مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۶۲-۷۰

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38966.1975

رازهای گروه فروبنیوس

محمدرضا درفشه [۱] ×

(۱) دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس علوم، دانشگاه تهران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۲۳

چکیده: گروه‌های فروبنیوس کلاس مهمی از گروه‌های متناهی است که در هردوی نظریه گروه‌ها و نظریه گروه‌های جایگشتی ظاهر می‌شود و کاربرد دارد. در این مقاله ضمن اثبات برخی خواص مهم این گروه، کلاس مهمی از گروه‌های فروبنیوس به‌نام گروه‌های فروبنیوس گویا را رده بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گروه فروبنیوس ، هسته فروبنیوس ، مکمل فروبنیوس.

رده‌بندی ریاضی: 20H20, 20F50.

۱ مقدمه

گروه فروبنیوس برای اولین بار در [۶] مطرح شد و تاکنون هرازگاهی پژوهش‌هایی درباره‌ی این گروه انجام می‌شود که در این راستا می‌توان به مراجع [۵] و [۲] اشاره کرد. اما دو تعریف درباره این گروه در زیر آورده می‌شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه سره و نابدیهی از G باشد . گوییم G گروه فروبنیوس با مکمل H است هرگاه برای هر $g \in G \setminus H$ تساوی $H \cap H^g = ۱$ برقرار باشد.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم G گروهی است که روی مجموعه Ω انتقالی عمل می‌کند. فرض کنیم به‌ازای هر $\alpha \in \Omega$ داریم $G \gneqq G_\alpha = H \neq ۱$. گوییم G یک گروه فروبنیوس با مکمل H است هرگاه $G_{\alpha,\beta} = ۱$ به‌ازای تمام $\alpha, \beta \in \Omega$ و $\alpha \neq \beta$ برقرار باشد.

در بخش بعدی نشان خواهیم داد که تعاریف ۱.۱ و ۲.۱ معادل‌اند. یک مثال از گروه فروبنیوس گروه دووجهی $D_{۲n}$ ، n فرد، است که مکمل فروبنیوس هر زیرگروه مرتبه ۲ است.

مثال دیگری از گروه فروبنیوس گروه آفین یک بعدی $Af_۱(F)$ است که F یک میدان است و

$$Af_۱(F) = \{\sigma : F \longrightarrow F \mid \sigma(x) = ax + b; a, b \in F; a \neq ۰\}.$$

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: darafsheh@ut.ac.ir (M. R. Darafsheh)

$Af_1(F)$ روی F به‌ترتیب فوق عمل می‌کند و به‌سادگی دیده می‌شود که این عمل انتقالی است و پایدارساز عبارت است از

$$H = \{\sigma : F \longrightarrow F \mid \sigma(x) = ax, a \in F^\times\}$$

که گروهی غیر بدیهی است. اما پایدارساز ۱ تحت H گروه بدیهی است. پس $Af_1(F)_{(0,1)} = 1$ و این نشان می‌دهد $Af_1(F)$ گروه فروبنیوسی است که اگر F میدان نامتناهی باشد این گروه نامتناهی است .

با وجودی‌که گروه فروبنیوس نامتناهی وجود دارد [۱] که خواص آن کاملا با گروه فروبنیوس متناهی تفاوت دارد ولی در این مقاله گروه فروبنیوس متناهی مورد بحث قرار می‌گیرد . فروبنیوس نشان داد که مجموعه

$$N = (G \setminus \bigcup_{g\in G} H^g) \cup \{1\}$$

یک زیر گروه نرمال G است درواقع؛ $G = NH$، $N \cap H = 1$.

یعنی G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم N و H است. N را هسته فروبنیوس می‌نامیم و اثبات زیرگروه بودن آن توسط فروبنیوس با استفاده از نظریه سرشت انجام شده و تاکنون هیچ اثباتی که در آن از نظریه سرشت استفاده نشده باشد، البته به‌جز، موارد خاص، وجود ندارد.

