n(s)dB(s)=M\left[\int_{\circ}^{t}dB(s),\int_{\circ}^{t}sdB(s),\ldots,\int_{\circ}^{t}s^nsB(s)\right]^T. \quad (۱.۳)$$

از طرفی

$$\begin{pmatrix}\int_{\circ}^{t}dB(s)\\ \int_{\circ}^{t}sdB(s)\\ \vdots\\ \int_{\circ}^{t}s^ndB(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(t)\\ tB(t)-\int_{\circ}^{t}B(s)ds\\ \vdots\\ t^nB(t)-\int_{\circ}^{t}ns^{n-۱}B(s)ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱\\ t\\ \vdots\\ t^n\end{pmatrix}B(t)-\begin{pmatrix}\circ\\ \int_{\circ}^{t}B(s)ds\\ \vdots\\ \int_{\circ}^{t}ns^{n-۱}B(s)ds\end{pmatrix}$$

$$=B(t)T_n(t)-\begin{pmatrix}\circ\\ \int_{\circ}^{t}B(s)ds\\ \vdots\\ n\int_{\circ}^{t}s^{n-۱}B(s)ds\end{pmatrix}=\Lambda(t)=(\lambda_i)_{i=\circ,۱,\ldots,n}$$

که در آن

$$\lambda_i=t^iB(t)-i\int_{\circ}^{t}s^{i-۱}B(s)ds,\qquad i=\circ,\ldots,n.$$

حال انتگرال‌های ایجاد شده در سمت راست عبارت اخیر را با روش انتگرال گیری ذوزنقه‌ای تقریب می‌زنیم. بنابراین:

$$\lambda_i\simeq t^iB(t)-\frac{ti}{۴}\left(۲i(\frac{t}{۲})^{i-۱}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(t)+t^{i-۱}B(t)\right),\qquad i=\circ,۱,\ldots,n$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\lambda_i=\left[\left(۱-\frac{i}{۴}\right)B(t)-\frac{i}{۲^i}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(t)\right]t^i,\qquad i=\circ,۱,\ldots,n$$

همچنین $B(t)$ را به ازای $\circ\leqslant t\leqslant ۱$ با $B(\circ/۵)$ تقریب می‌زنیم و در معادله (۱.۳) جای‌گذاری می‌کنیم. رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$M\Lambda(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}B(\circ/۵)&\circ&\cdots&\circ\\ \circ&\frac{۳}{۴}B(\circ/۵)-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(\circ/۵)&\cdots&\circ\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \circ&\circ&\cdots&(۱-\frac{n}{۴})B(\circ/۵)-\frac{n}{۲^n}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(\circ/۵)\end{pmatrix}}_{\Lambda}\begin{pmatrix}۱\\ t\\ \vdots\\ t^n\end{pmatrix}$$

(۲.۳)

$$\Gamma_s=\underbrace{\begin{pmatrix}B(\circ/۵)&\circ&\cdots&\circ\\ \circ&\frac{۳}{۴}B(\circ/۵)-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(\circ/۵)&\cdots&\circ\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \circ&\circ&\cdots&(۱-\frac{n}{۴})B(\circ/۵)-\frac{n}{۲^n}\sqrt{\frac{۱}{۲}}B(\circ/۵)\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

بنابراین
$$M\Lambda(t) = M\Gamma_s T_n(t) = M\Gamma_s M^{-1}\phi(t) = P_s\phi(t),$$
که $P_s = M\Gamma_s M^{-1}$ یک ماتریس عملیاتی تصادفی مرتبه $(n+1)\times(n+1)$ است. درنتیجه انتگرال ایتوی هر تابع دلخواهی مانند f را می‌توان بدین صورت تقریب زد:
$$\int_0^t f(s)dB(s) \simeq P_s\phi(t). \tag{۳.۳}$$

