مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۱-۱۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38918.1974

اندازه کارلسون و انواع عملگرهای ترکیبی روی فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقدار

سپیده نصراصفهانی [۱]
مصطفی حسنلو [۲] × و ابراهیم عباسی [۳]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
(۲) دانشکده فنی و مهندسی خوی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مهاباد، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۹

چکیده:
در این مقاله، عملگر ترکیبی C_ϕ و همچنین عملگرهای $C_\phi D$ و DC_ϕ (حاصل‌ضرب عملگر ترکیبی و عملگر مشتق) را روی فضاهای بسوف وزن‌دار بردار مقدار $\mathcal{B}_v^p(X)$ و همچنین فضاهای بسوف وزن‌دار بردار مقدار ضعیف $w\mathcal{B}_v^p(X)$، به‌ازای فضای باناخ مختلط X و $1 \leq p < 2$ در نظر می‌گیریم و شرط‌های معادلی برای کران‌داری و فشردگی این عملگرها روی فضاهای مذکور، با استفاده از اندازه کارلسون، به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: عملگر ترکیبی، فضای بسوف وزن‌دار بردار مقدار، اندازه کارلسون، فضای بسوف وزن‌دار بردار مقدار ضعیف، کران‌داری، فشردگی

رده‌بندی ریاضی: 47B38; 46E40; 30H20.

۱ تعاریف و مقدمات

فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط، $\mathbb{D}$ گوی یکه باز در میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و $H(X)$ نشان‌دهنده‌ی کلاس همه توابع تحلیلی $f : \mathbb{D} \to X$ باشد. فرض کنیم $dA(z) = rdrd\theta$، اندازه مساحت نرمال‌شده روی $\mathbb{D}$ تعریف شود و تابع وزن v، یک تابع اکیداً مثبت، پیوسته و کران‌دار $v(r)$ به‌ازای $0 \leq r < 1$ باشد، به‌طوری که برای $0 \leq r < 1$ انتگرال‌پذیر است. هرگاه $p \geq 1$، فضای برگمن وزن‌دار بردار مقدار که با نماد $A_v^p(X)$ نمایش داده می‌شود، شامل تمام توابع $f \in H(X)$ است به‌طوری که

$$||f||^p_{A_v^p(X)} = \int_{\mathbb{D}} ||f(z)||^p v(z) dA(z) < \infty.$$

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: sepide.nasr@gmail.com (S. Nasresfahani)، m.hassanlou@uut.ac.ir (M. Hassanlou)، ebrahimabbasi81@gmail.com (E. Abbasi)

هرگاه $X=\mathbb{C}$ و $v=۱$ فرض شود، فضای $A^۲$ را خواهیم داشت که فضای برگمن بدون‌وزن نامیده می‌شود. همچنین به‌ازای $X=\mathbb{C}$ و $v(z)=(۱-|z|^۲)^\alpha$ هرگاه $\alpha>-۱$ باشد، فضای برگمن وزن‌دار استاندارد $A^p_\alpha(\mathbb{D})$، به‌دست می‌آید. به‌ازای $p\geq ۱$، فضای $A^p_\alpha(X)$ یک فضای باناخ است. برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر در خصوص این فضاها، می‌توان به مراجع [۲] و [۹] رجوع کرد.

تعریف ۱.۱. هرگاه $p\geq ۱$، فضای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقدار $\mathcal{B}^p_v(X)$ از تمام توابع تحلیلی $f\in H(X)$ تشکیل شده است که در خاصیت زیر صدق می‌کنند:

$$||f||_{\mathcal{B}^p_v(X)}=||f(\circ)||+||f'||_{A^p_v(X)}<\infty.$$

با این نرم، فضاهای $\mathcal{B}^p_v(X)$، به‌ازای $p\geq ۱$، باناخ خواهند بود. همچنین هرگاه $X=\mathbb{C}$ و $v=۱$ فرض شود، فضای $\mathcal{D}=\mathcal{D}^۲$ را خواهیم داشت که همان فضای دیریکله کلاسیک است. به‌علاوه به‌ازای $۱\leq p<q$، $\mathcal{B}^q_v(X)\subset\mathcal{B}^p_v(X)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم ϕ تابعی تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد به‌طوری که $\phi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. در این صورت عملگر ترکیبی C_ϕ که یک عملگر خطی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_\phi f(z)=fo\phi(z),\qquad f\in H(X),\quad z\in\mathbb{D}.$$

عملگر DC_ϕ، بیان‌گر مشتقِ عملگر ترکیبی C_ϕ است. $C_\phi D$ نیز به‌ازای تابع تحلیلی f، به‌صورت $C_\phi D(f)=f'o\phi$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $\xi\in\mathbb{D}$ به‌طوری که $|\xi|=۱$ و $\circ<h<۲$. همچنین فرض کنیم

$$S(\xi,h)=\{z\in\mathbb{D}:\ |z-\xi|<h\}$$

و μ یک اندازه بورل مثبت متناهی روی $\mathbb{D}$ باشد. آنگاه μ را یک اندازه کارلسون می‌نامیم، هرگاه ثابت مثبت C چنان موجود باشد که برای هر ξ و h به‌طوری که $|\xi|=۱$ و $\circ<h<۲$، داشته باشیم $\mu(S(\xi,h)\leq Ch^۲$. همچنین اندازه μ، یک اندازه کارلسون فشرده نامیده می‌شود، هرگاه

$$\lim_{h\to\circ}\sup_{|\xi|=۱}\frac{\mu(S(\xi,h))}{h^۲}=\circ.$$

اندازه کارلسون در مطالعات بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در این باره می‌توان به مراجع [۱۰]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶] و [۲۳] رجوع کرد.

