مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۲۴-۳۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2022.35409.1865

# نیم‌شبه‌حلقه‌های شبه‌منظم راست (چپ)

ژاله شمسی [۱]، شعبان قلندرزاده [۲] ×، پرستو ملکوتی‌راد [۱]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
(۲) دانشکده ریاضی، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

دبیر مسئول: امید علی شهنی کرم‌زاده

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۳۰

**چکیده:** در این مقاله عناصر شبه‌منظم راست (چپ) در یک نیم‌شبه‌حلقه به‌عنوان تعمیمی از عناصر منظم و قویاً منظم معرفی گردیده است. همچنین در ادامه، ضمن بررسی خواص نیم‌شبه‌حلقه‌های شبه‌منظم، ارتباط بین عناصر کاهیده و قویاً‌کاهیده ارائه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** شبه‌منظم راست(چپ)، شبه‌خودتوان راست (چپ)، شبه‌خودتوان متقارن، قویاً‌کاهیده.

رده‌بندی ریاضی: 16Y30; 16Y60; 16Y99

## ۱ مقدمه

ساختارهای جبری متفاوتی به‌عنوان تعمیمی از یک حلقه‌ی $(R, +\ ,\ .)$، موجود است. برای مثال نیم‌حلقه‌ها و شبه‌حلقه‌ها دو تعمیم کاربردی از حلقه‌ها می‌باشند که کاربردهای فراوانی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی دارند. شبه‌حلقه‌ها تعمیمی از حلقه‌هایند که با حذف یکی از دو قاعده توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به جمع و فرض این‌که $(R, +)$، یک گروه ناجابه‌جایی باشد، به‌دست می‌آیند. نمونه‌ی دیگری از این ساختارهای جبری، نیم‌حلقه‌ها هستند که مشابه حلقه‌ها در این ساختار جبری توزیع‌پذیری دوطرفه، عمل ضرب نسبت به جمع موجود است ولی $(R, +)$ و $(R, .)$ ، هر دو نیم‌گروه‌اند. نیم‌شبه‌حلقه‌ها توسیعی از نیم‌حلقه‌ها [برای آشنایی بیشتر به منبع ۳ مراجعه شود] و شبه‌حلقه‌ها می‌باشند که این ساختار نیز تعمیمی از مفهوم حلقه‌هایند که در ادامه به‌طور مفصل معرفی شده است. در این مقاله تمامی نیم‌شبه‌حلقه‌ها راست و بدون عضو خنثی جمعی در نظر گرفته شده است به غیر از مواردی که به‌وضوح بیان شده باشد.

ابتدا به‌طور کامل به معرفی شبه‌حلقه‌ها می‌پردازیم. مجموعه‌ی ناتهی $N$ را همراه با دو عمل "$+$" و "." یک شبه‌حلقه‌ی راست گوییم هرگاه:

---

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: (J. Shams), Shams.jaleh@yahoo.com ،(Sh. Ghalandarzadeh) Ghalandarzadeh@kntu.ac.ir
رایانامه: (P. malakoti) Pmalakoti@gmail.com

۱. $(N\ ,\ +)$ یک گروه (نه لزوماً آبلی)،

۲. $(N\ ,\ .)$ یک نیم‌گروه،

۳. خاصیت توزیع‌پذیری ”.“ نسبت به ” + “ تنها از سمت راست برقرار باشد. بدین معنا که برای هر $a,\ b,\ c\ \in N$، تساوی $(a+b)\,c = ac + bc$ برقرار باشد [۹].

بدیهی است اگر $N$ یک شبه‌حلقه‌ی راست باشد آنگاه لزوماً برای هر $n\ \in N$، تساوی $n\circ\ =\ \circ$ برقرار نخواهد بود زیرا توزیع‌پذیری ”.“ نسبت به ” + “ از سمت چپ برقرار نیست. به‌همین دلیل مفاهیمی مانند $N_c$ و $N_\circ$ در شبه‌حلقه‌ها تعریف شده‌اند. مجموعه‌ی $N_c = \{\ n\ \in N\ |n\circ\ = n\}$، قسمت ثابت از شبه‌حلقه‌ی راست $N$ نامیده می‌شود و اگر $N =\ N_c$، گویند $N$ یک شبه‌حلقه‌ی راست ثابت است. همچنین مجموعه‌ی $N_\circ = \{n\ \in N\ |\ n\circ\ =\ \circ\}$ را قسمت صفر متقارن از شبه‌حلقه‌ی راست $N$ گویند. اگر $N =\ N_\circ$، $N$ را شبه‌حلقه‌ی راست صفر متقارن می‌نامند. هر شبه‌حلقه‌ی $N$ را می‌توان به‌صورت جمع مستقیم $N_\circ$ و $N_c$ نوشت [۹]. با استناد به دو تعریف $N_c$ و $N_\circ$ در شبه‌حلقه‌ها، این دو تعریف را در نیم‌شبه‌حلقه‌ها برای عنصر شبه‌خودتوان موجود که در بخش بعدی کامل توضیح داده شده است، توسیع داده و مبنای تعاریف را بر اساس این دو تعریف قرار داده‌ایم.