۴ روش عددی

معادله انتگرال ایتو-ولترا غیرخطی در (۱.۱) را در نظر بگیرید و قرار دهید:
$$z_1(s) = a(s, Y(s)), \quad z_2 = b(s, Y(s)), \tag{۱.۴}$$
اکنون توابع $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را به‌وسیله روش چندجمله‌ای‌های برنشتاین به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:
$$z_1(s) \simeq B_n(z_1(s)) \simeq Z_1\phi(s), \quad z_2(s) \simeq B_n(z_1(s)) \simeq Z_2\phi(s), \tag{۲.۴}$$
که در آن بردارهای z_1 و z_2 به‌ترتیب ضرایب برنشتاین $Z_1(s)$ و $Z_2(s)$ اند. با استفاده از روابط (۵.۲) و (۳.۳) و (۲.۴) داریم:
$$\int_0^t z_1(s)ds \simeq Z_1\int_0^t \phi(s)ds = Z_1P\phi(t), \tag{۳.۴}$$
و
$$\int_0^t z_2(s)dB(s) \simeq Z_2\int_0^t \phi(s)dB(s) = Z_2P_s\phi(t). \tag{۴.۴}$$
از طرفی دیگر، با استفاده از روابط (۱.۱) و (۱.۴) رابطه زیر به‌دست می‌آید:
$$\begin{cases} t^\beta z_1(t) = a(t, Y_0 + \lambda_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)), \\ t^\beta z_2(t) = b(t, Y_0 + \lambda_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)). \end{cases} \tag{۵.۴}$$
از طرفی به کمک قضیه ۲.۲ و تعریف ۱.۲ به روابط زیر می‌رسیم:
$$\begin{cases} t^\beta z_1(t) = a(t, Y_0 + \lambda_1\int_0^t (t-s)^{(1-\alpha)-1}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)), \\ t^\beta z_2(t) = b(t, Y_0 + \lambda_1\int_0^t (t-s)^{(1-\alpha)-1}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)). \end{cases} \tag{۶.۴}$$
یا
$$\begin{cases} t^\beta z_1(t) = a(t, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)I_s^{1-\alpha}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)), \\ t^\beta z_2(t) = b(t, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)I_s^{1-\alpha}z_1(s)ds + \lambda_2\int_0^t z_2(s)dB(s)). \end{cases} \tag{۷.۴}$$
با توجه به قضیه ۲.۲ و با جای‌گذاری روابط (۲.۴) و (۳.۴) و (۴.۴) در رابطه (۷.۴) ، رابطه زیر به‌دست می‌آید:
$$\begin{cases} t^\beta Z_1\phi(t) = a\left(t, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)Z_1P^{1-\alpha}\phi(t) + \lambda_2 Z_2P_s\phi(t)\right), \\ t^\beta Z_2\phi(t) = b\left(t, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)Z_1P^{1-\alpha}\phi(t) + \lambda_2 Z_2P_s\phi(t)\right). \end{cases} \tag{۸.۴}$$
حال با جای‌گذاری $n+1$ نقاط هم محلی نیوتن-کاتس $t_i = \dfrac{2i-1}{2(n+1)}$ برای $i = 1, 2, \dots, n+1$، در (۸.۴) داریم:
$$\begin{cases} (t_i)^\beta Z_1\phi(t_i) = a\left(t_i, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)Z_1P^{1-\alpha}\phi(t_i) + \lambda_2 Z_2P_s\phi(t_i)\right), \\ (t_i)^\beta Z_2\phi(t_i) = b\left(t_i, Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)Z_1P^{1-\alpha}\phi(t_i) + \lambda_2 Z_2P_s\phi(t_i)\right). \end{cases} \tag{۹.۴}$$
با حل این دستگاه معادلات جبری غیرخطی به روش نیوتن و به‌دست آوردن بردارهای ضرایب Z_1 و Z_2، جواب تقریبی مساله به‌صورت زیر به‌دست می آید:
$$t^\beta Y_n(t) = Y_0 + \lambda_1\Gamma(1-\alpha)Z_1P^{1-\alpha}\phi(t) + \lambda_2 Z_2P_s\phi(t).$$

۵ آنالیز همگرایی

قضیه ۱.۵. [۲۲] فرض کنیم $B_n(f(t))$ بسط برنشتاین از توابع $f(t)$ باشد. برای همه توابع $f \in C[0,1]$ دنباله $\{B_n(f(t)), n = 1, 2, \ldots\}$ به‌طور یکنواخت همگرا به f است.