فرض کنیم $n_\phi(w)$ نشان‌دهنده‌ی عدد اصلی † مجموعه $\phi^{-۱}(w)$ باشد، در این صورت

$$\int_{\mathbb{D}}|(fo\varphi)'|^۲dA=\int_{\mathbb{D}}|f'(\varphi)|^۲|\varphi'|^۲dA=\int|f'|^۲n_\varphi dA.$$

لذا کران‌داری عملگر ترکیبی C_ϕ روی فضای دیریکله $\mathcal{D}$، معادل است با این‌که $n_\phi dA$ یک اندازه کارلسون روی فضای برگمن تعریف شود. متر شبه‌هذلولوی روی $\mathbb{D}$ به‌صورت $\psi(z,w)=\frac{|z-w|}{|۱-\bar{z}w|}$ تعریف می‌شود. اگر به‌ازای $\circ<\eta<۱$، قرار دهیم

$$D_\eta(w)=\{z\in\mathbb{D}:\psi(z,w)<\eta\},$$

آنگاه شرط این‌که $n_\phi dA$ یک اندازه کارلسون ‡ برای فضای برگمن باشد، معادل است با وجود ثابت C به‌طوری که

$$\int_{D_\eta(z)}n_\varphi dA\leq C|D_\eta(z)|,\quad z\in\mathbb{D}. \tag{۱.۱}$$

در این صورت عبارت (۱.۱) معادل است با این‌که

$$\int_{S(\xi,h)}n_\varphi dA\leq C|S(\xi,h)| \tag{۲.۱}$$

که البته ثابت C در عبارات (۱.۱) و (۲.۱) لزوماً یکسان نیست.

Cardinality†
measure Carleson‡

تعریف **۴.۱.** فرض کنیم $N_{۲}(\phi, w)$، نشان‌دهنده‌ی تعداد صفرهای $\phi(z) - w$ باشد. به‌ازای $۱ \leq p < ۲$ و $w \in \mathbb{D}$، تابع شمارش‌گر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$N_{p,v}(\phi, w) = \sum \frac{v(z)}{|\phi'(z)|^{۲-p}}$$

به‌طوری که جمع‌بندی بر روی صفرهای $\phi - w$ انجام شود. در حالت خاص، به‌ازای $w \notin \phi(\mathbb{D})$، قرار می‌دهیم $N_{p,v}(\phi, w) = ۰$. می‌توان مشاهده کرد که به‌ازای مقادیر $v = ۱$ و $p = ۲$، تابع شمارنده $N_{۲}(\phi, w)$ را خواهیم داشت. حال اندازه $\mu_{p,v}$ را روی $\mathbb{D}$ به ازای $۱ \leq p < ۲$، به‌صورت $d\mu_{p,v} = N_{p,v}(\phi, w)dA(w)$ تعریف می‌کنیم.

اندازه کارلسون توسط نویسندگان بسیاری در حالت‌های اسکالر و همچنین بردار مقدار در فضاهای متفاوتی از توابع تحلیلی، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال در [۸] هاستینگ، مشخص‌سازی‌هایی برای اندازه کارلسون بر روی فضای برگمن $A^p(\mathbb{D})$، ارائه کرد. سپس این مشخص‌سازی‌ها به فضای $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ توسعه یافتند، [۱۹]. در [۱۳] نیز لاکینگ روش‌های دیگری برای اثبات چنین مشخص‌سازی‌هایی آورده است. همچنین کومار در [۱۱]، سیما و وگن در [۳]، نوالینا در [۱۷]، وو و یانگ در [۲۲] و نویسندگان دیگری مشخص‌سازی این اندازه و کاربرد آن در اثبات ویژگی‌های توابع را مورد بررسی قرار داده‌اند.

تعریف **۵.۱.** فرض کنیم $۱ \leq p < ۲$ و μ یک اندازه بورل مثبت روی $\mathbb{D}$ باشد. در این صورت
الف) μ را یک اندازه کارلسون برای $A^p_v(X)$ نامیم، اگر و تنها اگر $A^p_v(X) \subset L^p(\mu, X)$ و نگاشت همانی

$$I : A^p_v(X) \to L^p(\mu, X)$$

کران‌دار باشد.
ب) μ را یک اندازه کارلسون فشرده روی $A^p_v(X)$ می‌نامیم، اگر و تنها اگر $A^p_v(X) \subset L^p(\mu, X)$ و نگاشت همانی از $A^p_v(X)$ به $L^p(\mu, X)$ فشرده باشد.

ملاحظه **۶.۱.** قسمت (الف) از تعریف بالا، معادل است با بیان این‌که: μ یک اندازه کارلسون روی $A^p_v(X)$ است اگر و تنها اگر ثابت C چنان موجود باشد که برای هر $f \in A^p_v(X)$،

$$\int_{\mathbb{D}} ||f(z)||^p d\mu(z) \leq C||f||^p_{A^p_v(X)}.$$

با در نظر گرفتن $v(z) = (۱ - |z|^{۲})^\alpha$، لم زیر را خواهیم داشت که در [۹] اثبات شده است.