مجموعه‌ی ناتهی $S$ را همراه با دو عمل ” + “ و ”.“ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی راست گوییم هرگاه:

۱. $(S\ ,\ +)$ یک نیم‌گروه (نه لزوماً آبلی)،

۲. $(S\ ,\ .)$ یک نیم‌گروه،

۳. خاصیت توزیع‌پذیری ”.“ نسبت به ” + “ تنها از سمت راست برقرار باشد. بدین معنا که برای هر $a,\ b,\ c\ \in S$، تساوی $(a+b)\,c = ac + bc$ برقرار باشد [۸].

هرگاه خاصیت توزیع‌پذیری ”.“ نسبت به ” + “ تنها از سمت چپ برقرار باشد $(S\ ,\ +\ ,\ .)$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی چپ نامیده می‌شود. یک مثال بدیهی از نیم‌شبه‌حلقه‌های راست، مجموعه تمام توابع از $G$ به $G$ تحت جمع معمولی و ترکیب توابع است، به‌طوری‌که $G$ یک نیم‌گروه جمعی (نه لزوماً آبلی) است [۸].

به‌وضوح هر شبه‌حلقه یک نیم‌شبه‌حلقه است ولی عکس این مطلب همواره برقرار نیست. به‌عنوان مثال $(\mathbb{Z}^+\ ,\ +\ ,\ .)$ یک نیم‌شبه‌حلقه است ولی با توجه به این‌که $(\mathbb{Z}^+\ ,\ +)$ یک گروه نیست پس $(\mathbb{Z}^+\ ,\ +\ ,\ .)$ یک شبه‌حلقه نمی‌تواند باشد. برای بیان مثالی دیگر از نیم‌شبه‌حلقه‌ای که شبه‌حلقه نیست، می‌توان به $(P\ (X)\ \ ,\ \cup\ ,\ \cap)$ اشاره کرد به‌طوری‌که $P(X)$ مجموعه‌ی توانی، مجموعه‌ی ناتهی و دلخواه $X$ می‌باشد.

با توجه به این‌که در سراسر این مقاله نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را راست و بدون عضو خنثی جمعی در نظر گرفته‌ایم پس هر ایدآل راست (چپ) از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ ، زیرمجموعه‌ی غیرتهی $I$ از $S$ است به‌طوری‌که برای هر $a\ ,\ b\ \in I\ ,\ r\ \in S$ داشته باشیم $a + b \in I$ و $ra\ \ (\ ar\ )\ \in I$ [۸]. مفهوم شبه‌حلقه‌های قویاً منظم راست و چپ برای اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط ماسون [†] معرفی شد. شبه‌حلقه‌ی $N$ قویاً منظم راست (چپ) است هرگاه برای هر $a\ \in N$ عنصر $x\ \in N$ موجود باشد به‌طوری‌که $a\ =\ a^2x(a\ =\ xa^2)$ [۵]. شبه‌حلقه‌ی $N$ منظم است هرگاه برای هر $a\ \in N$ عنصر $x\ \in N$ موجود باشد به‌طوری‌که $a\ =\ axa$ [۴]. چو [‡] و هیرانو [§] در سال ۲۰۰۳ مفهوم قویاً‌کاهیده را به این‌صورت تعریف کردند که $a^2\ \in\ N_c$ نتیجه دهد $a\ \in\ N_c$ [۱] . و $N$ را کاهیده گویند هرگاه هیچ عضو پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد. فرض کنیم $T$ و $T'$ زیرمجموعه‌هایی از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ باشند؛ در این‌صورت $TT' = \{tt'\ |\ t\ \in T\ ,\ t'\ \in\ T'\}$ [۹] . نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را قویاً $\pi$–منظم چپ گویند هرگاه برای هر $a\ \in S$ عنصر $z\ \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a^n\ =\ za^{n+1}$ [۲].

## ۲ عناصر شبه‌منظم و خواص آن‌ها

**تعریف ۱.۲.** عنصر $a$ از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را شبه‌خودتوان راست (چپ) گویند هرگاه برای هر $y\ \in S$، تساوی $ya = ya^2\ (ay =\ a^2y)$ برقرار باشد. مجموعه عناصر شبه‌خودتوان راست و چپ را به‌ترتیب با $Id_r(S)$ و $Id_l(S)$ نشان می‌دهیم. اگر $a$ شبه‌خودتوان راست و چپ باشد گویند $a$ شبه‌خودتوان است. اگر هر عضوی از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ شبه‌خودتوان باشد گویند $S$ شبه‌خودتوان است و با $Id(S)$ ، نشان می‌دهیم [۲].

