مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۴۵-۵۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38630.1963

ξ-مجموعه‌های بسته ضربی و حلقه‌های کسرهای $C(X)$

علیرضا صالحی [×]

گروه علوم پایه و زبان، دانشکده نفت اهواز، دانشگاه صنعت نفت، اهواز، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۸

چکیده: در این مقاله نخست نوع خاصی از زیرمجموعه‌های بسته‌ی ضربی برای حلقه‌های تعویض‌پذیر به اسم ξ-مجموعه‌های بسته‌ی ضربی معرفی می‌شود. سپس متناظر با هر ξ-مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی چون S از $C(X)$ پالایه‌ای با نام $\mathcal{F}_S$ از زیرمجموعه‌های X تعریف شده، نشان می‌دهیم حلقه‌ی $S^{-1}C(X)$ با ضرب مستقیم توابع پیوسته روی عناصر $\mathcal{F}_S$ یکریخت است.

واژه‌های کلیدی: ξ-مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی، ضرب مستقیم توابع پیوسته، حلقه کسرها، c-پالایه.

رده‌بندی ریاضی: 13B30; 54C40

۱ مقدمه

در این مقاله همه حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یک‌دار و تمام فضاهای توپولوژی هاسدورف و کاملا منظم فرض می‌شوند. برای فضای X، $C(X)$ را حلقه‌ی تمام توابع پیوسته و حقیقی مقدار با دامنه X در نظر می‌گیریم. برای هر $f \in C(X)$، مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) = 0\}$ که با نماد $Z(f)$ نمایش داده می‌شود، صفر-مجموعه‌ی f و متمم آن که با $\operatorname{coz} f$ نمایش داده می‌شود، متمم‌صفر-مجموعه‌ی f نامیده می‌شود. عناصری از حلقه که مقسوم‌علیه‌صفر نیستند، عناصر منظم حلقه نامیده می‌شوند و به‌سادگی ثابت می‌شود تابع $f \in C(X)$، عنصر منظم است اگر و تنها اگر $\operatorname{coz} f$ در X چگال باشد.

برای عنصر غیر یکه‌ی a از حلقه‌ی R، گیریم M_a برابر با اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال شامل a باشد، در این صورت ایدآل $I \subseteq R$ را z-ایدآل می‌نامیم، هرگاه از $a \in I$ نتیجه شود $M_a \subseteq I$. به‌روشنی ثابت می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال حلقه، z-ایدآل است. همچنین ایدآل‌های اول مینیمال، مثال‌هایی از z-ایدآل‌های حلقه‌اند؛ نتیجه‌ی بعد از قضیه ۱.۱ در [۶] دیده شود. اشتراک هر خانواده از z-ایدل‌ها خود نیز z-ایدآل است، بنابراین برای هر ایدآل I از R کوچک‌ترین z-ایدآل شامل I وجود دارد که با اشتراک تمام z-ایدآل‌های شامل I برابر است. کوچک‌ترین z-ایدآل شامل ایدآل I با I_z نمایش داده می‌شود. به‌طور مشابه بزرگ‌ترین z-ایدآل مشمول در I، در صورت وجود با I^z نمایش داده خواهد شد؛ برای اطلاعات بیشتر در این خصوص [۶، ۷] دیده شود. از این رو I یک z-ایدآل است اگر و تنها اگر $I = I_z$ یا به‌طور معادل $I = I^z$.

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a.r.salehi@put.ac.ir (Alireza Salehi)

اگر C' زیرحلقه‌ی مطلقاً محدب از $C(X)$ باشد؛ یعنی، برای هر $f \in C(X)$ و هر $g \in C'$ با شرط $|f| \leq |g|$ نتیجه شود $f \in C'$، آن‌گاه بنا به [۶، قضیه ۱۳.۱] و [۷، گزاره ۳.۵]، نمایش عنصروار ایدآل‌های I_z و I^z را به‌صورت زیر خواهیم داشت.

$$I_z = \{g \in C' : M_g \subseteq M_f \text{ به‌ازای یک عنصر } f \in I \text{ داریم}\}$$

و

$$I^z = \{f \in C' : M_f \subseteq I\}.$$

برای هر عنصر $f \in C(X)$ داریم $M_f = \{g \in C(X) : Z(f) \subseteq Z(g)\}$. بنابراین ایدآل $I \subseteq C(X)$ یک z-ایدآل است اگر وتنها اگر از $f \in I$، $g \in C(X)$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه شود $g \in I$.

گیریم S زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه‌ی R باشد، در این صورت $S^{-1}R$ حلقه‌ی کسرهای هم ارز به‌صورت $\frac{a}{s}$ است که در آن $a \in R$، $s \in S$ و جمع و ضرب به‌صورت معمول تعریف می‌شوند؛ فصل ۵ از [۸] دیده شود. اگر S مجموعه‌ی عناصر منظم R باشد، آن‌گاه $S^{-1}R$ حلقه‌ی کلاسیک خارج قسمت‌های R نامیده شده، با $q(R)$ نمایش داده می‌شود. همچنین زیرمجموعه بسته ضربی T از حلقه‌ی R اشباع‌شده نامیده می‌شود، هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in T$ نتیجه دهد a و b هر دو به T تعلق دارند. اشتراک همه‌ی زیرمجموعه‌های بسته‌ی ضربی اشباع‌شده‌ی شامل یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی دلخواه S از حلقه‌ی R حاصل اشباع S نامیده شده، با $\bar{S}$ نمایش داده می‌شود؛ [۸، ۷.۵] دیده شود. همچنین داریم

$$\bar{S} = R \setminus \bigcup\{P : P \cap S = \emptyset \text{ و } R \text{ ایدآل اول } P \text{ است}\}.$$