این قضیه می‌گوید برای هر $f \in C[0,1]$ و برای هر ε، عدد n وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|B_n(f) - f\| < \varepsilon.$$

فرض کنید $\|\cdot\|$ نرم در فضای $L^2[0,1]$ باشد. تابع خطا را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_n(t) = Y(t) - Y_n(t),$$

که $Y(t)$ و $Y_n(t)$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای معادله (۱.۱) اند. بنابراین

$$t^{\beta}(Y(t) - Y_n(t)) = \lambda_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(z_1(s) - \hat{z}_1(s))ds + \lambda_2 \int_0^t (z_2(s) - \hat{z}_2(s))dB(s),$$

که در آن $Z_i(s)$ برای $i = 1, 2$ در (۱.۴) تعریف شده‌اند و $\hat{Z}_i(s)$ برای $i = 1, 2$ تقریب روش چندجمله‌ای‌های برنشتاین، $Z_i(s)$ برای $i = 1, 2$ است.

قضیه ۲.۵. فرض کنیم که $Y(t)$ و $Y_n(t)$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۱.۱) باشند. همچنین فرض کنیم

۱- برای هر T و d، ثابت D ، که تنها به T و d وابسته است، وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $0 \leqslant t \leqslant T$ و هر $|Y| \leqslant d$، $|z|$ داریم:

$$|a(s,z) - a(s,Y)| + |b(s,z) - b(s,Y)| \leqslant D|z - Y|.$$

۲- ضرایب در شرط رشد خطی صدق می‌کنند؛ یعنی:

$$|a(s,z) + b(s,z)| \leqslant D(1 + |z|).$$

۳- $E\left(|z|^2\right) < \infty$.

در این‌صورت جواب تقریبی $Y_n(t)$ در $L^2[0,1]$ به $Y(t)$ همگرا است.

اثبات. داریم:

$$e_n(t) = \lambda_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(z_1(s) - \hat{z}_1(s))ds + \lambda_2 \int_0^t (z_2(s) - \hat{z}_2(s))dB(s),$$

با توجه به این‌که $t \in [0,1]$ و $\mu = \sup|(t-s)^{-\alpha}|$ داریم:

$$E|e_n(t)|^2 \leqslant 2\left(\mu|\lambda_1|^2 E|\int_0^t (z_1(s) - \hat{z}_1(s))ds|^2 + |\lambda_2|^2 E|\int_0^t (z_2(s) - \hat{z}_2(s))dB(s)|^2\right).$$

از قضیه ۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
E|e_n(t)|^2 &\leqslant 2\left(\mu|\lambda_1|^2 \int_0^t E|(z_1(s) - \hat{z}_1(s))|^2 ds + |\lambda_2|^2 \int_0^t E|(z_2(s) - \hat{z}_2(s))|^2 ds\right) \\
&\leqslant 8\Big[\mu|\lambda_1|^2 \int_0^t E|z_1(s) - z_1^n(s)|^2 ds + \mu|\lambda_1|^2 \int_0^t E|z_1^n(s) - \hat{z}_1(s)|^2 ds \\
&+ |\lambda_2|^2 \int_0^t E|z_2(s) - z_2^n(s)|^2 ds + |\lambda_2|^2 \int_0^t E|z_2^n(s) - \hat{z}_2(s)|^2 ds\Big],
\end{aligned}$$