به‌وضوح هر عضو خودتوان یک شبه‌خودتوان است ولی با مثال زیر می‌توان نشان داد که عکس این مطلب همواره برقرار نیست.

**مثال ۲.۲.** فرض کنیم $S = \{\ \circ\ ,\ a\ ,\ b\ \}$. عمل جمع و ضرب روی عناصر $S$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

---
[†] Mason
[‡] Cho
[§] Hirano

جدول ۱: عمل جمع روی عناصر $S$ در مثال ۲.۲

| $+$ | $\circ$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $\circ$ | $a$ | $\circ$ | $\circ$ |
| $a$ | $\circ$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $\circ$ | $a$ | $a$ |

جدول ۲: عمل ضرب روی عناصر $S$ در مثال ۲.۲

| $.$ | $\circ$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $\circ$ | $\circ$ | $\circ$ | $\circ$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ |

بدیهی است $(S, +, .)$ تشکیل یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی راست می‌دهد و $b \in S$، یک عنصر خودتوان نیست ولی شبه‌خودتوان می‌باشد؛ زیرا

$$\circ b = \circ b^{2}\ ,\ ab = ab^{2}\ ,\ bb = bb^{2}$$

$$b\circ = b^{2}\circ\ ,\ ba = b^{2}a\ ,\ bb = b^{2}b$$

لذا با توجه به این‌که $a$ و $\circ$ هر دو خودتوان‌اند بنابراین $(S, +, .)$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی راست شبه‌خودتوان است به‌طوری‌که خودتوان نیست.

به‌وضوح هر عنصر خودتوان، منظم است. با توجه به این‌که هر عنصر شبه‌خودتوان تعمیمی از عناصر خودتوان است، این پرسش مطرح می‌شود: آیا می‌توان با توجه به مفهوم شبه‌خودتوان، مفهوم منظم را توسیع داد؟ توسیع عناصر منظم علاوه بر خود عناصر منظم شامل چه عناصر دیگری خواهند بود؟

**تعریف ۳.۲.** عنصر $a$ از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را شبه‌منظم راست (چپ) گوییم هرگاه برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $ya = yaxa$ ($ay = axay$). اگر $a$ شبه‌منظم راست و چپ باشد گوییم $a$ شبه‌منظم است. اگر هر عنصری از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ شبه‌منظم باشد گوییم $S$ شبه‌منظم است.

فرض کنیم $a \in S$ شبه‌منظم راست و چپ باشد. در این‌صورت برای هر $y \in S$ عناصر $x, z \in S$ موجود است به‌طوری‌که $ya = yaxa$ و $ay = azay$ که لزوماً $x = z$ نیست. هر عنصر منظمی یک شبه‌منظم است ولی با مثال زیر می‌توان نشان داد عکس این مطلب همواره برقرار نیست.

**مثال ۴.۲.** در مثال ۲.۲ واضح است که $b$ منظم نیست، زیرا برای هر $x \in S$، $bxb \neq b$ ولی برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که، $yb = ybxb$ و $by = bxby$. زیرا:

$$\circ(bbb) = \circ = \circ b, a(bbb) = a = ab, b(bbb) = a = bb$$

$$(bbb)\circ = a = b\circ, (bbb)a = a = ba, (bbb)b = a = bb$$

بنابراین $b$ یک عنصر شبه‌منظم است. لذا با توجه به این‌که $a$ و $\circ$ هر دو عناصر منظم‌اند، بنابراین $(S, +, .)$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی راست شبه‌منظم است ولی منظم نیست.

**گزاره ۵.۲.** در تعریف ۳.۲، $ax$ و $xa$، هر دو شبه‌خودتوان راست (چپ) می‌باشند.

اثبات. باید نشان دهیم برای هر $y \in S$، تساوی‌های $y(ax) = y(ax)^{2}$ و $y(xa) = y(xa)^{2}$ برقرارند.

$$y(ax)^{2} = y\,(axax) = (yaxa)\,x = y(ax)$$

$$y(xa)^{2} = y\,(xaxa) = y\,(x\,(axa)) = y(xa)$$

و به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد $ax$ و $xa$ در نیم‌شبه‌حلقه‌های شبه‌منظم چپ، شبه‌خودتوان چپ است. □

قضیه **۶.۲.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه باشد. در این‌صورت $S$ شبه‌منظم راست است اگر و تنها اگر برای هر $a \in S$ یک عنصر شبه‌خودتوان راست مانند $e$ موجود باشد به‌طوری‌که $Sa = Se$.