علاوه بر این، بنا به تمرین ۱۲.۵ از همین مرجع داریم $S^{-1}R \cong \bar{S}^{-1}R$. به‌ازای پالایه دلخواه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های X، حد مستقیم (یا حد استقرایی) توابع $[\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

مشابه [۴، ۴.۲]، گیریم $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی باشد که دامنه هر کدام از آنها عنصری چون $F \in \mathcal{F}$ است. برای هر جفت تابع $f, g \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)$ رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ روی $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)$ بدین صورت تعریف می‌شود که $f \sim g$ هرگاه توابع f و g روی عنصری از $\mathcal{F}$ که شامل $D_f \cap D_g$ است، یکسان باشند؛ در اینجا D_f و D_g به ترتیب دامنه‌ی توابع f و g اند. همچنین توابع $f + g$ و $f.g$ روی $D_f \cap D_g$ به‌صورت عنصروار تعریف می‌شوند. به‌سادگی نشان داده می‌شود $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)/_\sim$ با جمع و ضرب القا شده‌ی بالا روی کلاس‌های هم ارزی، یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار است. ما این حلقه را با $[\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)]$ نمایش می‌دهیم.

در [۴، قضیه ۶.۲] مشاهده می‌کنیم که حلقه‌ی کلاسیک خارج قسمت‌های $C(X)$ که با نماد $q(X)$ نمایش داده می‌شود، حد مستقیم توابع $[\bigcup_{V\in\mathcal{V}} C(V)]$ است که در آن $\mathcal{V}$ پالایه‌ی تولیدشده با متمم صفر–مجموعه‌های چگال X است. در بخش ۴ از این مقاله ما این گزاره را تعمیم خواهیم داد. البته، نخست در بخش ۳ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته ضربی $C(X)$ به نام ξ-مجموعه‌ها که شامل مجموعه‌ی عناصر منظم $C(X)$ است، بررسی می‌شود. سپس متناظر با هر ξ-مجموعه‌ی بسته ضربی S از $C(X)$ پالایه‌ی $\mathcal{F}_S$ از زیرمجموعه‌های X را تعریف کرده، نشان می‌دهیم دو حلقه‌ی $S^{-1}C(X)$ و $[\bigcup_{\in\mathcal{F}_S} C(F)]$ یکریختاند. معرفی ξ-مجموعه‌ها در حلقه‌های دلخواه و نتایج مرتبط با آن در بخش ۲ ارائه خواهد شد.

مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال، ایدآل‌های اول مینیمال، عناصر یکه و عناصر منظم حلقه‌ی R به ترتیب با $\mathrm{Max}(R)$، $\mathrm{Min}(R)$، $\mathrm{U}(R)$ و $\mathrm{r}(R)$ نمایش داده می‌شوند. برای تعاریف، نمادها و اصطلاحات توپولوژی و جبری دیگر [۳، ۵، ۸] دیده شود.

۲ ξ-مجموعه‌ها در یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر

فرض کنیم R حلقه تعویض‌پذیر دلخواه باشد. برای عنصر $a \in R$ تعریف می‌کنیم

$$m_a = \{b \in R : M_b = M_a\}.$$

به‌روشنی m_a متشکل است از همه‌ی عناصری از R که دقیقاً متعلق به ایدآل‌های ماکسیمال شامل a هستند. بنابراین عنصر b از R به m_a تعلق دارد اگر و تنها اگر مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال شامل a و مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال شامل b دقیقاً یکی باشند. از آنجا که عنصر $u \in R$ یکه است اگر وتنها اگر $M_u = R$، نتیجه می‌گیریم اگر u یکه باشد، آنگاه

$$m_u = \{b \in R : M_b = R\} = \mathrm{U}(R).$$

بنابراین اگر R میدان نباشد، برای عنصر $a \in R$ مجموعه‌های m_a و M_a لزوماً برابر نیستند. به عنوان مثالی دیگر، اگر تابع همانی $i(x) = x$ را در حلقه‌ی $C(\mathbb{R})$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$M_i = \{f \in C(\mathbb{R}) : 0 \in Z(f)\}$$

و

$$m_i = \{f \in C(\mathbb{R}) : \{0\} = Z(f)\}.$$

توجه داریم که برای جفت توابع $f, g \in C(X)$، $M_g \subseteq M_f$ اگر وتنها اگر $g \in M_f$، یا به‌طور معادل $Z(f) \subseteq Z(g)$؛ تمرین ۴A.۴ در [۵] دیده شود. بنابراین برای هر $f \in C(X)$ داریم

$$m_f = \{g \in C(X) : Z(f) = Z(g)\}.$$

تعریف ۱.۲. گیریم A یک زیرمجموعه از حلقه‌ی R باشد. می‌گوییم A یک ξ-مجموعه از R است، هرگاه برای عناصر $b \in R$ و $a \in A$ از تساوی $M_a = M_b$ نتیجه شود $b \in A$.