در حالتی که تعریف ۲.۱ مدنظر باشد زیرگروه N به‌صورت زیر است:

$$N = \{\pi \in G \mid \text{دارای نقطه ثابت نیست } \pi\} \cup \{1\}.$$

البته همان‌طور که گفته شد، اثبات زیرگروه بودن N با استفاده از نظریه گروه‌ها هم‌چنان به‌صورت یک راز باقیمانده است. نتیجه‌ای از تامپسون در رساله دکترایش وجود دارد [۹] که از آن نتیجه می‌شود N پوچ‌توان است. برای دیدن جدول سرشت گروه فروبنیوسی و همچنین اثبات زیرگروه بودن N با استفاده از نظریه سرشت خواننده می‌تواند به [۴] مراجعه کند .

تلاش‌های انجام‌شده برای اثبات زیرگروه بودن N بدون استفاده از نظریه سرشت با شرط زوج بودن مرتبه مکمل فروبنیوس و یا ساده نبودن گروه G انجام شده است، [۸] و [۲] ، تلاش‌ها همچنان بدون نتیجه مانده است. در اینجا تذکراتی درباره‌ی نمادگذاری می‌دهیم، وقتی گروه G روی مجموعه Ω عمل می‌کند برای $g \in G$ و $\omega \in \Omega$ حاصل عمل را به‌صورت ω^g نمایش می‌دهیم که باید در شرایط $\omega^1 = \omega$ و $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$ برای تمام $\omega \in \Omega$ و $g, h \in G$ برقرار باشد. G_ω پایدارساز ω است؛ یعنی $G_\omega = \{g \in G \mid \omega^g = \omega\}$ و $G_{\omega,\delta} = \{g \in G \mid \omega^g = \omega, \delta^g = \delta\}$. درمورد گروه G اگر $H \le G$ و $g \in G$، آن‌گاه $H^g = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$ مزدوج H در G نامیده می‌شود.

۲ خواص گروه فروبنیوس

ابتدا معادل بودن تعاریف ۱.۱ و ۲.۱ را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. تعاریف ۱.۱ و ۲.۱ معادل‌اند .

اثبات. ابتدا فرض کنیم ۱.۱ برقرار باشد؛ قرار می‌دهیم $\Omega = \{Hx \mid x \in G\}$. آن‌گاه واضح است که G با ضرب از سمت راست روی Ω انتقالی عمل می‌کند و پایدار یک نقطه یکریخت است با H . پس $G_\alpha \cong H$ برای $\alpha \in \Omega$ و $G, H \neq 1$. اگر $\alpha \neq \beta \in \Omega$، آن‌گاه می‌توان فرض کرد $\beta = Hg$ که $g \notin H$ و لذا $G_{\alpha,\beta} = H_\beta = \{x \in H \mid Hgx = Hg\}$. اما از $Hgx = Hg$ نتیجه می‌شود $gxg^{-1} \in H$ یا این‌که $x \in H^g$. پس $x \in H \cap H^g = 1$؛ یعنی $G_{\alpha,\beta} = 1$ و تعریف ۲.۱ نتیجه می‌شود.

در مرحله بعد، فرض کنیم تعریف ۲.۱ برقرار باشد و $1 \neq y \in H$. نشان می‌دهیم برای هر $x \in G \setminus H$ داریم $y \notin H^x$. چون $y \in H$ داریم $\alpha^y = \alpha$. قرار می‌دهیم $\alpha^x = \beta$ که $\beta \in \Omega$. در این‌صورت $\beta = \alpha^x \neq \alpha$. اکنون اگر $(\alpha^x)^y = \alpha^x$، آنگاه $y \in G_\beta$ که متناقض با تعریف ۲.۱ است. بنابراین

$$(\alpha^x)^y \neq \alpha^x \Longrightarrow \alpha^{xyx^{-1}} \neq \alpha \Longrightarrow xyx^{-1} \notin G_\alpha \Longrightarrow y \notin x^{-1}G_\alpha x = H^x \Longrightarrow y \notin H^x.$$

□

با معادل بودن این دو تعریف به‌سادگی دیده می‌شود که هسته فروبنیوس در هر تعریف به‌صورتی است که در بخش یک نوشته شده است.