که در آن $z_1^n(s) = a(s, Y_n(s))$ و $z_2^n(s) = b(s, Y_n(s))$ است.
از قضیه ۱.۵ می‌دانیم که $n > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر ε داریم:

$$E|z_j^n(s) - \hat{z}_j(s)|^2 \leqslant \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{16|\lambda_j|^2}, \quad j = 1, 2.$$

بر این اساس

$$E|e_n(t)|^2 \leqslant \varepsilon_1 + 8\left(\mu|\lambda_1|^2 \int_0^t E|z_1(s) - z_1^n(s)|^2 ds + |\lambda_2|^2 \int_0^t E|(z_2(s) - z_2^n(s)|^2 ds\right),$$

با استفاده از شرط لیپ شیتز داریم:

$$E|e_n(t)|^2 \leqslant \varepsilon_1 + 8\left(\mu|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2\right) D^2 \int_0^t E|e_n(s)|^2 ds. \tag{۱.۵}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱.۵) و نامساوی گرانول داریم:

$$\|e_n(t)\| = E|e_n(t)|^2 \longrightarrow 0,$$

پس جواب تقریبی $Y_n(t)$ در $L^2[0, 1]$ همگرا به $Y(t)$ می‌باشد. □

۶ مثال‌های عددی

در این بخش برای بیان کارایی روش پیشنهادی، به بیان نتایج عددی دو مثال می‌پردازیم. فرض کنیم $Y(t)$ جواب دقیق و $Y_n(t)$ جواب تقریبی محاسبه‌شده معادله (۱.۱) است. خطا در بازه $[0, 1]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|E\|_\infty = \max|e_n(t_i)|, \qquad 0 \leqslant t_i \leqslant 1,$$

که در آن $e_n(t_i) = Y(t_i) - Y_n(t_i)$.

مثال ۱.۶. [۲۳] معادلات انتگرال ولترا تصادفی نوع سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$t^\beta Y(t) = Y_0 + \int_0^t Y(s)(\gamma - Y(s))ds + \int_0^t Y(s)dB(s), \quad t \in [0, 1),$$

که جواب تحلیلی آن به‌صورت زیر می‌باشند:

$$Y(t) = \frac{e^{0.5t} + B(t)}{2 + \int_0^t e^{0.5s} + B(s)ds}.$$

در این مثال $\gamma = 1$، $Y_0 = \frac{1}{2}$ و $\beta = 0$ در نظر گرفته شده است. نتایج عددی برای این مثال در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. در جدول ۲ ماکزیمم خطای مطلق و اندازه پردازش مرکزی برحسب ثانیه برای روش چندجمله‌ای‌های برنشتاین و روش چندجمله‌ای‌های فیبوناچی داده شده است [۲۴]. $\bar{Y}_E$ میانگین خطا و S_E انحراف معیار خطا در k تکرار است. دو ستون آخر کران پائین و کران بالای بازه‌ی اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا را نشان می‌دهند. همچنین $n = 4$ و $k = 100$ می‌باشند.