با توجه به تمرین ۴A.۴ در [۵] نتیجه می‌شود که $A \subseteq C(X)$ یک ξ-مجموعه است اگر و تنها اگر برای عناصر $f \in C(X)$ و $g \in A$ از تساوی $Z(g) = Z(f)$ نتیجه شود $f \in A$. به‌روشنی یک زیرمجموعه A از حلقه‌ی R یک ξ-مجموعه است اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$، داشته باشیم $m_a \subseteq A$ یا به‌طور معادل داشته باشیم $A = \bigcup_{a\in A} m_a$. بنابراین A یک ξ-مجموعه از R است اگر وتنها اگر برای هر جفت از عناصر R که دقیقا به ایدآل‌های ماکسیمال یکسانی تعلق دارند، هرگاه A شامل یکی از آنها باشد حتما دیگری را نیز در بر داشته باشد. آشکارا مجموعه‌های $\emptyset$ و R، ξ-مجموعه‌اند. هر z-ایدآل حلقه R نیز ξ-مجموعه از R است؛ در حقیقت ایدآل I از حلقه‌ی R یک z-ایدآل است اگر و تنها اگر $\bigcup_{a\in I} M_a = I$، یا به‌طور معادل داشته باشیم $I = \bigcup_{a\in I} m_a$. توجه داریم که برای $A \subseteq R$ دو مجموعه‌ی

$$\bigcup\{M_a : a \in A\} = \{b \in R : M_b \subseteq M_a \text{ داریم } a \in A \text{ به‌ازای یک عنصر }\}$$

و

$$\bigcup\{m_a : a \in A\} = \{b \in R : M_b = M_a \text{ داریم } a \in A \text{ به‌ازای یک عنصر }\}$$

لزوما یکسان نیستند؛ به عنوان مثال اگر u یک عنصر یکه از حلقه‌ی R باشد (که میدان نیست) و قرار دهیم $A = \{u\}$، آن‌گاه

$$\bigcup_{a\in A} M_a = R \neq \mathrm{U}(R) = \bigcup_{a\in A} m_a.$$

اما هرگاه A ایدآل R باشد، آن‌گاه دو مجموعه بالا با هم برابرند؛ زیرا برای $b \in \bigcup_{a\in A} M_a$ عنصر $a \in A$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $M_b \subseteq M_a$. اینک $M_b = M_b \cap M_a = M_{ba}$ و $ba \in A$ نتیجه می‌دهد $b \in \bigcup_{a\in A} m_a$.

به‌سادگی نشان داده می‌شود که $\mathrm{U}(R)$ یک ξ-مجموعه از حلقه‌ی R است. گزاره زیر نشان می‌دهد که اگر R حلقه‌ی کاهش‌یافته باشد، یعنی عنصر پوچ‌توان بجز صفر نداشته باشد، آن‌گاه $\mathrm{r}(R)$ نیز ξ-مجموعه است. نخست توجه کنید که $\{0\}$ یک ξ-مجموعه‌ی R است اگر و تنها اگر ژاکوبسن رادیکال R، یعنی اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال R، صفر باشد. در حقیقت برای هر $a \in \mathrm{Jac}(R)$ داریم $M_a = M_0 = \mathrm{Jac}(R)$. اینک $\mathrm{Jac}(R) = \{0\}$ نتیجه می‌دهد که $\{0\}$ یک ξ-مجموعه است. به عکس، اگر $\{0\}$ یک ξ-مجموعه باشد و به‌فرض خلف گیریم $0 \neq a \in \mathrm{Jac}(R)$، آن‌گاه خواهیم داشت $M_a = M_0$، که این تناقض است؛ زیرا $a \notin \{0\}$.

گزاره ۲.۲. گیریم R حلقه باشد و داشته باشیم $\mathrm{Jac}(R) = \{0\}$. در این صورت مجموعه‌ی عناصر منظم R یک ξ-مجموعه از R است.

اثبات. فرض کنیم $b \in R$، $a \in r(R)$ و $M_a = M_b$. نشان می‌دهیم $\mathrm{Ann}(b) = \{0\}$، که ثابت می‌کند b عنصری منظم است. گیریم $c \in \mathrm{Ann}(b)$. داریم

$$ac \in M_{ac} = M_a \cap M_c = M_b \cap M_c = M_{bc} = M_0 = Jac(R) = \{0\}.$$

بنابراین $ac = 0$ و چون a منظم است، خواهیم داشت $c = 0$ که نتیجه می‌دهد $\mathrm{Ann}(b) = \{0\}$. □

چون اشتراک و اجتماع هر خانواده‌ی دلخواه از ξ-مجموعه‌های حلقه‌ی R خودشان نیز ξ-مجموعه‌اند ، برای هر زیرمجموعه‌ی A از R دو مجموعه‌ی

$$\bigcap\{B : \text{ یک } \xi\text{-مجموعه‌ی شامل } A \text{ است } B\}$$

و

$$\bigcup\{B : \text{ یک } \xi\text{-مجموعه‌ی مشمول در } A \text{ است } B\}$$

که به ترتیب با A_ξ و A^ξ نشان داده می‌شوند، ξ-مجموعه‌هایی از R هستند. درحقیقت A_ξ کوچک‌ترین ξ-مجموعه از R است که شامل A می باشد. همچنین A^ξ بزرگ‌ترین ξ-مجموعه از R است که مشمول در A می‌باشد. به‌علاوه داریم

$$A_\xi = \bigcup_{a\in A} m_a. \tag{۱.۲}$$

برای اثبات تساوی بالا توجه داریم که $\bigcup_{a\in A} m_a$ یک ξ-مجموعه از R و شامل A است. از طرفی اگر B یک ξ-مجموعه دلخواه از R و شامل A باشد، آن‌گاه داریم $b \in \bigcup_{a\in A} m_a$. در این صورت برای عنصری چون $a \in A \subseteq B$ داریم $M_b = M_a$. اینک چون B یک ξ-مجموعه است، خواهیم داشت $b \in B$ و لذا اثبات تمام است. به‌طور مشابه خواهیم داشت

$$A^\xi = \{a \in A : m_a \subseteq A\} = \bigcup_{m_a\subseteq A} m_a. \tag{۲.۲}$$

گزاره ۳.۲. گیریم A زیرمجموعه‌ی حلقه‌ی R باشد. در این صورت تساوی‌های زیر برقرار است.