لم **۷.۱.** برای هر $\alpha > -۱$ ، $p > ۰$ و تابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ ، هرگاه قرار دهیم $g(z) = (۱ - |z|^{۲})^\alpha$، آنگاه ثابت C چنان موجود است که

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (۱ - |z|^{۲})^\alpha \leq C[|f(۰)|^p + \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p (۱ - |z|^{۲})^\alpha dA(z)]$$

و همچنین

$$|f(۰)|^p + \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p (۱ - |z|^{۲})^\alpha dA(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (۱ - |z|^{۲})^\alpha dA(z).$$

لم بالا به‌سادگی نتیجه می‌دهد که $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ است اگر و تنها اگر $f' \in A^p_{\alpha+p}(\mathbb{D})$ لذا با استفاده از این نکته، می‌توان گزاره زیر را ثابت کرد که به‌دلیل سادگی، ازاثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره **۸.۱.** فرض کنیم $p > ۱$، $\alpha > -۱$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. در این صورت عملگر $DC_\phi : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \to A^p_\alpha(\mathbb{D})$ کران‌دار است اگر و تنها اگر μ روی $A^p_{\alpha+p}(\mathbb{D})$ اندازه کارلسون باشد.

رفتار عملگرهای ترکیبی روی فضاهای مختلفی از توابع تحلیلی مانند فضای برگمن، فضای هاردی، فضای دیریکله و از نوع دیریکله، فضای بلاخ و ... توسط ریاضیدانان متعددی بررسی شده است. برای مثال می‌توان مراجع [۱۰]، [۵]، [۶]، [۷]، [۲۱] و [۲۳] را در نظر گرفت. همچنین کتاب‌های [۴] و [۱۸] دارای مطالب مفیدی در این زمینه‌اند.
در [۲۳]، کران‌داری و فشردگی عملگرهای ترکیبی روی فضای دیریکله وزن‌دار بررسی شده است. در [۱۶] نیز فشردگی عملگر ترکیبی روی فضاهای هاردی و برگمن مطالعه شده است. عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی فضاهای برگمن و هاردی بردار مقدار ضعیف نیز در [۷] توسط حسنلو، واعظی و وانگ مطالعه شده‌اند. در مقاله‌ی حاضر، ما به بررسی کران‌داری و فشردگی علمگر ترکیبی C_ϕ و عملگرهای DC_ϕ و $C_\phi D$، بر روی فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقداری قوی $\mathcal{B}^p_v(X)$ و همچنین فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقدار ضعیف $w\mathcal{B}^p_v(X)$ برای $۱ \leq p < ۲$ می‌پردازیم.

۲ عملگرهای ترکیبی روی فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقداری قوی

در این بخش شرط‌های معادلی برای کران‌داری و همچنین فشردگی عملگر ترکیبی C_ϕ روی فضای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقداری $\mathcal{B}_v^p(X)$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $۱ \leq p < ۲$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند:

الف) عملگر $C_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to \mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار است.

ب) عملگر $DC_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to A_v^p(X)$ کران‌دار است.

پ) $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون روی $A_v^p(X)$ است.

ت) نگاشت همانی $I : A_v^p(X) \to L^p(\mu, X)$ کران‌دار است.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. هرگاه $C_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to \mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار باشد، برای هر $f \in \mathcal{B}_v^p(X)$، داریم $DC_\phi f = (fo\phi)'$. لذا با استفاده از تعریف نرم در فضای $\mathcal{B}_v^p(X)$، (ب) به دست می‌آید.

ب $\Leftarrow$ پ. فرض کنیم DC_ϕ از $\mathcal{B}_v^p(X)$ به $A_v^p(X)$ کران‌دار باشد. در این صورت برای هر $f \in \mathcal{B}_v^p(X)$، ثابت C چنان موجود است که $||(fo\phi)'||_{A_v^p(X)} \leq C||f||_{\mathcal{B}_v^p(X)}$. بنابراین

$$\int_{\mathbb{D}} ||f'(\phi(z)||^p|\phi'(z)|^p v(z)dA(z) \leq C(\int_{\mathbb{D}} ||f'(z)||^p v(z)dA(z) + |f(\circ)|). \qquad (۱.۲)$$

با تغییر متغیر $\phi(z) = w$، خواهیم داشت $dA(w) = |\phi'(z)|^۲ dA(z)$. لذا

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} ||f'(\phi(z))||^p|\phi'(z)|^p v(z)dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} ||f'(w)||^p N_{p,v}(\phi, w)dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} ||f'(w)||^p d\mu_{p,v}(w).\end{aligned} \qquad (۲.۲)$$

حال برای هر تابع $g \in A_v^p(X)$ ، تابع f را به صورت $f(z) = \int_\circ^z g(w)dw$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f \in \mathcal{B}_v^p(X)$ و $f(\circ) = \circ$. بنابراین نابرابری‌های (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌دهند که به ازای ثابت C،

$$\int_{\mathbb{D}} ||g(z)||^p d\mu_{p,v}(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} ||g(z)||^p v(z)dA(z).$$

لذا مطابق با تعریفی که در تذکر ۶.۱ ارائه کردیم، $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون برای $A_v^p(X)$است .

پ $\Leftrightarrow$ ت. طبق تعریف ۵.۱ گزاره های (پ) و (ت) معادل‌اند.

پ $\Leftarrow$ الف. فرض کنیم $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون روی $A_v^p(X)$ باشد. در این صورت برای هر $g \in A_v^p(X)$، ثابت C وجود دارد به‌طوری که

$$\int_{\mathbb{D}} ||g(z)||^p d\mu_{p,v}(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} ||g(z)||^p v(z)dA(z).$$

اما برای هر $f \in \mathcal{B}_v^p(X)$ داریم $f' \in A_v^p(X)$. پس با استفاده از عبارت (۱.۲)، به‌ازای ثابت‌های C و $C_۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}||(fo\phi)'||^p_{A_v^p(X)} &= \int_{\mathbb{D}} ||(fo\phi)'(z)||^p v(z)dA(z) = \int_{\mathbb{D}} ||f'(z)||^p d\mu_{p,v}(z) \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} ||f'(z)||^p v(z)dA(z) \leq C_۱||f||^p_{\mathcal{B}_v^p(X)}.\end{aligned}$$