اثبات. فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست باشد در این‌صورت برای هر $a \in S$ و هر $z \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $za = zaxa$. چون این تساوی برای هر $z \in S$ برقرار است پس می توان نوشت $Sa = Saxa \subseteq Sxa$، از طرفی $Sxa \subseteq Sa$. می‌دانیم $xa$ شبه‌خودتوان است پس $Sa = Se$. حال فرض کنیم برای هر $a$ از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ شبه‌خودتوانی مانند $e$ از $S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $Sa = Se$. چون $e^۲ \in Se = Sa$، پس $e^۲ \in Sa$. بنابراین عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $e^۲ = xa$. از طرفی برای هر $z \in S$ داریم $za \in Sa = Se$، پس $za \in Se$. بنابراین عنصر $y \in S$ موجود است به‌طوری‌که $za = ye$. چون $e$ شبه‌خودتوان است، پس برای $y \in S$ داریم:

$$za = ye = ye^۲ = ye^۳ = yee^۲ = ye\,(xa) = zaxa.$$

بنابرین $S$ شبه‌منظم راست می‌باشد. □

تعریف **۷.۲.** ایدآل $I$ از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را شبه‌خودتوان گوییم هرگاه برای هر $y \in S$، $yI = yI^۲$ و یا به‌عبارت دیگر هر عضو $I$ شبه‌خودتوان باشد.

ایدآل $I$ از نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را شبه‌منظم راست گوییم هرگاه برای هر $a \in I$ و هر $i \in I$ عنصر $x \in I$ موجود باشد به‌طوری‌که $ia = iaxa$.

گزاره **۸.۲.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست باشد. در این‌صورت احکام زیر برقرارند:

۱. هر ایدآلی از $S$ شبه‌خودتوان راست است.

۲. هر ایدآلی از $S$ شبه‌منظم راست است.

۳. مرکز $S$، شبه‌منظم است.

اثبات. ۱. فرض کنیم $I$ ایدآلی از $S$ باشد؛ نشان می‌دهیم که برای هر $y \in S$، $yI = yI^۲$. به‌وضوح $yI^۲ \subseteq yI$. فرض کنیم $ya \in yI$. طبق فرض $S$ یک شبه‌منظم راست است بنابراین برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که

$$ya = yaxa \in yIxI \subseteq yII = yI^۲ \Rightarrow ya \in yI^۲ \Rightarrow yI \subseteq yI^۲.$$

۲. فرض کنیم $I$ ایدآلی از $S$ باشد و $a \in I$. چون $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست است، پس برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $ya = yaxa$. با توجه به این‌که این تساوی برای هر $y \in S$ برقرار است، پس برای $i \in I$ نیز می توان نوشت $ia = iaxa$. با فرض $z = xax \in I$ می‌توان نوشت:

$$iaxa = iaxaxa \Rightarrow ia = ia\,(xax)\,a = iaza \Rightarrow ia = iaza.$$

۳. فرض کنیم $S$ مرکز نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست $S$ باشد. فرض کنیم $x \in S$. در این‌صورت برای هر $r \in S$ عنصر $y \in S$ موجود است به‌طوری‌که $rx = rxyx$. از طرفی $rx = rxyxyx$. قرار دهید $z = yxy$. برای کامل کردن اثبات کافی است نشان دهیم برای هر $r \in S$، $zr = rz$. حال

$$\begin{aligned}
zr &= yxyr = y^۲xr = y^۲rx = y^۲rxyx = yxyryx = yxyxry = yxry\\
rz &= ryxy = rxy^۲ = rxyxy^۲ = xryxy^۲ = x^۲ry^۳ = x^۲yxry^۳ = yx^۳ry^۳ = yrx^۳y^3\\
&= yrxx^۲yy^۲ = yrxyx^۲y^۲ = yrxyxxy^۲ = yrxxy^۲ = yrxxyy = yrxyxy = yrxy = yxry
\end{aligned}$$

بنابراین $zr = rz$. □

طبق گزاره ۸.۲ هر ایدآلی از نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست یک ایدآل شبه‌خودتوان راست و شبه‌منظم راست است ولی هر ایدآل شبه‌خودتوان راست و شبه‌منظم راست لزوماً از نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست نیست. مثالی از نیم‌شبه‌حلقه‌ی غیر شبه‌منظم راست ارائه می‌دهیم که دارای ایدآل‌های شبه‌خودتوان راست و شبه‌منظم راست است.

مثال **۹.۲.** فرض کنیم $S = \{e\,,\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\}$. عمل جمع و ضرب روی عناصر $S$ را طبق جداول زیر تعریف می‌کنیم:

جدول ۳: عمل جمع روی عناصر مثال ۹.۲

| $+$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $c$ | $c$ | $c$ | $e$ |
| $a$ | $c$ | $a$ | $a$ | $c$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $b$ | $b$ | $c$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $c$ | $c$ | $d$ |

جدول ۴: عمل ضرب روی عناصر مثال ۹.۲

| $.$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $e$ | $b$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ |

با اعمال تعریف شده فوق $(S, + , .)$، تشکیل یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی چپ می‌دهد که شبه‌منظم راست نیست؛ زیرا $e$ یک عنصر شبه‌منظم راست نیست و $I = \{a , b\}$ یک ایدآل راست شبه‌خودتوان و شبه‌منظم از $S$ است.