گزاره ۲.۲. فرض کنیم G یک گروه فروبنیوس با مکمل H است در این‌صورت $N_G(H) = H$.

اثبات. واضح است که $H \leq N_G(H)$. فرض کنیم $g \in N_G(H)$ و $g \notin H$. از $g \in N_G(H)$ نتیجه می‌شود $H^g = H$ و چون G گروه فروبنیوس است $H \cap H^g = H = ۱$ که یک تناقض است. پس $g \in H$ و در نتیجه $N_G(H) \leq H$، که ثابت می‌کند $N_G(H) = H$. □

همان‌طور که گفته شد در سال ۱۹۰۱ میلادی فروبنیوس ثابت کرد که هسته فروبنیوس N زیرگروه نرمال G است که اثبات وی با استفاده از نظریه سرشت صورت گرفت. در اینجا قصد نداریم اثبات نظریه سرشتی وی را ارائه دهیم ولی درحالت خاصی نشان می‌دهیم N زیرگروه G است.

گزاره ۳.۲. فرض کنیم G گروه فروبنویس با مکمل H و هسته N باشد. همچنین فرض کنیم N زیرگروه G است. در این‌صورت:

(الف) $|N| = [G : H]$.

(ب) $N \trianglelefteq G$ و $G = NH$ و $N \cap H = ۱$.

اثبات. (الف) بنا به قضیه‌ای در نظریه گروه‌ها تعداد مزدوج‌های H در G برابر است با

$$[G : N_H(G)] = [G : H].$$

بنابراین

$$\bigcup\{H^g \mid g \in G\} = [G : H] \times (|H| - ۱) + ۱ = |G| - [G : H] + ۱.$$

در نتیجه:

$$|N| = |(G \setminus \bigcup_{g\in G} H^g) \cup \{۱\}| = |G| - (|G| - [G : H] + ۱) = [G : H].$$

(ب) فقط کافی است نرمال بودن N در G را بررسی کنیم. فرض کنیم $x \in N$ و $y \in G$. ثابت می‌کنیم $y^{-۱}xy \in N$. برای این منظور

$$x \in N \Longrightarrow x \in G - \bigcup_{g\in G} H^g \qquad \text{یا} \qquad x = ۱$$

اگر $x = ۱$ حکم ثابت است، در غیر این‌صورت $x \notin H^g$ برای هر $g \in G$. اما $y^{-۱}xy \in G$. ثابت می‌کنیم $y^{-۱}xy \notin \bigcup_{g\in G} H^g$. اگر چنین نباشد $y^{-۱}xy \in H^g$ برای یک $g \in G$. در نتیجه

$$x^y \in H^g \Longrightarrow x \in H^{gy^{-۱}} = H^{g'}, g' \in G$$

که یک تناقض است.

□

گزاره ۴.۲. فرض کنیم G گروه فروبنیوس با مکمل H و هسته N باشد و $N \leq G$. آن‌گاه برای هر عضو غیرهمانی x در N داریم $C_G(x) \leq N$.

اثبات. $H \cap C_G(x) = ۱$؛ زیرا اگر $h \in H$ و $h \in C_G(x)$، آن‌گاه $hx = xh$، در نتیجه $h = x^{-۱}hx \in H^x$ که نتیجه می‌دهد $h \in H^x \cap H = ۱$. اکنون فرض کنیم $y \in C_G(x)$. اگر $y \notin N$ آن‌گاه $۱ \neq y \in H^z$ به‌ازای zای. پس $y = z^{-۱}hz$ به‌ازای $h \in H$ای. بنابراین $zyz^{-۱} = h$ و لذا:

$$h(zxz^{-۱})h^{-۱} = zxz^{-۱}.$$

پس $h \in C_G(x^{z^{-۱}})$ که از آن نتیجه می شود $y^{z^{-۱}} \in C_G(x^{z^{-۱}})$. نهایتاً نتیجه می گیریم

$$y^{z^{-۱}} \in H \cap C_G(x^{z^{-۱}})$$

حال بنا به قسمت اول اثبات $y^{z^{-1}} = 1$ و در نتیجه $y = 1$ که یک تناقض است. پس $y \in N$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