از طرفی $\mathcal{B}_v^p(X)$ یک فضای باناخ است و تابع ارزیاب در $\phi(\circ)$، یک عملگر خطی پیوسته و بنابراین کراندار روی $\mathcal{B}_v^p(X)$ است، لذا با استفاده از (۱.۲) و به ازای ثابت‌های $C_۱$ و $C_۲$ داریم

$$\begin{aligned}||C_\phi(f)||_{\mathcal{B}_v^p(X)} &= ||(fo\phi)'||^p_{A_v^p(X)} + ||f(\phi(\circ))|| \\ &\leq C||f||^p_{\mathcal{B}_v^p(X)} + C_۱||f||^p_{\mathcal{B}_v^p(X)} \\ &\leq C_۲||f||^p_{\mathcal{B}_v^p(X)}.\end{aligned} \qquad (۳.۲)$$

بنابراین عملگر C_ϕ از $\mathcal{B}_v^p(X)$ به $\mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار است.

□

ملاحظه **۲.۲**. عملگر ترکیبی $C_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to \mathcal{B}_v^p(X)$ فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنباله کران‌دار f_n در $\mathcal{B}_v^p(X)$ که f_n روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد، داشته باشیم $||C_\phi(f_n)||_{\mathcal{B}_v^p(X)} \to ۰$. به طور مشابه می‌توان فشردگی عملگر $DC_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to A_v^p(X)$ را نیز تعریف کرد.

قضیه **۳.۲**. فرض کنیم $۱ \leq p < ۲$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند:

الف) عملگر $C_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to \mathcal{B}_v^p(X)$ فشرده است.

ب) عملگر $DC_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to A_v^p(X)$ فشرده است.

پ) $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون فشرده روی $A_v^p(X)$ است.

ت) نگاشت همانی $I : A_v^p(X) \to L^p(v, X)$ فشرده است.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. واضح است.

ب $\Leftarrow$ پ. فرض کنیم $DC_\phi : \mathcal{B}_v^p(X) \to A_v^p(X)$ فشرده باشد. هرگاه g_n دنباله‌ای کران‌دار در $A_v^p(X)$ باشد به‌طوری که $g_n(۰) = ۰$ و g_n روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد. در این صورت دنباله $f_n \in \mathcal{B}_v^p(X)$ چنان موجود است که برای $z \in \mathbb{D}$ داریم $f'_n(z) = g_n(z)$ و f_n روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر است. پس $||(f_n o\phi)'||_{A_v^p(X)} \to ۰$. از طرفی

$$||g_n||^p_{L^p(\mu_{p,v},X)} = \int_{\mathbb{D}} ||g_n(w)||^p d\mu_{p,v,۱}(w) = \int_{\mathbb{D}} ||g_n(w)||^p N_{p,v}(\phi, w) dA(w).$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $\phi(z) = w$ داریم $dA(w) = |\phi'(z)|^۲ dA(z)$. بنابراین

$$\begin{aligned} ||g_n||^p_{L^p(\mu_{p,v,۱},X)} &= \int_{\mathbb{D}} ||g_n(\phi(z)||^p |\phi'(z)|^p v(z) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} ||f'_n(\phi(z))||^p |\phi'(z)||^p v(z) dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} ||f_n(\phi(z))'||^p v(z) dA(z) \\ &= ||(f_n o\phi)'||^p_{A_v^p(X)}. \end{aligned}$$

لذا $||g_n||_{L^p(\mu_{p,v},X)} \to ۰$ و بنابراین نگاشت همانی $I_\alpha : A_v^p(X) \to L^p(\mu_{p,v}, X)$ فشرده است. پس طبق قسمت (ب) تعریف ۵.۱، اندازه $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون فشرده روی $A_v^p(X)$ است.

پ $\Leftrightarrow$ ت. طبق تعریف ۵.۱ گزاره های (پ) و (ت)، معادل‌اند .

پ $\Leftarrow$ الف. فرض کنیم $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون فشرده روی $A_v^p(X)$ باشد. همچنین فرض کنیم f_n یک دنباله کران‌دار در $\mathcal{B}_v^p(X)$ باشد به‌طوری که f_n روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد. در این صورت دنباله f'_n در $A_v^p(X)$ قرار دارد و f'_n نیز روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر است. از طرفی نگاشت همانی $I_\alpha : A_v^p(X) \to L^p(\mu_{p,v}, X)$ فشرده است که نتیجه می‌دهد $||f'_n||_{L^p(\mu_{p,v},X)} \to ۰$. از آنجا که ϕ یک نگاشت پیوسته روی $\mathbb{D}$ است و همچنین

$$\begin{aligned} ||(f_n o\phi)'||_{A_v^p(X)} &= \left(\int_{\mathbb{D}} ||f'_n(\phi(z))||^p |\phi'(z)|^p v(z) dA(z) \right)^{۱/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{D}} ||f'_n(w)||^p N_{p,v}(\phi, w) dA(w) \right)^{۱/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{D}} ||f'_n(w)||^p d\mu_{p,v}(w) \right)^{۱/p}, \end{aligned}$$

بنابراین $||C_\phi(f_n)||_{\mathcal{B}_v^p(X)}|| \to ۰$. و این اثبات را کامل می‌کند.