**لم ۱۰.۲.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم چپ (راست) باشد. در این‌صورت $S$ شبه‌منظم چپ (راست) است.

اثبات. طبق فرض $S$ قویاً منظم چپ است؛ پس برای هر $a \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a = xa^۲$ . بنابراین برای $y \in S$ داریم $y = xy^۲$. از طرفی $a^۲ = axa^۲$ و $ax$ یک شبه‌خودتوان چپ است، اکنون نشان می‌دهیم برای هر $a , y \in S$، $ay = axay$. چون $ay = axy^۲$، پس تساوی $axay = axaxy^۲$ برقرار است. با توجه به این‌که $ax$ شبه خودتوان چپ است پس $axay = axy^۲$ بنابراین $ay = axay$. و به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم راست، شبه‌منظم راست می‌باشد. □

## ۳ نتایج اصلی

در این قسمت از مقاله منظور از ۰، عضو همانی جمعی نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ است. بدین معنا که برای هر $a \in S$،

$$\circ + a = a + \circ = a \quad \text{و} \quad \circ a = \circ.$$

**تعریف ۱.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه و $e \in S$ یک شبه‌خودتوان راست باشد. تعریف می‌کنیم:

$$S_c^e = \{x \in S \mid xe = x\}$$

به‌وضوح $e^۲ \in S_c^e$. این مجموعه را قسمت ثابت از نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست $S$ گوییم. اگر $S = S_c^e$ گوییم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست ثابت است.

**لم ۲.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست باشد و $\circ \in S$، در این‌صورت $S_c^\circ \subseteq S_c^e$.

اثبات. فرض کنیم $a \in S_c^\circ$. در این‌صورت $a\circ = a$، پس برای هر $y \in S$ تساوی $ya\circ = ya$ برقرار است از طرفی چون $S$ را یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی راست در نظر گرفتیم پس $\circ a = \circ$. بنابراین $ya = ya\circ a$ و با توجه به تعریف شبه‌منظم راست قرار می‌دهیم $\circ a = e$، لذا $a = a\circ = a\circ a = ae$. پس $a = ae$. بنابراین $a \in S_c^e$. در نتیجه $S_c^\circ \subseteq S_c^e$. □

**تعریف ۳.۳.** نیم‌شبه‌حلقه‌ی $S$ را قویاًکاهیده گوییم هرگاه $a^۲ \in S_c^e$ نتیجه دهد $a \in S_c^e$؛ یا به‌عبارت دیگر شبه‌خودتوان $e$ موجود است به‌طوری‌که $a^۲ = a^۲e$ نتیجه دهد $ae = a$.

**گزاره ۴.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست باشد و $0 \in S$. در این‌صورت هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً‌کاهیده، کاهیده است.

اثبات. فرض کنیم $a^2 = 0$، در این‌صورت $a^2 = 0 \in S_c^\circ \subseteq S_c^e$، پس $a^2 e = a^2$ و به‌همین ترتیب $a^2 0 = a^2$. اما چون $S$ قویاً‌کاهیده است پس $ae = a$. از طرفی $a^2 = a^2 0 = a^2 0 a$ و با توجه به این‌که $S$ شبه‌منظم راست است، پس شبه‌خودتوان $0a$ موجود است. قرار دهید $e = 0a$؛ لذا $a = ae = a0a = a0$، در این‌صورت

$$a^2 = aa = a0a = a \Rightarrow 0 = a^2 = a.$$

$\square$

یادداشت: در گزاره ۴.۳، شبه‌منظم راست بودن نیم‌شبه‌حلقه $S$ یک شرط لازم می‌باشد. زیرا:
فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه و $a \in S$ قویاً‌کاهیده باشد به‌طوری‌که $a$ یک عنصر شبه‌منظم راست نیست و فرض کنیم خودتوانی مانند $e$ در $S$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^2 e = a^2$، لذا با استفاده از تعریف قویاً‌کاهیده نتیجه می‌شود $ae = a$. ادعا می‌کنیم $a^2 \neq 0$. زیرا در غیر این‌صورت:

$$a^2 e = a^2 = 0 \Rightarrow a^2 e = 0 \Rightarrow a^2 ea = 0a = 0 = a^2 \Rightarrow a^2 ea = a^2$$

و این بدین معنا است که $a \in S$ یک عنصر شبه‌منظم راست است که برخلاف فرض است.
به‌طور خاص مثالی را ارائه می‌دهیم که هر عنصر قویاً‌کاهیده از نیم‌شبه‌حلقه‌ی غیر شبه‌منظم راست کاهیده نیست.
فرض کنیم $S = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, .)$، به‌طوری‌که $\mathbb{N}$، مجموعه اعداد طبیعی است. هر عنصر غیرخودتوان $\mathbb{N}$ یک عنصر غیرشبه‌منظم راست از $\mathbb{N}$ است. قرار می‌دهیم $e = 1$ به‌طوری‌که برای $a \in \mathbb{N}$، $a^2 1 = a^2$ نتیجه می‌دهد $a1 = a$. ازطرفی $a \neq 0$ به‌وضوح نتیجه می‌دهد $a^2 \neq 0$.