گزاره ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه فروبنیوس با مکمل H و هسته N باشد و $N \leq G$. آن‌گاه:

(الف) اگر $1 \neq h \in H$ آن‌گاه $\varphi_h : n \longmapsto h^{-1}nh$ یک خود ریختی از N است که فقط عضو همانی N را ثابت نگه می‌دارد؛

(ب) $|H| \mid |N| - 1$؛

(ج) اگر $|H|$ زوج باشد؛ N گروهی آبلی است.

اثبات.

(الف) بنا به گزاره ۳.۲ (ب) داریم $N \trianglelefteq G$ و لذا $h^{-1}nh \in N$ برای هر $n \in N$. به‌سادگی بررسی می‌شود که φ_h یک خودریختی است.

$$\varphi_h(n) = n \Longrightarrow h^{-1}nh = n \Longrightarrow h = n^{-1}hn \in H \cap H^n$$

چون $h \neq 1$، پس $n \in H$. در نتیجه $n \in N \cap H$ و لذا $n = 1$.

(ب) عمل H روی $N - \{1\}$ توسط تزویج را در نظر می‌گیریم که چون H عضوی را ثابت نگه نمی‌دارد، پس اندازه ی هر مدار $|H|$ است و در نتیجه $|H| \mid |N| - 1$.

(ج) از این موضوع استفاده می‌کنیم که اگر φ یک خودریختی بدون نقطه ثابت از گروه متناهی G باشد، آن‌گاه هر $g \in G$ را می‌توان به‌صورت $g = x^{-1}\varphi(x)$ نوشت. چون $|H|$ عددی زوج فرض شده، پس $h \in H$ را طوری انتخاب می‌کنم که مرتبه‌اش ۲ باشد. بنا به (الف) φ_h یک خودریختی بدون نقطه ثابت از N است و لذا $n \in N$ را می‌توان به‌صورت $n = x^{-1}\varphi_h(x)$ ، به ازای xای از N، نوشت. پس:

$$\begin{aligned} n = x^{-1}\varphi_h(x) = x^{-1}x^h &\Longrightarrow nn^h = x^{-1}x^h(x^{-1})^h x^{h^2} = x^{-1}x = 1 \\ &\Longrightarrow n^h = n^{-1}, \forall n \in N. \end{aligned}$$

اکنون به‌ازای هر $x, y \in N$ داریم: $x^{-1}y^{-1} = x^h y^h = (xy)^h = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ که نتیجه می‌دهد N آبلی است. $\square$

۳ برهان مقدماتی برای زیرگروه بودن هسته فروبنیوس

در قسمت‌های قبل فرض کردیم که هسته فروبنیوس N زیرگروه است که اثبات آن با استفاده از نظریه سرشت توسط فروبنیوس انجام شده است. در این بخش قصد داریم اثباتی از زیرگروه بودن N در یک حالت خاص بدون استفاده از نظریه سرشت ارائه دهیم. در اینجا از تعریف ۲.۱ گروه فروبنیوس استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم G روی مجموعه Ω از اندازه n انتقالی عمل می‌کند. فرض کنیم G گروه فروبنیوس با مکمل $H = G_\alpha$، $\alpha \in \Omega$، از مرتبه زوج است. در این‌صورت هسته فروبنیوس

$$N = \{\pi \in G \mid \text{بدون نقطه ثابت}\, \pi\} \cup \{1\}.$$

زیر گروه G است.