□

۳ عملگرهای ترکیبی روی فضاهای از نوع بسوف وزن‌دار بردار مقدار ضعیف

تعریف **۱.۳**. فضای برگمن وزن‌دار بردار مقداری ضعیف $wA_v^p(X)$، از تمام توابع تحلیلی $f:\mathbb{D}\to X$ تشکیل شده است که اگر X^* دوگان X باشد، $||f||_{wA_v^p(X)}=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}(||x^*of||_{A_v^p(\mathbb{D})})<\infty$. همچنین فضای از نوع بسوف بردار مقدار ضعیف $w\mathcal{B}_v^p(X)$، شامل تمام توابع تحلیلی $f:\mathbb{D}\to X$ است که در خاصیت زیر صدق می‌کنند:

$$||f||_{w\mathcal{D}_v^p(X)}=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}(||x^*of||_{\mathcal{D}_v^p(\mathbb{D})})<\infty.$$

در [۱۲]، فضاهای بردار مقداری ضعیف $wE(X)$، به ازای فضای باناخ E معرفی شده‌اند. در مورد برخی از فضاها، بررسی حالات بردار مقدار ضعیف و بردار مقدار قوی با هم متفاوت است. برای مثال، فضای هاردی بردار مقدار قوی $H^۲(X)$ و فضای هاردی بردار مقدار ضعیف $wH^۲(X)$، فضاهایی متفاوت‌اند که در [۱] مطالعه شده‌اند. در [۲۰] نیز وانگ فضاهای متفاوت $\mathcal{B}_\alpha(X)$ و $w\mathcal{B}_\alpha(X)$ را مطالعه کرده است. در این بخش، ما به بررسی کران‌داری و فشردگی عملگر ترکیبی C_ϕ و همچنین عملگرهای $C_\phi D$ و DC_ϕ روی فضای وزن‌دار بردار مقدار ضعیف $w\mathcal{B}_v^p(X)$ می‌پردازیم.

قضیه **۲.۳**. فرض کنیم $۲<p\leq ۱$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) عملگر $C_\phi:w\mathcal{B}_v^p(X)\to w\mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار است.
ب) عملگر $C_\phi:\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})\to\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})$ کراندار است.
پ) عملگر $C_\phi:w\mathcal{B}_v^p(X)\to\mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار است.
ت) $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون روی $A_v^p(\mathbb{D})$ است.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. فرض کنیم C_ϕ روی $w\mathcal{B}_v^p(X)$ کران‌دار باشد. به‌ازای هر $f\in\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})$ و $x\in X$ به‌طوری که $||x||=۱$، تابع $g:\mathbb{D}\to X$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $z\in\mathbb{D}$، داشته باشیم $g(z)=xf(z)$. در این صورت

$$\begin{aligned}(x^*og)'(z)=(x^*oxf)'(z)&=\lim_{w\to z}\frac{x^*(xf(w))-x^*(xf(z))}{w-z}\\&=\lim_{w\to z}\frac{f(w)x^*(x)-f(z)x^*(x)}{w-z}\\&=f'(z)x^*(x).\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}||g||^p_{w\mathcal{B}_v^p(X)}&=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}(||x^*\circ g||^p_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})})\\&=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}\int_{\mathbb{D}}(|(x^*\circ g)'(z)|^pv(z)dA(z)+|(x^*\circ g)(\circ)|)\\&=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}(\int_{\mathbb{D}}|f'(z)x^*(x)|^pv(z)dA(z)+|x^*(x)f(\circ)|)\\&=\sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱}(\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^p|x^*(x)|^pv(z)dA(z)+|x^*(x)||f(\circ)|)\\&=\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^pv(z)dA(z)+|f(\circ)|=||f||^p_{\mathcal{D}_v^p(\mathbb{D})}<\infty.\end{aligned}$$

لذا $g\in w\mathcal{B}_v^p(X)$ و همچنین به‌ازای ثابت C،

$$||C_\phi g||_{w\mathcal{B}_v^p(X)}\leq C||g||_{w\mathcal{B}_v^p(X)}. \tag{۱.۳}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
||C_\phi g||^p_{w\mathcal{B}^p_v(X)} &= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(x^*C_\phi g)'(z)|^p v(z)dA(z) + |(x^*C_\phi g)(0)|) \\
&= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(x^*C_\phi (xf))'(z)|^p v(z)dA(z) + |(x^*C_\phi (xf))(0)|) \\
&= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(C_\phi x^* (xf))'(z)|^p v(z)dA(z) + |C_\phi x^* (xf))(0)|) \\
&= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |x^*(x)(C_\phi f)'(z)|^p v(z)dA(z) + |x^*(x)(C_\phi f)(0)|) \\
&= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |x^*(x)|^p|(C_\phi f)'(z)|^p v(z)dA(z) + |x^*(x)||(C_\phi f)(0)| \\
&=(\int_{\mathbb{D}} |(C_\phi f)'(z)|^p v(z)dA(z) + |(C_\phi f)(0)| = ||C_\phi f||^p_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

بنابراین نابرابری (۱.۳) نتیجه می‌دهد

$$||C_\phi f||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} \leq C||f||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})}.$$

ب $\Leftarrow$ پ. فرض کنیم $C_\phi : \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ کران‌دار باشد. تابع $f \in w\mathcal{B}^p_v(X)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت از آنجا که تابعک ارزیاب در $\phi(0)$ یک عملگر خطی پیوسته و لذا کران‌دار روی $\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ است، بنابراین به‌ازای ثابت C، داریم

$$\begin{aligned}
||C_\phi f||^p_{\mathcal{B}^p_v(X)} &= \int_{\mathbb{D}} ||f'(\varphi(z))||^p|\varphi'(z)|^p v(z)dA(z) + ||f\circ\phi(0)||_X \\
&= \int_{\mathbb{D}} \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} |(x^*\circ f')(\varphi(z))|^p|\varphi'(z)|^p v(z)dA(z) + \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} |x^*\circ f\circ\phi(0)| \\
&\leq \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} \int_{\mathbb{D}} |(x^*\circ f')(\varphi(z))|^p|\varphi'(z)|^p v(z)dA(z) + \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} |x^*\circ f\circ\phi(0)| \\
&= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} ||C_\phi(x^*\circ f)||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} + \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} |(x^*\circ f)(\phi(0))| \\
&\leq C \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} ||x^*\circ f||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} = C||f||_{w\mathcal{B}^p_v(X)}.
\end{aligned}$$

لذا اثبات (پ) به اتمام می‌رسد.