۱. $R \setminus A^\xi = (R \setminus A)_\xi$

۲. $R \setminus A_\xi = (R \setminus A)^\xi$

اثبات. ۱. با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲) در بالای گزاره، $a \notin A^\xi$ اگر و تنها اگر $m_a \nsubseteq A$. بنابراین $b \in m_a$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $b \in R \setminus A$. از این رو با استفاده از تساوی $M_b = M_a$ و رابطه‌ی (۱.۲) در بالای گزاره، نتیجه می‌گیریم که $a \in (R \setminus A)_\xi$. لذا خواهیم داشت $R \setminus A^\xi \subseteq (R \setminus A)_\xi$. عکس شمول به‌سادگی ثابت می‌شود.
۲. از قسمت اول گزاره خواهیم داشت $R \setminus (R \setminus A)^\xi = A_\xi$ که نتیجه می‌دهد $R \setminus A_\xi = (R \setminus A)^\xi$. □

۳ ξ-مجموعه‌های بسته ضربی

برای ادامه بحث در بخش‌های آتی به شناخت ξ-مجموعه‌های بسته ضربی نیاز خواهیم داشت. در این بخش به این موضوع می‌پردازیم. مجموعه‌ی عناصر یکه‌ی یک حلقه‌ی دلخواه و همچنین عناصر منظم یک حلقه‌ی کاهش‌یافته مثال‌هایی از چنین مجموعه‌هایی هستند؛ گزاره ۲.۲ دیده شود. همچنین به عنوان مثالی دیگر می‌توان به مجموعه‌های بسته ضربی به صورت $R \setminus P$ اشاره کرد که در آن P یک z-ایدآل اول است. به‌ویژه اگر P یک ایدآل اول مینیمال از حلقه‌ی کاهش‌یافته R باشد، آن‌گاه $R \setminus P$ یک ξ-مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است که در خانواده‌ی همه‌ی ξ-مجموعه‌های بسته‌ی ضربی وقتی با رابطه‌ی شمول مرتب شده باشند، ماکسیمال است. با استفاده از این نکته می‌توان اثباتی دیگر برای گزاره ۲.۲ ارائه کرد؛ زیرا، برای یک حلقه‌ی کاهش‌یافته R داریم

$$r(R) = \bigcap\{R \setminus P : \text{یک ایدآل اول مینیمال است } P\}.$$

گزاره زیر نشان می‌دهد برای مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S از حلقه‌ی R کوچک‌ترین ξ-مجموعه‌ی شامل S، یعنی، S_ξ نیز زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است. علاوه بر این چون $1_R \in S$ و برای هر عنصر یکه‌ی $u \in R$ داریم $M_u = M_{1_R}$، از رابطه‌ی (۱.۲) در بالای گزاره‌ی ۳.۲ نتیجه می‌گیریم $u \in S_\xi$. بنابراین S_ξ شامل همه‌ی عناصر یکه‌ی R است. در مقایسه با نکته اخیر، S^ξ، یعنی، بزرگ‌ترین ξ-مجموعه از حلقه‌ی R که مشمول در S است، ممکن است حتی شامل 1_R نباشد. به عنوان مثال اگر قرار دهیم $S = \{1_R\}$، آن‌گاه $S^\xi = \emptyset$.

گزاره ۱.۳. اگر S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد، آن‌گاه S_ξ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است.

اثبات. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد و داشته باشیم $a, b \in S_\xi$. در این صورت بنا به رابطه‌ی (۱.۲) عناصر c و d در S وجود دارد به‌گونه‌ای که $M_a = M_c$ و $M_b = M_d$. اینک از آنجا که $cd \in S$ و $M_{ab} = M_a \cap M_b = M_c \cap M_d = M_{cd}$، از رابطه‌ی (۱.۲) نتیجه می‌گیریم $ab \in S_\xi$. □

به‌روشنی برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S از R رابطه‌ی زیر برقرار است. در این رابطه $\bar{S}_\xi$ حاصل اشباع زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S_ξ است.

$$S \subseteq S_\xi \subseteq \bar{S}_\xi$$

گزاره زیر ساختاری عنصروار برای $\bar{S}_\xi$ پیشنهاد می‌کند. ما با استفاده از این ساختار، مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد S_ξ ممکن است به‌صورت سره شامل S و مشمول $\bar{S}_\xi$ باشد؛ به‌عبارتی نشان می‌دهیم رابطه‌های شمول بالا می‌توانند به‌صورت اکید باشند. همچنین مشاهده می‌کنیم که حاصل اشباع یک ξ-مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی، خود نیز یک ξ-مجموعه از R است.