اثبات. چون مرتبه G_α عددی زوج فرض شده، پس دارای عضوی از مرتبه ۲ است. کلاس تزویج این عضو مرتبه ۲ در G را T می‌نامیم. اگر $\alpha, \beta \in \Omega$ و $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه G_α و G_β مزدوجند و $G_\alpha \cap G_\beta = G_{\alpha,\beta} = 1$، لذا هرکدام از n پایدارساز نقطه‌ای حداقل یک عضو از T را دربردارد و $|T| \geq n$. اگر $t \in T$ آن‌گاه ساختار دوری t چنین است: یک دور به‌طول یک و $\frac{n-1}{2}$ دور به‌طول ۲. از آنجا که هیچ عضو نابدیهی G بیش‌تر از یک نقطه ثابت ندارد، هیچ دو عضوی از G نمی‌تواند ترانهش یکسانی را دربر داشته باشد. دقیقا $\frac{n(n-1)}{2}$ ترانهش در $\mathbb{S}_\Omega$ وجود دارد و لذا نتیجه می‌گیریم $|T|(\frac{n-1}{2}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ و از اینجا $|T| \leq n$. بنابراین

$|T| = n$ و هر ترانهش در یکی از عناصر T ظاهر می‌شود. به‌ویژه، هر پایدارساز نقطه‌ای دقیقا یک عضو از T را دربر دارد و درنتیجه مجموعه تمام عناصر مرتبه ۲ در G است.

برای نشان دادن این‌که N زیرگروه G است، کافی است نشان دهیم تحت عمل ضرب بسته است، یعنی اگر $s,t \in N$ آن‌گاه $st \in N$. فرض کنیم چنین چیزی نباشد؛ یعنی $st \notin N$، در این‌صورت $fix(st) = \{\beta\}$ که $\beta \in \Omega$. داریم $\beta^t = \beta^{(st)t} = \beta^s$ و لذا یکی از حالات زیر برقرار است:

$(\beta\beta^s) = (\beta\beta^t)$ ترانهشی است که در ساختار دوری هردوی s و t ظاهر می‌شود یا این‌که $\beta^s = \beta^t = \beta$، یعنی $s,t \in G_\beta$.

اما همان‌طور که در بالا دیدیم هیچ‌کدام از حالات فوق ممکن نیست که یک تناقض است. بنابراین $st \in N$ و N زیر گروه است. $\square$

بنابر گزاره ۳.۲ (ب) داریم $N \trianglelefteq G$ و بنابه [۹] N گروهی پوچ‌توان است. در حالتی که مرتبه H زوج باشد بنا به گزاره ۵.۲ (ج) N آبلی است.

۴ گروه فروبنیوس گویا

گروه‌های فروبنیوس از جنبه‌های گوناگونی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از این موارد خاصیت گویا بودن است که در این بخش توضیح می‌دهیم. این مفهوم در مرحله‌ای از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفت و نتایج جالبی به‌دست آوردیم [۳].

تعریف ۱.۴. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. $x \in G$ گویا نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر عدد صحیح m که نسبت به مرتبه x اول است عناصر x و x^m در G مزدوج باشند. گروه G را گویا نامیم هرگاه هر عضو آن گویا باشد. در این حالت برای G از اصطلاح $\mathbb{Q}$-گروه استفاده می‌کنیم.

مثالی از $\mathbb{Q}$-گروه، گروه متقارن $\mathbb{S}_۵$ است زیرا اگر $\pi \in \mathbb{S}_۵$ از مرتبه n فرض شود و $(m,n) = ۱$، آن‌گاه π^m و π دارای ساختار دوری یکسان هستند و لذا در $\mathbb{S}_۵$ مزدوجند. اما گروه متناوب $\mathbb{A}_۵$، $\mathbb{Q}$-گروه نیست زیرا اگر $\pi \in \mathbb{A}_۵$ از مرتبه ۵ اختیار شود π و $\pi^۲$ در $\mathbb{A}_۵$ مزدوج نیستند.