جدول ۱: میانگین، انحراف معیار و بازه‌ی اطمینان برای میانگین خطای مثال ۱.۶

n	$\bar{Y}_E$	S_E	بازه‌ی اطمینان ٪۹۵	
			کران پایین	کران بالا
۰٫۱	۰/۰۲۴۱۲۵۶	۰/۰۰۷۱۶۰۸	۰/۰۲۳۸۹۱۲	۰/۰۲۴۴۶۲۰
۰٫۲	۰/۰۴۷۲۷۶۰	۰/۰۰۹۶۷۷۱	۰/۰۴۶۶۹۰۷	۰/۰۴۷۸۶۱۳
۰٫۳	۰/۰۷۳۸۶۱۳	۰/۰۱۲۸۰۰۴	۰/۰۷۳۰۰۱۳	۰/۰۷۴۷۱۹۸
۰٫۴	۰/۰۹۹۳۵۹۲	۰/۰۱۰۷۱۰۶	۰/۰۹۸۶۸۳۴	۰/۱۲۰۰۳۴۵
۰٫۵	۰/۱۲۰۹۲۰۵	۰/۰۱۵۳۰۹۳	۰/۱۱۹۸۴۱۵	۰/۱۲۱۹۹۹۲
۰٫۶	۰/۱۴۴۸۵۰۷	۰/۰۱۵۹۲۴۷	۰/۱۴۳۷۱۷۶	۰/۱۴۵۹۸۳۴
۰٫۷	۰/۱۶۵۲۵۹۴	۰/۰۱۸۷۷۲۱	۰/۱۶۳۸۷۷۰	۰/۱۶۶۶۴۱۷
۰٫۸	۰/۱۹۰۳۰۸۰	۰/۰۲۳۳۴۷۵	۰/۱۸۹۹۴۷۴	۰/۱۹۳۵۱۳۸
۰٫۹	۰/۲۱۲۰۵۳۴	۰/۰۲۵۹۲۸۲	۰/۲۱۰۰۴۳۶	۰/۲۱۴۰۶۳۰

جدول ۲: مقایسه ماکزیمم نُرم خطا و زمان پردازش مثال ۱.۶

روش ها	ماکزیمم خطا		زمان محاسبات (ثانیه)
	$\bar{Y}_E$	S_E	
روش پیشنهادی مقاله حاضر	۰٫۰۷۹۴	۰٫۰۴۷۶	۳۱۷۷٫۶
روش مقاله [۲۴]	۰٫۰۸۰۶	۰٫۰۵۰۸	۳۳۵۰٫۴

مثال ۲.۶. [۲۵] معادله انتگرال ولترا تصادفی غیرخطی نوع سوم زیر را در نظر بگیرید:

$$t^{\beta}Y(t) = 1 + \int_0^t Y(s)(\gamma - Y^2(s))ds + 0.25\int_0^t Y(s)dB(s), \quad t \in [0,1),$$

جواب تحلیلی به‌صورت زیر است:

$$Y(t) = \frac{\exp(0.25B(t))}{\sqrt{1 + 2\int_0^t \exp(0.5B(t))ds}}.$$

در این مثال $\gamma = \frac{1}{32}$ ،$\beta = 1$ در نظر گرفته شده است. نتایج عددی برای این مثال درجدول ۳ و ۴ نشان داده شده است. در جدول ۲ ماکزیمم خطای مطلق و اندازه پردازش مرکزی بر حسب ثانیه برای روش چند جمله‌ای‌های برنشتاین و روش [۲۳] داده شده است. $\bar{Y}_E$ میانگین خطا و S_E انحراف معیار خطا در k تکرار است. همچنین کران پائین و کران بالای بازه‌ی اطمینان ٪۹۵ برای میانگین خطا را به ازای $n = 4$ و $k = 100$ نشان داده شده است.