**لم ۵.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه و $a \in S$ شبه‌منظم راست و قویاً‌کاهیده باشد. در این‌صورت $a$ منظم و شبه‌منظم چپ است.

اثبات. فرض کنیم $a \in S$ شبه‌منظم راست و قویاً‌کاهیده باشد، در این‌صورت برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $ya = yaxa$ پس $ya \in S_c^{xa}$. لذا $a^2 \in S_c^{xa}$. چون $S$ قویاً‌کاهیده است، پس $a \in S_c^{xa}$، بنابراین $axa = a$ و لذا $a$ منظم است. از طرفی می‌دانیم هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی منظم، شبه‌منظم چپ است پس $a$ شبه‌منظم چپ نیز است. $\square$

**گزاره ۶.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست و قویاً‌کاهیده باشد و برای هر $a \in S$ و هر شبه‌خودتوان $e$، تساوی $ea = eae$، برقرار باشد. در این‌صورت $S$ قویاً منظم چپ است.

اثبات. فرض کنیم $a \in S$. در این‌صورت طبق لم ۵.۳ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a \in S_c^{xa}$. بنابراین $axa = a$. فرض کنیم $e = ax$. بنابراین

$$ax = axax = a.xaxxa \Rightarrow axa = axaxxa^2 \Rightarrow a = ax^2a^2.$$

قرار می‌دهیم $z = ax^2$، بنابراین $a = za^2$. $\square$

**لم ۷.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست باشد، در این‌صورت برای هر $a \in S$ شبه‌خودتوانی مانند $e \in S_c^e$ موجود است به‌طوری‌که $ea = eae$.

اثبات. در نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست همواره $S^2 \subseteq S_c^e$، پس $ea \in S_c^e$، بنابراین $ea = eae$. لذا اثبات کامل است. $\square$

با توجه به لم ۷.۳ در نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست برای هر $a \in S$ شبه‌خودتوانی مانند $e \in S_c^e$ موجود است به‌طوری‌که $ea = eae$. قرار می‌دهیم:

$$S_e^e = \{\, a \in S \mid ae = eae \;\; for\; e \in S_c^e \,\}.$$

به‌وضوح $e \in S_e^e$. این مجموعه را قسمت شبه‌خودتوان متقارن از نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست گوییم. اگر $S_e^e = S$، گوییم $S$ شبه‌خودتوان متقارن است.

**گزاره ۸.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌خودتوان متقارن باشد در این‌صورت شبه‌منظم راست و چپ معادل‌اند.

اثبات. فرض کنیم $a \in S$ شبه‌منظم راست باشد. در این‌صورت برای هر $y \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $ya = yaxa$. بنابراین $a^2 = a^2xa$. پس $ya \in S_c^{xa}$. فرض کنیم $e = xa$، چون $S$ شبه‌خودتوان متقارن است بنابراین

$$ya = yxaaxa = yxa^2xa = yxa^2 \Rightarrow ya = yxa^2$$

حکم بالا برای هر $y \in S$ برقرار است، پس $a^2 = axa^2$. □

لم **۹.۳**. فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست و قویاًکاهیده باشد و برای هر $a \in S$ و هر شبه‌خودتوان $e \in S$، داشته باشیم $ea = eae$. در این‌صورت $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم راست است.

اثبات. فرض کنیم $a \in S$. در این‌صورت طبق لم ۵.۳ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a = axa$. چون $ax$ نیز شبه‌خودتوان است، طبق فرض می‌توان نوشت:

$$axa = axaax \Rightarrow axa = axa^2x \Rightarrow a = a^2x.$$

□

لم **۱۰.۳**. فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم چپ باشد و برای هر $a \in S$ و هر شبه‌خودتوان $e \in S$ داشته باشیم $ea = eae$، در این صورت $S$ شبه‌منظم راست است.

اثبات. فرض کنیم $S$ نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم چپ باشد، در این‌صورت برای هر $a \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a^2 = axa^2$. ازطرفی $ax$ و $xa$ هر دو شبه‌خودتوان‌اند بنابراین در هر دو حالت و طبق فرض $a^2 = a^2xa$. □

گزاره **۱۱.۳**. هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی منظم و قویاًمنظم چپ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاًکاهیده است. به‌علاوه اگر برای هر $a \in S$ شبه‌خودتوان $e \in S_c^e$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ea = eae$، در این‌صورت هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم راست، قویاًکاهیده است.