گزاره ۲.۴. فرض کنیم G گروه متناهی باشد. در اینصورت $x \in G$ گویا است اگر و تنها اگر

$$\frac{N_G(\langle x\rangle)}{C_G(\langle x\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle x\rangle).$$

اثبات. فرض کنیم $x \in G$ از مرتبه n وگویا باشد. می‌دانیم $\theta : \langle x\rangle \longrightarrow \langle x\rangle$ با ضابطه $\theta(x) = x^m$، $(m,n) = ۱$، یک خودریختی از $\langle x\rangle$ است و تمام خودریختی‌های گروه دوری $\langle x\rangle$ به‌صورت فوق است و داریم $|\mathbb{A}ut(\langle x\rangle)| = \varphi(n)$ که φ تابع اویلر می‌باشد. اما بنابه قضیه‌ای از نظریه گروه‌ها، همریختی $f : N_G(\langle x\rangle) \longrightarrow \mathbb{A}ut(\langle x\rangle)$ با ضابطه

$$y \longmapsto x^y = y^{-۱}xy$$

با هسته $C_G(\langle x\rangle)$ وجود دارد. با توجه به گویا بودن x این همریختی پوشا است و در نتیجه

$$\frac{N_G(\langle x\rangle)}{C_G(\langle x\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle x\rangle).$$

$\square$

گزاره ۳.۴. مرتبه هر گروه گویای نابدیهی عددی زوج است.

اثبات. فرض کنیم G گروهی نابدیهی و گویا و p کوچکترین عدد اولی باشد که مرتبه G را عاد می‌کند. بنا به قضیه کشی G دارای عضو مرتبه p است و بنابه قضیه فوق $\frac{N_G(\langle x\rangle)}{C_G(\langle x\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle x\rangle) \cong \mathbb{Z}_{p-۱}$. پس $p-۱ \mid |G|$ و با توجه به انتخاب p نتیجه می‌شود $p-۱ = ۱$ و لذا $p = ۲$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

اگر G یک گروه آبلی متناهی گویا فرض شود و $|G| > ۲$، آن‌گاه فرض کنید $x \in G$ عضوی از مرتبه فرد است. بنا به گزاره ۲.۴ داریم $\frac{N_G(\langle x\rangle)}{C_G(\langle x\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle x\rangle)$ که چون سمت چپ یکریختی فوق بدیهی است و $\mathbb{A}ut(\langle x\rangle) \neq ۱$ به تناقض می‌رسیم. نتیجه می‌گیریم تنها گروه آبلی متناظر عبارت‌اند از همانی و $\mathbb{Z}_۲$.

در ادامه ساختار یک گروه فروبنیوس گویا را پیدا خواهیم کرد.

گزاره **۴.۴.** گروه خارج قسمتی و حاصل‌ضرب مستقیم $\mathbb{Q}$-گروه‌ها، $\mathbb{Q}$-گروه است.

اثبات. واضح است. $\square$

گزاره **۵.۴.** فرض کنیم G یک گروه فروبنیوس متناهی گویا با مکمل H باشد. در این‌صورت H با گروه دوری $\mathbb{Z}_۲$ یا گروه کواترنیون $Q_۸$ یکریخت است.

اثبات. فرض کنیم G گروه فروبنیوس گویا با مکمل H و هسته N باشد، در این‌صورت $G = NH$ و $N \cap H = ۱$ و لذا $\frac{G}{N} \cong H$ نیز یک $\mathbb{Q}$-گروه است. چون $H \neq ۱$ پس $۲ \mid |H|$. دو حالت را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: H گروهی غیرحل‌پذیر است. در این حالت بنا به نتیجه‌ای از زازن هاوس [۸]، گروه G دارای زیرگروه نرمال $G_۰$ است به طوری‌که $[G : G_۰] \leq ۲$ و $G_۰ \cong SL_۲(۵) \times M$ که M گروهی است که مرتبه‌اش نسبت به ۲،۳ و ۵ اول است. اما $SL_۲(۵)$ Q-گروه نیست؛ زیرا اگر چنین باشد $\frac{SL_۲(۵)}{Z(SL_۲(۵))} \cong \mathbb{A}_۵$ نیز یک $\mathbb{Q}$-گروه است که می‌دانیم نیست. پس اگر $G = G_۰ = SL_۲(۵) \times M$ آن‌گاه G یک $\mathbb{Q}$-گروه نیست. اگر $[G : G_۰] = ۲$، آن‌گاه $\frac{G}{G_۰} \cong \mathbb{Z}_۲$ و در نتیجه $\frac{G}{M} \cong SL_۲(۵) : \mathbb{Z}_۲$ که باز هم $\mathbb{Q}$-گروه نیست.