گزاره ۲.۳. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد. در این صورت داریم

$$\bar{S}_\xi = \{a \in R : M_s \subseteq M_a \text{ داریم } s \in S \text{ به‌ازای عنصر }\} = \{a \in R : M_a \cap S \neq \emptyset\}.$$

اثبات. تساوی دوم به‌سادگی برقرار است. برای اثبات تساوی اول گیریم

$$T = \{a \in R : M_s \subseteq M_a \text{ داریم } s \in S \text{ به‌ازای عنصر }\}.$$

به‌روشنی T یک ξ-مجموعه از R و شامل S_ξ است. مشاهده می‌کنیم که T اشباع‌شده هم هست؛ در حقیقت اگر $ab \in T$، آن‌گاه $s \in S$ وجود دارد که $M_s \subseteq M_{ab} = M_a \cap M_b$. بنابراین خواهیم داشت $M_s \subseteq M_a$ و $M_s \subseteq M_b$ که نتیجه می‌دهد $a, b \in T$. از این رو $\bar{S}_\xi \subseteq T$. برای اثبات عکس شمول فرض کنیم B زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی اشباع‌شده از R و شامل S_ξ باشد. نشان می‌دهیم $T \subseteq B$. گیریم $a \in T$. بنابراین عنصری چون $s \in S$ وجود دارد که $M_s \subseteq M_a$. چون $M_{as} = M_a \cap M_s = M_s$ و $s \in S$، از رابطه‌ی (۱.۲) بالای گزاره ۳.۲ نتیجه می‌گیریم $as \in S_\xi \subseteq B$. اینک از آنجا که B اشباع‌شده است، خواهیم داشت $a \in B$ و نتیجه می‌گیریم T کوچک‌ترین زیرمجموعه‌ی بسته ضربی R و شامل S_ξ است؛ به‌عبارتی $\bar{S}_\xi = T$. $\square$

نتایج زیر به‌روشنی از گزاره قبل حاصل می‌شوند.

نتیجه ۳.۳. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد. اگر S یک ξ-مجموعه باشد، آن‌گاه $\bar{S}$ یک ξ-مجموعه است.

نتیجه ۴.۳. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. S اشباع‌شده و ξ-مجموعه است.

۲. اگر $a \in R$ و $M_a \cap S \neq \emptyset$، آن‌گاه $a \in S$.

۳. اگر $a \in R$، $s \in S$ و $s \in M_a$، آن‌گاه $a \in S$.

۴. اگر $a \in R$، $s \in S$ و $M_s \subseteq M_a$، آن‌گاه $a \in S$.

از آنجا که برای عناصر $f, g \in C(X)$ داریم $M_g \subseteq M_f$ اگر وتنها اگر $Z(f) \subseteq Z(g)$، با استفاده از نتیجه بالا ساختار ξ-مجموعه‌های بسته‌ی ضربی اشباع‌شده‌ی حلقه‌ی $C(X)$ مطابق زیر خواهد بود.

نتیجه ۵.۳. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از $C(X)$ باشد. در این صورت S یک ξ-مجموعه‌ی اشباع‌شده است اگر وتنها اگر از $f \in C(X)$، $g \in S$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه شود $f \in S$.

در مثال بعد، زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S از $C(X)$ را به‌گونه‌ای ارائه می‌کنیم که $S \neq S_\xi \neq \bar{S}_\xi$. نخست توجه می‌کنیم که بنا به گزاره‌ی ۲.۳، برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S از $C(X)$ داریم

$$\bar{S}_\xi = \{f \in R : Z(f) \subseteq Z(s) \text{ داریم } s \in S \text{ به‌ازای یک عنصر }\}.$$

مثال ۶.۳. گیریم $f(x) = |x| - 1$ تابعی از $C(\mathbb{R})$ باشد. اگر قرار دهیم $S = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$\emptyset = S^\xi \subsetneq S \subsetneq S_\xi \subsetneq \bar{S}_\xi.$$

درحقیقت بنا به گزاره‌ی ۲.۳ و توضیحات قبل از نتیجه‌ی ۵.۳ داریم

$$\begin{aligned} S_\xi &= \{g \in C(\mathbb{R}) : Z(g) = Z(s) \text{ داریم } s \in S \text{ به‌ازای یک عنصر }\} \\ &= \{g \in C(\mathbb{R}) : Z(g) = \emptyset \text{ یا } Z(g) = \{1, -1\}\}, \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \bar{S}_\xi &= \{g \in C(\mathbb{R}) : Z(g) \subseteq Z(s) \text{ داریم } s \in S \text{ به‌ازای یک عنصر }\} \\ &= \{g \in C(\mathbb{R}) : Z(g) \subseteq \{1, -1\}\}. \end{aligned}$$

۴ ساختار حلقه‌ی کسرهای $C(X)$ به‌صورت ضرب‌های مستقیم توابع

گیریم $\mathcal{C}oz(X)$ خانواده‌ی تمام متمم صفر-مجموعه‌های فضای X باشد. به‌عبارتی داشته باشیم

$$\mathcal{C}oz(X) = \{\operatorname{coz} f : f \in C(X)\}.$$

از آنجا که برای توابع $f, g \in C(X)$ داریم $\operatorname{coz} f \cap \operatorname{coz} g = \operatorname{coz} fg$ و $\operatorname{coz} f \cup \operatorname{coz} g = \operatorname{coz}(f^2 + g^2)$، خانواده‌ی $\mathcal{C}oz(X)$ نسبت به اجتماع و اشتراک متناهی بسته است. علاوه بر این اگر S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $C(X)$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{B} = \{\operatorname{coz} g : g \in S\}$ یک پایه برای پالایه‌ای روی X خواهد بود. ما در ادامه هر پالایه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های X متشکل از عناصری از $\mathcal{C}oz(X)$ را c-پالایه می‌نامیم. این تعریف به پیروی از تعریف z-پالایه‌ها که هر کدام متشکل از خانواده‌ای از صفر-مجموعه‌های X بوده، انتخاب شده است. البته لازم به ذکر است در [۲] چنین پالایه‌هایی با عنوان $\mathcal{C}oz$-پالایه معرفی شده‌اند.