اثبات. فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی منظم باشد. در این‌صورت برای هر $a \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a = axa$، لذا $a \in S_c^{xa}$. بنابراین $S$ قویاًکاهیده است.
فرض کنیم $S$ نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم چپ باشد. در این‌صورت برای هر $a \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a = xa^2$. فرض کنیم $a^2 \in S_c^e$. در این‌صورت $a = xa^2e \in S_c^e$. بنابراین $S$ قویاًکاهیده است.
فرض کنیم $S$ نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً منظم راست باشد در این‌صورت برای هر $a \in S$ عنصر $x \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a = a^2x$. فرض کنیم $a^2 \in S_c^e$. در این‌صورت $a = a^2ex = a^2exe \in S_c^e$. لذا $S$ قویاًکاهیده است. □

قضیه **۱۲.۳**. فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه باشد و برای هر $a \in S$ و هر شبه‌خودتوان $e \in S$ داشته باشیم $ea = eae$. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $S$ شبه‌منظم راست و قویاًکاهیده است.

۲. $S$ منظم است.

۳. $S$ شبه‌منظم چپ و قویاًکاهیده است.

۴. $S$ قویاً منظم چپ است.

۵. $S$ قویاً منظم راست است.

اثبات. به‌وضوح هر عضو منظم، شبه‌منظم راست و چپ است.
۱ $\Leftrightarrow$ ۲، طبق ۵.۳ و ۱۱.۳ برقرار است.
۱ $\Leftrightarrow$ ۵، طبق ۹.۳، ۱۰.۳ و ۱۱.۳ برقرار است.
۱ $\Leftrightarrow$ ۳، طبق ۵.۳ و ۱۰.۳ برقرار است.
۴ $\Leftarrow$ ۳، طبق ۱۰.۳ و ۱۱.۳ برقرار است.
۳ $\Leftarrow$ ۱، طبق ۱۰.۳ برقرار است.
۱ $\Leftarrow$ ۴، طبق ۶.۳ برقرار می‌باشد. □

شبه‌حلقه‌ی $S$ را در [۷] شبه‌حلقه‌ی $(*)$ گویند هرگاه:

۱. برای $a,\ b\ \in S$، $ab = ۰$ نتیجه دهد $ba = b۰$.

۲. برای $a\ \in S$، $a^۲ =\ a^۳$ نتیجه دهد $a =\ a^۲$.

نشان می‌دهیم هر نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست و قویاً کاهیده در هر دو ویژگی فوق صدق می‌کند.

**قضیه ۱۳.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً کاهیده و $a, b\ \in\ S$ و $e\ \in\ Id_r(S)$، به‌طوری‌که $ab\ =\ e$، در این‌صورت $ba = bea = (ba)^۲$.

اثبات. به‌وضوح $(ba)^۲ = baba = bea$ و $bea$ یک خودتوان است. قرار می‌دهیم $e' = bea$، از طرفی

$$(ba)^۲.bea = bea = (ba)^۲.$$

بنابراین $(ba)^۲\ \in\ S_c^{bea}$، چون $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً کاهیده می‌باشد، پس

$$ba\ \in\ S_c^{bea}\ \Rightarrow ba.bea = ba$$

از طرفی $ba.bea = bea$ و بنابراین $ba = bea$. □

**لم ۱۴.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی قویاً $\pi$–منظم چپ و $b\ \in\ S, n\ \in\ \mathbb{N}$ ، به‌طوری‌که $b^{(n+۱)}\ =\ b^n$ ، در این‌صورت $b = b^۲$.

اثبات. طبق تعریف، عنصر $z\ \in S$ و $m\ \in\ \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $b^m = zb^{m+۱}$. حال داریم:

$$b^m\ = zb^mb = zzb^{m+۱}b =\ z^۲b^{m+۲}\ = \cdots =\ z^nb^{m+n}.$$

چون تساوی $b^{n+۱}\ =\ b^n$، برقرار است، بنابراین $b^m\ =\ \ z^nb^mb^{n+۱}\ =\ \ z^nb^{m+n}b$. از طرف دیگر نشان داده‌ایم $b^m\ =\ \ z^nb^{m+n}$ که نتیجه می‌دهد، $b^m\ =\ \ z^nb^{m+n}b\ =\ \ b^mb\ =\ \ b^{m+۱}$. بنابراین تساوی $b^m\ =\ \ b^{m+۱}$، برقرار است. علاوه براین می‌توان تساوی‌های زیر را به‌دست آورد:

$$b^{۲m-۱}\ =\ b^mb^{m-۱}\ =\ b^{m+۱}b^{m-۱}\ =\ b^{۲m},$$

$$b^{m-۱}\ =\ b^{۲m-m-۱}\ =\ b^{۲m-۱-m}\ =\ b^{۲m-m}\ =\ b^m$$

بنابراین $b^{m+۱}\ =\ b^m\ =\ b^{m-۱}$. از تساوی $b^m\ =\ b^{m-۱}$، می‌توان تساوی‌های