پ $\Leftarrow$ ت. برای هر $f \in \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ و $x \in X$، به‌طوری که $||x|| = 1$، قرار می‌دهیم $g(z) = xf(z) \in w\mathcal{B}^p_v(X)$. در این صورت همان‌طور که در اثبات قسمت (ب) و (پ) دیدیم، خواهیم داشت $(x^*\circ g)'(z) = f'(z)x^*(x)$. همچنین به طور مشابه، می‌توان نشان داد $||C_\phi g||^p_{\mathcal{B}^p_v(X)} = ||C_\phi f||^p_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})}$ و $||g||^p_{w\mathcal{B}^p_v(X)} = ||f||^p_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})}$. لذا

$$||C_\phi f||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} = ||C_\phi g||_{\mathcal{B}^p_v(X)} \leq C||g||_{w\mathcal{B}^p_v(X)} = C||f||^p_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})}.$$

به این ترتیب طبق قضیه ۱.۲، به‌ازای $X = \mathbb{D}$، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

ت $\Leftarrow$ الف. فرض کنیم $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون روی $A^p_v(\mathbb{D})$ باشد. در این صورت برای هر $f \in w\mathcal{B}^p_v(X)$ و $x^* \in X^*$، داریم $(x^* of) \in \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ و بنابراین به‌ازای ثابت C،

$$\int_{\mathbb{D}} |(x^* of)'(z)|^p d\mu_{p,v,1}(z) \leq C\int_{\mathbb{D}} |(x^* of)'(z)|^p v(z)dA(z), \tag{۲.۳}$$

از طرف دیگر

$$||fo\phi||^p_{w\mathcal{D}^p_v(X)} = \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(x^* ofo\phi)'(z)|^p v(z)dA(z) + |(x^* ofo\phi)(0)|)$$

$$= \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(x^*of)'(\phi(z))|^p|\phi'(z)|^p v(z)dA(z) + |(x^*ofo\phi)(0)|).$$

لذا طبق روابط (۱.۳) و (۵.۳) و همچنین کران‌داری تابعک ارزیاب در $\phi(0)$، روی فضای $\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})$، به‌ازای ثابت C داریم

$$\begin{aligned} ||C_\phi f||^p_{w\mathcal{B}_v^p(X)} = ||fo\phi||^p_{w\mathcal{B}_v^p(X)} &= \sup_{||x^*|_{X^*}\leq 1} (\int_{\mathbb{D}} |(x^*of)'(z)|^p d\mu_{p,v,1}(z) + |(x^*ofo\phi)(0)|) \\ &\leq \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (C\int_{\mathbb{D}} |(x^*of)'(z)|^p v(z)dA(z) + |(x^*ofo\phi)(0)|) \\ &\leq \sup_{||x^*||_{X^*}\leq 1} (C\int_{\mathbb{D}} |(x^*of)'(z)|^p v(z)dA(z) + ||x^*of||_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})} \\ &\leq C_1||f||^p_{w\mathcal{B}_v^p(X)}. \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

هرگاه تابع وزن v را به صورت $v(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ در نظر بگیریم آن‌گاه $w\mathcal{B}_v^p(X)$ را به صورت $w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$ نمایش می‌دهیم و شرط‌های معادل زیر را برای کران‌داری عملگر $C_\phi D$ بر روی فضای $w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$، به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $1 \leq p < 2$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند:

الف) عملگر $C_\phi D : w\mathcal{B}_\alpha^p(X) \to w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$ کران‌دار است.

ب) μ روی $A^p_{\alpha+p}(\mathbb{D})$ اندازه کارلسون است.

پ) عملگر $DC_\phi : wA_\alpha^p(X) \to wA_\alpha^p(X)$ کران‌دار است.

ت) عملگر $C_\phi : wA_\alpha^p(X) \to w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$ کران‌دار است.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. هرگاه $C_\phi D : w\mathcal{B}_\alpha^p(X) \to w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$ کراندار باشد، برای هر $g \in \mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})$ و $x \in X$ به‌طوری که $||x|| = 1$ قرار می‌دهیم $h(z) = xg(z)$. در این صورت مشابه با اثباتی که در قضیه ۲.۳ آمده است $h(z) \in w\mathcal{B}_\alpha^p(X)$ و به‌ازای ثابت C داریم

$$||C_\phi D(h)||_{w\mathcal{B}_\alpha^p(X)} \leq C||h||_{w\mathcal{B}_\alpha^p(X)}. \tag{۳.۳}$$

همچنین

$$||h||_{w\mathcal{B}_\alpha^p(X)} = ||g||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})}. \tag{۴.۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ||C_\phi D(h)||_{w\mathcal{B}_\alpha^p(X)} &= sup_{||x^*||\leq 1}||x^*oh'o\phi||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} \\ &= sup_{||x^*||\leq 1}||x^*(xg)'o\phi||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} \\ &= ||C_\phi D(g)||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

لذا (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌دهند

$$||C_\phi D(g)||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} \leq C||g||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})}.$$