تعریف ۱.۴. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $C(X)$ باشد. در این صورت c-پالایه تولیدشده با عناصر $\{\operatorname{coz} f : f \in S\}$ را یک c-پالایه‌ی وابسته به S نامیده، با نماد $\mathcal{C}[S]$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارتی داریم

$$\mathcal{C}[S] = \{\operatorname{coz} g : \text{به‌ازای یک عنصر } f \in S \text{ داشته باشیم } \operatorname{coz} f \subseteq \operatorname{coz} g\}$$

تعریف ۲.۴. فرض کنیم $\mathcal{F}$ پالایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد و قرار می‌دهیم

$$\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X) : \operatorname{coz} f \in \mathcal{F}\}.$$

در این صورت $\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $C(X)$ است که مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی وابسته به پالایه‌ی $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

به‌روشنی برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S از $C(X)$ شمول $S \subseteq \overleftarrow{\mathcal{C}}\mathcal{C}[S]$ برقرار است. همچنین عکس این شمول برقرار است هرگاه S اشباع‌شده باشد؛ درحقیقت، $t \in \overleftarrow{\mathcal{C}}\mathcal{C}[S]$ اگر و تنها اگر عنصر f در S وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\operatorname{coz} f \subseteq \operatorname{coz} t$. اینک از آنجا که S اشباع‌شده است، بنا به نتیجه‌ی ۵.۳ خواهیم داشت $t \in S$. از طرف دیگر برای پالایه‌ی دلخواه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های X داریم $\mathcal{C}\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{F}$. به درستی $\mathcal{C}\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]$ متشکل است از همه‌ی متمم صفر-مجموعه‌هایی از X که به $\mathcal{F}$ تعلق دارند. بنابراین اگر $\mathcal{F}$ یک c-پالایه از X باشد، آن‌گاه عکس این شمول نیز برقرار است؛ به‌عبارتی داریم $\mathcal{F} = \mathcal{C}\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]$. با استفاده از این توضیحات لم زیر به‌روشنی برقرار است.

گزاره ۳.۴. گیریم S زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از $C(X)$ و $\mathcal{F}$ پالایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقراراند.

۱. $S = \overleftarrow{\mathcal{C}}\mathcal{C}[S]$ اگر و تنها اگر S اشباع‌شده باشد.

۲. $\mathcal{F} = \mathcal{C}\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]$ اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ یک c-پالایه باشد.

با استفاده از گزاره قبل مشاهده می‌کنیم نگاشتی که یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی اشباع‌شده‌ی S از $C(X)$ را به c-پالایه‌ی متناظر آن می‌برد (نگاشت $S \longrightarrow \mathcal{C}[S]$) یک نگاشت دوسویی است. با توجه به این نکته گزاره زیر به‌روشنی برقرار است.

گزاره ۴.۴. تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های بسته‌ی ضربی اشباع‌شده‌ی $C(X)$ و خانواده‌ی همه‌ی c-پالایه‌های روی X وجود دارد.

نمادگذاری. از این پس اگر $\mathcal{F}$ پالایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، برای سادگی در نوشتار، حلقه‌ی حدهای مستقیم توابع $[\bigcup_{F\in\mathcal{F}} C(F)]$ را با نماد $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین یادآوری می‌شود، اگر f و g توابعی از $C_{\mathcal{F}}(X)$ باشند، آن‌گاه $F, G \in \mathcal{F}$ وجود دارند به‌طوری‌که $f \in C(F)$ و $g \in C(G)$، و لذا جمع و ضرب این دو تابع، یعنی $f + g \in C_{\mathcal{F}}(X)$ و $f.g \in C_{\mathcal{F}}(X)$، به‌صورت زیر روی اشتراک دامنه‌های آن‌ها تعریف می‌شوند؛

$$f + g = f|_{F\cap G} + g|_{F\cap G}$$

$$fg = (f|_{F\cap G})(g|_{F\cap G}).$$

همچنین نماد $S_{\mathcal{F}}$ را به جای مجموعه بسته‌ی ضربی وابسته به $\mathcal{F}$، یعنی $\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]$، به‌کار می‌بریم. لذا حلقه‌ی $(\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}])^{-1}C(X)$ را با نماد $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ جایگزین می‌کنیم. از این رو طبق نکات فوق، $\frac{f}{g} \in S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ اگر و تنها اگر $f, g \in C(X)$ و $\operatorname{coz} g \in \mathcal{F}$. در پایان اضافه می‌کنیم، اگر S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $C(X)$ باشد، نماد $\mathcal{F}_S$ برای c-پالایه‌ی وابسته به S، یعنی $\mathcal{C}[S]$، استفاده می‌شود.