جدول ۳: میانگین، انحراف معیار وبازه‌ی اطمینان برای میانگین خطای مثال ۲.۶

n	$Y(t)$	S_E	بازه‌ی اطمینان ٪۹۵	
			کران بالا	کران پایین
۰٫۱	۰/۰۹۱۲۷۳۰	۰/۰۶۴۶۳۲۴	۰/۰۷۷۹۵۷۴	۰/۱۰۴۵۸۸۵
۰٫۲	۰/۰۶۲۳۳۷۲	۰/۰۴۲۹۰۹۸	۰/۰۵۳۲۷۹۲	۰/۰۷۱۳۹۵۱
۰٫۳	۰/۰۴۲۹۸۳۹	۰/۰۲۹۱۶۳۴	۰/۰۳۶۶۲۰۳	۰/۰۴۹۳۴۷۵
۰٫۴	/۰۳۳۶۸۴۱	۰/۰۲۱۷۴۸۶	۰/۰۲۸۷۷۳۸	۰/۰۳۸۵۹۴۴
۰٫۵	۰/۰۳۷۱۹۳۱	۰/۰۱۶۰۸۲۹	۰/۰۳۳۳۹۳۲	۰/۰۴۰۹۹۲۹
۰٫۶	۰/۰۴۸۳۲۵۴	۰/۰۱۲۰۱۶۳	۰/۰۴۵۳۲۲۶	۰/۰۵۱۳۲۸۲
۰٫۷	۰/۰۶۲۹۶۷۸	۰/۰۰۷۴۸۰۶	۰/۰۶۰۸۵۳۹	۰/۰۶۵۰۸۱۵
۰٫۸	۰/۰۷۹۰۶۷۵	۰/۰۰۴۳۹۸۴	۰/۰۷۷۵۵۷۸	۰/۰۸۰۵۷۷۲
۰٫۹	۰/۰۹۷۱۱۸۲	۰/۰۰۳۰۱۸۷	۰/۰۹۵۹۴۲۷	۰/۰۹۸۴۲۱۲

جدول ۴: مقایسه ماکزیمم نرم خطا و زمان پردازش مثال ۲۶

روش ها	ماکزیمم خطا $\bar{Y}_E$	S_E	زمان محاسبات (ثانیه)
روش پیشنهادی مقاله حاضر	۰/۱۳۵۹	۰/۰۶۸۲	۸۸۰/۳
روش مقاله [۲۴]	۰/۱۳۶۳	۰/۰۷۴۸	۸۸۹/۴

۷ نتیجه‌گیری

از آنجا که حل تحلیلی بسیاری از معادلات انتگرالی تصادفی غیرخطی نوع سوم غیرممکن و یا پیچیده است، از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود. بنابراین ،در این مقاله یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال تصادفی نوع سوم با استفاده از روش ماتریس عملیاتی سری قطع شده چندجمله‌ای‌های برنشتاین ارائه گردید. نتایج عددی به‌دست آمده از دو مثال ارائه‌شده، گویای کارایی و دقت این روش است.

فهرست منابع

[1] Allaei, S.S., Z.-w. Yang, and H. Brunner, Existence, uniqueness and regularity of solutions to a class of third-kind Volterra integral equations. Journal of Integral Equations and Applications, 2015. **27**(3): p. 325-342.

[2] Allaei, S.S., Z.-W. Yang, and H. Brunner, Collocation methods for third-kind VIEs. IMA Journal of Numerical Analysis, 2017. **37**(3): p. 1104-1124.

[3] Asanov, A., K. Matanova, and R. Asanov, A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. Kuwait Journal of Science, 2017. **44**(1).

[4] Cao, Y. and Y. Xu, Singularity preserving Galerkin methods for weakly singular Fredholm integral equations. The Journal of Integral Equations and Applications, 1994: p. 303-334.

[5] Chen, X., Y. Qi, and C. Yang, New existence theorems about the solutions of some stochastic integral equations. arXiv preprint arXiv:1211.1249, 2012.

[6] Hashemi, B.H., M. Khodabin, and K. Maleknejad, Numerical method for solving linear stochastic Itô-Volterra integral equations driven by fractional Brownian motion using hat functions. Turkish Journal of Mathematics, 2017. **41**(3): p. 611-624.

[7] Hu, Y. and B. Øksendal, Linear Volterra backward stochastic integral equations. Stochastic Processes and their Applications, 2019. **129**(2): p. 626-633.

[8] Klebaner, F.C., Introduction to stochastic calculus with applications. 2012: World Scientific Publishing Company.

[9] Kloeden, P.E. and E. Platen, Time Discrete Approximation of Deterministic Differential Equations, in Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. 1992, Springer. p. 277-303.

[10] Maleknejad, K., J. Rashidinia, and T. Eftekhari, A new and efficient numerical method based on shifted fractional□order Jacobi operational matrices for solving some classes of two□dimensional nonlinear fractional integral equations. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2021. **37**(3): p. 2687-2713.