به این ترتیب عملگر $C_\phi D : \mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})$ کران‌دار است. حال به ازای هر $f \in A_\alpha^p(\mathbb{D})$، قرار می‌دهیم $g(z) = \int_0^z f(w)dw$. در این صورت $g(0) = 0$ و همچنین

$$Dg(z) = g'(z) \in A_\alpha^p(\mathbb{D}).$$

لذا خواهیم داشت

$$||C_\phi f||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} = ||C_\phi Dg||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} \leq C||g||_{\mathcal{B}_\alpha^p(\mathbb{D})} \leq C||f||_{A_\alpha^p(\mathbb{D})}.$$

بنابراین عملگر $C_\phi : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{B}^p_\alpha(\mathbb{D})$ کران‌دار است. اما از آنجا که تابعک ارزیاب نیز یک عملگر خطی کران‌دار روی $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ است، عملگر $DC_\phi : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \rightarrow A^p_\alpha(\mathbb{D})$ کران‌دار خواهد بود. پس طبق گزاره ۸.۱، μ روی $A^p_{\alpha+p}$ کارلسون است.
ب $\Leftarrow$ پ. هرگاه μ روی $A^p_{\alpha+p}(\mathbb{D})$ اندازه کارلسون باشد، طبق گزاره ۸.۱، عملگر

$$DC_\phi : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \rightarrow A^p_\alpha(\mathbb{D}) \qquad (۵.۳)$$

کران‌دار است. از طرفی به‌ازای هر $f \in wA^p_\alpha(X)$ و $x^* \in X^*$ به‌طوری که $||x^*|| \leq ۱$، داریم $(x^*of) \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$. لذا (۵.۳)، به ازای ثابت C نتیجه می‌دهد

$$||((x^*of)o\phi)'||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} = ||DC_\phi(x^*of)||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C||x^*of||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C||f||_{wA^p_\alpha(X)}.$$

بنابراین

$$||DC_\phi f||_{wA^p_\alpha(X)} = sup_{||x^*||\leq ۱}||(x^*of)o\phi)'||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} \leq C||f||_{wA^p_\alpha(X)}$$

و این (پ) را نتیجه می‌دهد.
پ $\Leftarrow$ ت. برای هر $f \in wA^p_\alpha(\mathbb{D})$ و $x^* \in X^*$ داریم $x^*of \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$. از آنجا که $DC_\phi : wA^p_\alpha(X) \rightarrow wA^p_\alpha(X)$ کران‌دار است و همچنین تابعک ارزیاب در $\phi(\circ)$ روی A^p_α یک عملگر خطی کران‌دار است، داریم:

$$\begin{aligned}||C_\phi(f)||_{w\mathcal{B}^p_\alpha(X)} &= sup_{||x^*||\leq ۱}||x^*ofo\phi||_{\mathcal{B}^p_\alpha(\mathbb{D})}\\ &= sup_{||x^*||\leq ۱}||x^*(fo\phi)'||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} + |x^*ofo\phi(\circ)|\\ &\leq C||f||_{wA^p_\alpha(\mathbb{D})}.\end{aligned}$$

ت $\Leftarrow$ الف. می‌توان مشاهده کرد که به‌ازای هر $g \in w\mathcal{B}^p_\alpha(\mathbb{D})$، داریم:

$$\begin{aligned}||g||_{w\mathcal{B}^p_\alpha(\mathbb{D})} &= sup_{||x||\leq ۱}||x^*og||_{\mathcal{B}^p_\alpha(\mathbb{D})}\\ &= sup_{||x||\leq ۱}||(x^*og)'||_{A^p_\alpha(\mathbb{D})} + |x^*og(\circ)|\\ &= ||g'||_{wA^p_\alpha(X)} + |x^*og(\circ)|.\end{aligned}$$

بنابراین $Dg = g' \in wA^p_\alpha(\mathbb{D})$ و لذا اثبات واضح است. □

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $۱ \leq p < ۲$ و نگاشت تحلیلی ϕ روی $\mathbb{D}$ چنان تعریف شود که $\phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند:
الف) عملگر $C_\phi : w\mathcal{B}^p_v(X) \rightarrow w\mathcal{B}^p_v(X)$ فشرده است.
ب) عملگر $C_\phi : \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ فشرده است.
پ) عملگر $C_\phi : w\mathcal{B}^p_v(X) \rightarrow \mathcal{B}^p_v(X)$ فشرده است.
ت) $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون فشرده روی $A^p_v(\mathbb{D})$ است.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. فرض کنیم C_ϕ روی $w\mathcal{B}^p_v(X)$ فشرده باشد. دنباله کران‌دار f_n را در $\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ چنان در نظر می‌گیریم که f_n روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر باشد. حال به‌ازای $x \in X$ به‌طوری که $||x|| = ۱$، تعریف می‌کنیم $g_n(z) = xf_n(z)$. در این صورت همان‌طور که در اثبات قضیه ۲.۳ آمده است، $g_n \in w\mathcal{B}^p_v(X)$ و روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ خواهیم داشت $g_n \rightarrow \circ$. بنابراین

$$||C_\phi g_n||_{w\mathcal{B}^p_v(X)} = ||g_no\phi||_{w\mathcal{B}^p_v(X)} \rightarrow \circ.$$