گزاره ۵.۴. گیریم $\mathcal{F}$ یک c–پالایه روی X باشد و کسرهای $\frac{f}{g}$ و $\frac{h}{k}$ به $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ تعلق داشته باشند. در این صورت $\frac{f}{g}=\frac{h}{k}$ اگر و تنها اگر روی عنصری از $\mathcal{F}$ تساوی $fk=gh$ برقرار باشد.

اثبات. توجه داریم که $\frac{f}{g}=\frac{h}{k}$ اگر و تنها اگر عنصر t در $S_{\mathcal{F}}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $t(fk-gh)=0$ یا به‌طور معادل روی $\operatorname{coz} t$ داشته باشیم $fk-gh=0$. اینک با استفاده از گزاره‌ی ۳.۴، متمم‌صفر–مجموعه‌ی $\operatorname{coz} t$ به $\mathcal{F}$ تعلق دارد و این اثبات را کامل می‌کند. □

در ادامه برای پالایه‌ی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های X، همریختی کانونی $f\to\frac{f}{1}$ از $C(X)$ به توی $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ را با نماد φ نشان می‌دهیم. همچنین همریختی طبیعی از $C(X)$ به توی $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ که هر عنصر f از $C(X)$ را به کلاس هم‌ارزی $[f]$ در $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ می‌برد، با نماد θ نمایش داده می‌شود.

برای اثبات قضیه‌ی اصلی این بخش به لم‌ها و گزاره‌ی بعد نیاز داریم.

لم ۶.۴. اگر $\mathcal{F}$ یک پالایه از زیرمجموعه‌های X و g عنصری از $S_{\mathcal{F}}$ باشد، آن‌گاه $\theta(g)$ عنصر یکه از $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ است.

اثبات. اگر $g\in S_{\mathcal{F}}$، آن‌گاه $\operatorname{coz} g\in\mathcal{F}$ و لذا تحدید تابع g به $\operatorname{coz} g$ که با نماد $g|_{\operatorname{coz} g}$ نمایش داده می‌شود، عنصری یکه از $C(\operatorname{coz} g)$ است. بنابراین $\theta(g)=[g]$ عنصری یکه از $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ خواهد بود. □

با استفاده از گزاره‌ی ۱۰.۵ در [۸] و لم قبل گزاره زیر به‌سادگی برقرار است.

گزاره ۷.۴. گیریم $\mathcal{F}$ یک پالایه از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت همریختی یکتای π از $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ به توی $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\theta=\pi o\varphi$. در حقیقت برای هر $f\in C(X)$ و هر $g\in S_{\mathcal{F}}$ خواهیم داشت

$$\pi\left(\frac{f}{g}\right)=\theta(f)\,(\theta(g))^{-1}=[f][g]^{-1}.$$

لم ۸.۴. ([۱، گزاره‌ی ۲.۷]) اگر $g\in C(X)$ و $f\in C^{*}(\operatorname{coz} g)$، آن‌گاه تابع

$$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x) & x\in\operatorname{coz} g\\ 0 & x\in Z(g)\end{cases}$$

پیوسته است.

لم ۹.۴. اگر $\mathcal{F}$ یک c–پالایه روی X باشد، آن‌گاه همریختی π بیان‌شده در گزاره‌ی ۷.۴، یکریختی است.

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم π تکریختی است. گیریم $\frac{f}{g}$ و $\frac{h}{k}$ کسرهایی از $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ باشند و داشته باشیم $\pi(\frac{f}{g})=\pi(\frac{h}{k})$. چون تساوی

$$[f][g]^{-1}=\pi(\frac{f}{g})=\pi(\frac{h}{k})=[h][k]^{-1}$$

برقرار است، عناصر F و E از $\mathcal{F}$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $F\subseteq\operatorname{coz} g$، $E\subseteq\operatorname{coz} k$ و برای هر $x\in F\cap E$ داریم $\frac{f}{g}(x)=\frac{h}{k}(x)$. بنابراین روی $F\cap E\in\mathcal{F}$ تساوی $fk=gh$ برقرار بوده، بنا به گزاره‌ی ۵.۴ خواهیم داشت $\frac{f}{g}=\frac{h}{k}$ که این ادعای ما را ثابت می‌کند.

از طرف دیگر نشان می‌دهیم π بروریختی است. بدین منظور گیریم $[f]$ عنصری از $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ باشد. چون $\mathcal{F}$ یک c–پالایه است عناصر $\operatorname{coz} g$ از $\mathcal{F}$ و g از $C(X)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $f\in C(\operatorname{coz} g)$. اینک بنا به لم ۸.۴ توابع

$$h(x)=\begin{cases} (\frac{1}{1+|f|}g)(x) & x\in\operatorname{coz} g\\ 0 & x\in Z(g)\end{cases},\quad k(x)=\begin{cases} (\frac{f}{1+|f|}g)(x) & x\in\operatorname{coz} g\\ 0 & x\in Z(g)\end{cases}$$

روی X پیوسته‌اند. از آنجا که $\operatorname{coz} h=\operatorname{coz} g\in\mathcal{F}$، خواهیم داشت $h\in S_{\mathcal{F}}$. از این رو $\frac{k}{h}\in S_{\mathcal{F}}^{-1}C$. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}\pi(\frac{k}{h})=[k][h]^{-1}&=\left[\frac{fg}{1+|f|}\right]\left[\frac{g}{1+|f|}\right]^{-1}\\&=\left[\frac{fg}{1+|f|}\right]\left[\frac{1+|f|}{g}\right]\\&=[f].\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $[f]\in[C_{\mathcal{F}}(X)]$ کسر $\frac{k}{h}$ از $S_{\mathcal{F}}^{-1}C$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\pi(\frac{k}{h})=[f]$ و این نشان می‌دهد π بروریختی است و لذا اثبات کامل می‌شود. □