[11] Mandal, B.N. and S. Bhattacharya, Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials. Applied Mathematics and computation, 2007. **190**(2): p. 1707-1716.

[12] Mirzaee, F. and E. Hadadiyan, A new numerical method for solving two-dimensional Volterra–Fredholm integral equations. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2016. **52**(1): p. 489-513.

[13] Mirzaee, F. and S.F. Hoseini, Numerical approach for solving nonlinear stochastic Itô-Volterra integral equations using Fibonacci operational matrices. Scientia Iranica, 2015. **22**(6): p. 2472-2481.

[14] Nemati, S. and P.M. Lima. Numerical solution of a third-kind Volterra integral equation using an operational matrix technique. in 2018 European Control Conference (ECC). 2018. IEEE.

[15] Okayama, T., T. Matsuo, and M. Sugihara, Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010. **234**(4): p. 1211-1227.

[16] Oksendal, B., Stochastic differential equations: an introduction with applications. 2013: Springer Science & Business Media.

[17] Pandey, R.K. and B. Mandal, Numerical solution of a system of generalized Abel integral equations using Bernstein polynomials. J. Adv. Res. Sci. Comput, 2010. **2**(2): p. 44-53.

[18] Pedas, A. and G. Vainikko, Smoothing transformation and piecewise polynomial projection methods for weakly singular Fredholm integral equations. Communications on Pure & Applied Analysis, 2006. **5**(2): p. 395.

[19] Powell, M.J.D., Approximation theory and methods. 1981: Cambridge university press.

[20] Saito, Y. and T. Mitsui, Simulation of stochastic differential equations. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1993. **45**(3): p. 419-432.

[21] Singh, S. and S. Saha Ray, Stochastic operational matrix of Chebyshev wavelets for solving multidimensional stochastic Itô–Volterra integral equations. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2019. **17** (03): p. 1950007.

[22] Song, H., Z. Yang, and H. Brunner, Analysis of collocation methods for nonlinear Volterra integral equations of the third kind. Calcolo, 2019. **56**(1): p. 7.

[23] SUSAN MILTON, J. and C.P. TSOKOS, A stochastic system for communicable diseases. International Journal of Systems Science, 1974. **5**(6): p. 503-509.

[24] Tripathi, M.P., et al., A new numerical algorithm to solve fractional differential equations based on operational matrix of generalized hat functions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013. **18**(6): p. 1327-1340.

[25] Yaghoobnia, A., M. Khodabin, and R. Ezzati, Numerical solution of stochastic Itˆo-Volterra integral equations based on Bernstein multi-scaling polynomials. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2021. **36**(3): p. 317-329.

Numerical Solution of Nonlinear Stochastic Integral Equation of the Third Kind by Stochastic Operational Matrix Based on Bernstein Plonomials

M. Khodabin [†] **, P. Jami**

Department of Mathematics, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran

Communicated by: Jalil Rashidnia

Received: 2021/6/30 Accepted: 2022/1/3

Abstract: In the present research, we were numerically solved nonlinear stochastic integral equation of the third kind by stochastic operational matrix based on Bernstein polynomials. For this aim, we were obtaining the Bernstein polynomials operation matrix and the stochastic operation matrix. Also we approximated all the functions in the Volterra integral equation of the third kind using the Bernstein polynomials series and then use the Bernstein polynomials operation matrix. By doing this, solving the third kind of stochastic Volterra integral equation turns into solving a system of algebraic equations, which could be a more suitable solution. Then we were analysed the convergence of the proposed method and provide several numerical examples to evaluate the accuracy and efficiency of this method. The current results were obtained by running a program written in Mathematica software.

Keywords: Bernstein polynomials, Stochastic integral equation of the third kind, Stochastic integration operational matrixes.

[†] Corresponding author.
E-mail addresses: m-khodabin@kiau.ac.ir