حالت دوم: H گروهی حل‌پذیر است. در این‌حالت با استفاده از مقاله [۷] نتیجه می‌گیریم $\pi(H) \subseteq \{۲, ۳, ۵\}$ که $\pi(H)$ مجموعه اعداد اولی است که مرتبه H را عاد می‌کنند. چون $۲ \mid |H|$ بنا به [۸] سیلو ۲-زیرگروه‌های H یا دوری‌اند و یا با گروه کواترنیون تعمیم یافته یکریختند. ابتدا فرض کنیم که یک سیلو ۲-زیرگروه P از H کواترنیون تعمیم یافته است؛ یعنی

$$P = \langle x, y \mid x^{۲^n}, y^۲ = x^{۲^{n-۱}}, y^{-۱}xy = x^{-۱} \rangle.$$

داریم $|P| = ۲^{n+۱}$، $n \geq ۲$، و $o(x) = ۲^n$. چون H یک $\mathbb{Q}$-گروه است، پس:

$$|\frac{N_G(\langle x \rangle)}{C_G(\langle x \rangle)}| = \varphi(۲^n) = ۲^{n-۱}.$$

اما چون $\langle x \rangle \trianglelefteq P$، $|\frac{N_G(\langle x \rangle)}{C_G(\langle x \rangle)}| \leq ۲$، در نتیجه $n - ۱ \leq ۱$ و لذا $n \leq ۲$. چون $n \geq ۲$ فرض شده پس $n = ۲$. بنابراین یک سیلو ۲-زیر گروه H با گروه کواترنیون مرتبه ۸ یکریخت است. در مرحله بعد فرض کنید p یک عدد فرد و $p \mid |H|$. باز بنا به [۸] سیلو p-زیرگروه‌های H دوری‌اند . بنابراین اگر $S = \langle x \rangle$، $o(x) = p^m$، یک سیلو p-زیرگروه H باشد، آن‌گاه

$$|\frac{N_H(S)}{C_H(S)}| = \varphi(p^m) = p^{m-۱}(p - ۱).$$

چون $|\frac{N_H(S)}{C_H(S)}| \nmid p$، پس $m = ۱$، یعنی سیلو p-زیرگروه های H از مرتبه pاند. بنابراین برای مرتبه H امکانات زیر را داریم:

$$|H| = ۲^۳, ۲^۳ \cdot ۳, ۲^۳ \cdot ۵, ۲^۳ \cdot ۳ \cdot ۵.$$

نشان می‌دهیم فقط $|H| = ۲^۳$ امکان‌پذیر است. برای حذف امکانات دیگر از این واقعیت استفاده می‌کنیم که H شامل عضو مرکزی منحصر بفرد z از مرتبه ۲ است [۸].

(آ) $|H| = ۲^۳ \cdot ۵$: در این‌صورت $\frac{H}{\langle z \rangle}$ یک $\mathbb{Q}$-گروه از مرتبه ۲۰ است. اما گروه های ناآبلی از مرتبه ۲۰ عبارت‌اند از $\mathbb{Z}_۲ \times D_{۱۰}$، $\mathbb{Z}_{۱۰} \cdot \mathbb{Z}_۲$، $\mathbb{Z}_۴ : \mathbb{Z}_۵$ که دیده می‌شود هیچ‌کدام $\mathbb{Q}$-گروه نیستند.

(ب) $|H| = ۲^۳ \cdot ۳ \cdot ۵$: چون H حل‌پذیر فرض شده است، پس دارای زیرگروهی از مرتبه $۳ \cdot ۵$ است که باید دوری باشد. بنابراین $\frac{H}{\langle z\rangle}$ یک $\mathbb{Q}$-گروه از مرتبه $۲^۳ \cdot ۳ \cdot ۵$ است که دارای عضوی از مرتبه ۱۵ می‌باشد . این حکم می‌کند $\varphi(۱۵) = ۸ \mid \frac{H}{\langle z\rangle}$ که غیرممکن است.