اینک قضیه‌ی اصلی این بخش ارائه می‌گردد. قسمت اول این قضیه تعمیمی از قضیه‌ی ۶.۲(۲) در [۴] است. با استفاده از این قضیه مشاهده می‌کنیم که تناظری یک‌به‌یک بین حلقه‌های به‌شکل $[C_{\mathcal{F}}(X)]$ که در آن $\mathcal{F}$ یک c–پالایه روی X است و حلقه‌های کسرها به‌شکل $S^{-1}C(X)$ که در آن S یک ξ–مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از $C(X)$ است، وجود دارد.

قضیه ۱۰.۴. برای فضای توپولوژی X، گزاره های زیر برقرارند.

۱. اگر $\mathcal{F}$ یک c–پالایه روی X باشد، آن‌گاه $[C_{\mathcal{F}}(X)] \cong S_{\mathcal{F}}^{-1}C$.

۲. اگر S یک ξ–مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از $C(X)$ باشد، آن‌گاه $S^{-1}C(X) \cong [C_{\mathcal{F}_S}(X)]$.

اثبات. بنا به لم ۶.۴ و گزاره‌ی ۷.۴ اثبات قسمت ۱ روشن است. برای اثبات قسمت ۲، توجه داریم که برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $C(X)$ داریم

$$\mathcal{F}_S = \mathcal{C}[S] = \mathcal{C}[\bar{S}] = \mathcal{F}_{\bar{S}}.$$

همچنین طبق تمرین ۱۲.۵ در [۸] حلقه‌های $S^{-1}C$ و $\bar{S}^{-1}C$ یکریختند. بنابراین بدون کاستن از کلیت مساله، فرض کنیم ξ–مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S اشباع‌شده است. از طرفی بنا به گزاره‌ی ۳.۴ داریم

$$S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{C}[S]} = \overleftarrow{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}[S] = S.$$

اینک با استفاده از قسمت ۱ همین قضیه، نتیجه می‌شود حلقه‌های $S^{-1}C(X)$ و $[C_{\mathcal{F}_S}(X)]$ یکریخت‌اند. □

با کمک قضیه قبل نتایج زیر به‌سادگی اثبات می‌شوند.

نتیجه ۱۱.۴. اگر $\mathcal{F}$ پالایه‌ای دلخواه روی X باشد، آن‌گاه $S_{\mathcal{F}}^{-1}C \cong [C_{\mathcal{C}\overleftarrow{\mathcal{C}}[\mathcal{F}]}(X)]$.

نتیجه‌ی زیر ساختار حلقه‌های کسرهای کلاسیک $C(X)$ را بر حسب حدهای مستقیم توابع پیوسته روی متمم صفر–مجموعه‌های چگال بیان می‌کند. نخست یادآوری می‌کنیم عنصر f از $C(X)$ منظم است اگر و تنها اگر $\operatorname{coz} f$ در X چگال باشد.

نتیجه ۱۲.۴. ([۴، قضیه‌ی ۶.۲(۲)]) گیریم $\mathcal{V}$ پالایه‌ی تولیدشده با متمم صفر–مجموعه‌های چگال X باشد. در این صورت داریم

$$q(X) \cong [C_{\mathcal{V}}(X)].$$

قدردانی: نویسنده از داور محترم برای دقت در تصحیح این مقاله و ارسال پیشنهادات سازنده برای بهبود آن سپاسگزار است.

فهرست منابع

[1] F. Azarpanah, M. Paimann, A. R. Salehi, *Compactness, connectedness and countability properties of $C(X)$ with the r-topology*, Acta Math. Hungar. 146 (2) (2015), 265-284.

[2] P. Bhattacharjee, K. M. Drees, *Filter of Coz(X)*, Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl. 7 (2017), 107-123.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Ser. Pure Math., vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] N. J. Fine, L. Gillman, and J. Lambek, *Rings of quotients of rings of functions*, McGill University Press, Montréal, 1966.

[5] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer-Verlag, 1976.

[6] G. Mason, *z-Ideals and prime ideals*, J. Algebra. 26 (1973), 280-297.

[7] G. Mason, *Prime z-ideals of C(X) and related rings*, Canad. Math. Bull. 23 (4) (1980), 437-443.

[8] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, 2000.

Multiplicative closed ξ-subsets and rings of fractions of $C(X)$

A.R. Salehi †

Department Science, Petroleum University of Technology, Ahvaz, Iran

Communicated by: M. Namdari

Received: 2021/9/20 Accepted: 2022/2/17

Abstract: First, multiplicative closed ξ-subsets of a commutative ring are defined. Next, multiplicative closed ξ-subsets of $C(X)$ which are saturated are characterized. Finally, for a multiplicative closed ξ-subset S of $C(X)$ and its associated filter $\mathcal{F}_S$ of subsets of X generated by cozero-sets of elements of S it is shown that two rings $S^{-1}C(X)$ and the ring of direct limits of continuous functions on members of $\mathcal{F}_S$ are isomorphic.

Keywords: Multiplicative closed ξ-subset, Direct limits, Rings of fractions.

†Corresponding author.

E-mail addresses: a.r.salehi@put.ac.ir (Alireza Salehi),