$$b^{۲m}\ =\ b^mb^m\ =\ b^{m-۱}b^{m-۱}\ =\ b^{۲m-۲}$$

را به‌دست آورد. بنابراین تساوی $b^{m-۲}\ =\ \ b^{۲m-m-۲}\ =\ \ b^{۲m-۲-m}\ =\ \ b^{۲m-۲}\ =\ \ b^m$، را می‌توان به‌دست آورد. به‌همین ترتیب تساوی‌های $b^{۲m-۳}\ =\ b^{m-۱}b^{m-۲}\ =\ b^mb^m\ =\ b^{۲m}$، نیز قابل دست‌یابی‌اند. حال می‌توان نوشت:

$$b^{m-۳}\ =\ b^{۲m-m-۳}\ =\ b^{۲m-۳-m}\ =\ b^{۲m-m}\ =\ b^m.$$

با ادامه این روند حکم به‌دست می‌آید. □

**قضیه ۱۵.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست $a\ ,\ b \in S$، به‌طوری‌که $ab\ =\ e$. در این‌صورت $ba\ =\ bea\ =\ (ba)^۲$.

اثبات. به‌وضوح $(ba)^۲\ =\ baba\ =\ bea$. از طرفی چون $S$ شبه‌منظم راست است، بنابراین عنصر $z\ \ \in\ S$ وجود دارد به‌طوری‌که $(ba)^۲\ =\ (ba)^۲zba\ =\ beazba$. از طرفی دیگر

$$(ba)^۳\ =\ ba.(ba)^۲\ =\ ba.beazba\ =\ beazba.$$

بنابراین $(ba)^۳\ =\ (ba)^۲\ =\ bea$، پس $ba$ یک عنصر قویاً $\pi$–منظم چپ است. لذا با توجه به لم ۱۴.۳، حکم به‌دست می‌آید. □

یادداشت: در قضیه‌های ۱۳.۳ و ۱۵.۳، اگر صفر تنها شبه‌خودتوان مورد نظر باشد، آنگاه $ba\ =\ b۰$.

**قضیه ۱۶.۳.** فرض کنیم $S$ یک نیم‌شبه‌حلقه‌ی شبه‌منظم راست یا قویاً کاهیده و $a\ \ \in\ \ S$، به‌طوری‌که $a^۲\ \ =\ \ a^۳$. در این‌صورت $a\ =\ a^۲$.

اثبات. فرض کنیم $a^۲\ \ =\ \ a^۳$. به‌وضوح $a$ یک عنصر قویاً $\pi$–منظم چپ است. بنابراین حکم طبق لم ۱۴.۳، به‌دست می‌آید. □

# فهرست منابع

[1] Cho Y. U. and Hirano Y., *Strong reducedness and strong regularity for near-rings*, Kyungpook Math. J, 43 (2003) 587-592.

[2] Ferrero G., *Nearrings: some developments linked to semigroups and groups*, Springer Science and Business Media (2013).

[3] Golan J. S., *Semirings and their Applications*, Springer Science and Business Media (2013).

[4] Goodearl K. R., *Von Neumann regular rings*, London, Pitman (1979).

[5] Mason G., *Strongly regular near-rings*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 23**1** (1980) 27-35.

[6] Pilz G., *Near-rings, the theory and its applications*, Elsevier (2011).

[7] Reddy Y. V. and Murty C. V. L. N., *On strongly regular near-rings*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 27**1** (1984) 61-64.

[8] Sardar S. K. and Mukherjee R., *On additively regular seminearrings*, In Semigroup Forum, Springer US, 88**3** (2014) 541-554.

[9] Satyanarayana B. and Prasad K. S., *Near rings, fuzzy ideals, and graph theory*, Chapman and Hall/CRC. (2013).

# (Left)Right near-regular seminear-rings

**Zh.Shamsi**[1], **Sh.Ghalandarzadeh**[2] ¶, **P.Makakooti-Rad**[1]

(1) Department of Mathematics, Qazvin Branch Islamic Azad University, Qazvin, Iran.
(2) Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Communicated by: O.A.S. Karamzadeh

Received: 2020/10/13 Accepted: 2022/1/20

**Abstract:** In this paper, as a generalization of regular and strongly regular elements of a seminear-ring, we introduce the concept of (left) right near-regular elements. In the following we investigate some properties of near-regular seminear-rings and the connection between the of reduced and strongly reduced elements.

**Keywords**: (Left)Right Near-Regular, (Left) Right Near-Idempotent, Symmetric Near-Idempotent, Strongly Reduced.



¶**Corresponding author.**
***E-mail addresses:*** Ghalandarzadeh@kntu.ac.ir **(Sh. Ghalandarzadeh) .**