از طرفی مطابق با اثبات قضیه ۲.۳ داریم $||f_no\phi||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} = ||g_no\phi||_{w\mathcal{B}^p_v(X)}$. لذا $||C_\phi f_n||_{\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})} \rightarrow \circ$ و بنابراین قسمت (ب) ثابت شده است.
ب $\Leftrightarrow$ پ. مشابه با قضیه ۲.۳ و با استفاده از قضیه ۳.۲ ثابت می‌شود.
ب $\Leftarrow$ ت. با استفاده از قضیه ۳.۲، به‌ازای $X = \mathbb{D}$ نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.
ت $\Leftarrow$ الف. فرض کنیم $\mu_{p,v}$ یک اندازه کارلسون فشرده روی $A^p_v(\mathbb{D})$ باشد. طبق قضیه ۳.۲، C_ϕ روی $\mathcal{B}^p_v(\mathbb{D})$ فشرده است. حال فرض کنیم f_n دنباله‌ای کران‌دار در $w\mathcal{B}^p_v(X)$ باشد به‌طوری که روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$، همگرای یکنواخت به صفر است. در

این صورت برای هر $x^* \in X^*$، $(x^* of_n)$ دنباله ای کران‌دار در $\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})$ است که روی زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ همگرای یکنواخت به صفر است. بنابراین $||C_\phi(x^* of_n)||_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})} \to \circ$. از طرف دیگر داریم:

$$||x^* o(f_n o\phi)||_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})} = ||(x^* of_n)o\phi)||_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})} \to \circ.$$

لذا

$$||C_\phi f_n||_{w\mathcal{B}_v^p(X)} = \sup_{||x^*||_{X^*}\leq ۱} ||x^* o(f_n o\phi)||_{\mathcal{B}_v^p(\mathbb{D})} \to \circ$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

فهرست منابع

[1] Arregui J. and Blasco O., *Bergman and Bloch spaces of vector-valued functions*, Math. Nachr., **261**(262) (2003), 3–22.

[2] Blasco O., *Operators on weighted Bergman spaces and applications*, Duke. Math. J., **66** (1992), 443–467.

[3] Cima J. A. and Wogan W. R., *A Carleson measure theorem for the Bergman spaces on the ball*, J. Operator Theory., **7** (1982), 157–165.

[4] Cowen C. and MacCluer B., *Composition operators on spaces of Analytic functions*, Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, CRC Pres, 1995.

[5] Geng L. G., Zhou Z.H. and Dong Z. T., *Isometric composition operators on weighted Dirichlet type spaces*, J. Inequal App., **23** (2012), 1029–1036.

[6] Gul U., *Essential spectra of composition operators on the space of bounded analytic functions*, Turk. J. Math., **32** (2008), 475–480.

[7] Hassanlou M., Vaezi H. and Wang M., *Weighted composition operators on weak vector-valued Bergman spaces and Hardy spaces*, Banach J. Math. Anal., **9**(2) (2015), 35–43.

[8] Hasting W., *A Carleson measure theorem for Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **52** (1975) 237–241.

[9] Hedenmalm H., Krenblum B. and Zhu K., *Theory of Bergman Spaces*, New York, Springer, 2000.

[10] Jovovic M. and MacCluer B. D., *Composition operator on Dirichlet spaces*, Acta. Sci. Math. (Szeged)., **63** (1997), 229–247.

[11] Kumar S., *Weighted composition operators between spaces of Dirichlet type*, Rev. Math. Complut., **22**(2) (2009), 469–488.

[12] Latilla J., *Weakly compact composition operators on vector-valued BMOA*, J. Math. Anal., **308** (2005), 730–745.

[13] Luecking D., *A technique for characterizing Carleson measure on Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **87** (1983), 656–660.

[14] MacCluer B. D., *Compact composition operator on $H^p(B_N)$*, Mich. Math. J., **32** (1985), 237–248.

[15] MacCluer B. D., *Composition operators on S^p*, Houston. J. Math., **13** (1987), 245–254.

[16] Maccluer B. D. and Shapiro J. H., *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math., **38** (1986), 878–906.

[17] Nevanlinna R., *Analytic functions*, Springer Verlag, New York, 1970.

[18] Shapiro J. H., *Composition Operators and Classical Function Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[19] Stegenga D. A., *Multipliers of the Dirichlet spaces*, Illinois. J. Math., 24 (1980), 113–139.

[20] Wang M., *Weighted composition operators between Dirichlet spaces*, Acta. Math. Sci., **31B**(2) (2011), 671–651.

[21] Wolf E., *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces*, Rev. R. Acad. Cien. Series. A. Math., **103**(1) (2009), 11–15.

[22] Wu Z. and Yang L., *Multipliers between Dirichlet spaces*, Integral Equations Operator Theory., **23**(4) (1998), 482–492.

[23] Zorboska N., *Composition operators on weighted Dirichlet spaces*. Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2013-2023.

Carleson measure and composition operators on vector valued weighted Besov type spaces

Sepideh Nasresfahani[1], **Mostafa Hassanlou**[2 §] **and Ebrahim Abbasi**[3]

(1) Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran

(2) Engineering Faculty of Khoy, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

(3) Department of Mathematics, Mahabad Branch, Islamic Azad University, Mahabad, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2021/10/21 Accepted: 2022/1/9

Abstract: In this paper we investigate composition operator C_ϕ and also product of composition and differentiation $C_\phi D$ and DC_ϕ on vector valued weighted Besov type space $\mathcal{B}_v^p(X)$ and weak vector valued weighted Besov type space $w\mathcal{B}_v^p(X)$ for complex Banach space X and $1 \leq p < 2$ and equivalent conditions for boundedness and compactness of these operators on such spaces have been obtained using Carleson measure.

Keywords: composition operator, product of composition and differentiation, Carleson measure, weak vector valued weighted Besov type spaces, boundedness, compactness.

§Corresponding author.

E-mail addresses: m.hassanlou@uut.ac.ir (M. Hassanlou), sepide.nasr@gmail.com (S. Nasrefahani), ebrahimabbasi81@gmail.com (E. Abbasi).