(ج) $|H| = ۲^۳ \cdot ۳$: در این حالت $\frac{H}{\langle z\rangle}$ یک $\mathbb{Q}$-گروه از مرتبه ۱۲ است. می‌توان بررسی کرد که تنها امکان عبارت است از $\frac{H}{\langle z\rangle} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{S}_۳$. پس یک سیلو ۳-زیرگروه S از H در H نرمال است و لذا $C_H(S) \cong \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۴$ یک زیرگروه نرمال از H است و از این رو H نمی‌تواند $\mathbb{Q}$-گروه باشد.

بنابراین فقط حالت $۲^۳ |H|$ باقی می‌ماند که H گروه کواترنیون مرتبه ۸ است. حالت بعدی این است که یک سیلو ۲-زیرگروه S از H دوری باشد. بنا به قضیه‌ای از برنساید زیرگروه نرمال N از H وجود دارد به طوری که $H = NS$ و $N \cap S = ۱$. چون $S \cong \frac{H}{N}$ یک $\mathbb{Q}$-گروه دوری است، باید داشته باشیم $|S| = ۲$. از این‌رو $H = N : \mathbb{Z}_۲$ که در آن N از مرتبه فرد است. اما گروه H در این‌حالت یک $\{۲,۳\}$-گروه ابرحل‌پذیر است. فرض کنیم $|N| = ۳^n$، $n \geq ۰$ و قرار می‌دهیم $N = \langle x\rangle$. از تساوی $\frac{N_G(\langle x\rangle)}{C_G(\langle x\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle x\rangle)$ نتیجه می‌گیریم $\frac{H}{C_H(\langle x\rangle)}$ با گروه دوری از مرتبه $۲ \cdot ۳^{n-۱}$ یکریخت است که چون یک $\mathbb{Q}$-گروه است پس $n \leq ۱$. از این‌رو H از مرتبه ۲ یا ۶ است. اگر $|H| = ۶$، آن‌گاه از $\mathbb{Q}$-گروه بودن H نتیجه می‌شود $H \cong \mathbb{S}_۳$ که بنا به [۸] نمی‌تواند مکمل فروبنیوس باشد. بنابراین $H \cong \mathbb{Z}_۲$ و گزاره ثابت می‌شود.

□

قضیه ۶.۴. فرض کنیم G یک گروه فروبنیوس با مکمل H و هسته N باشد. اگر G، $\mathbb{Q}$-گروه باشد آن‌گاه H با $\mathbb{Z}_۲$ یا $Q_۸$ یکریخت است و N یک p-گروه آبلی است که ۵ یا ۳ $p =$.

اثبات. با توجه به فرضیات قضیه و بنا به گزاره ۵.۴، H با $\mathbb{Z}_۲$ یا $Q_۸$ یکریخت است. چون $H \cong \frac{G}{N}$ یک ۲-گروه است نتیجه می‌گیریم G گروهی حل‌پذیر است. بنا به [۷]، $\pi(G) \subseteq \{۲,۳,۵\}$ که نتیجه می‌دهد $\pi(N) \subseteq \{۲,۳,۵\}$. از این‌که $|H| \mid |K| - ۱$ نتیجه می‌گیریم $\pi(K) \subseteq \{۳,۵\}$. اگر $g \in N$ می‌توان فرض کرد $O(g) = ۳^r۵^s$، $r, s \geq ۰$. چون G گروه فروبنیوس گویا است پس $C_G(g) = N$ و $\frac{N_G(\langle g\rangle)}{C_G(\langle g\rangle)} \cong \mathbb{A}ut(\langle g\rangle)$.

اما $|\mathbb{A}ut(\langle g\rangle)|$ باید توانی از ۲ باشد که از آن نتیجه می‌شود $r, s \leq ۱$. بنابراین مرتبه هر عضو غیرهمانی N یکی از اعداد ۳، ۵ یا ۱۵ است. اگر N دارای عضوی از مرتبه ۱۵ باشد، آن‌گاه $|\frac{N_G(\langle g\rangle)}{N}| = ۸$ و باید با $Q_۸$ یکریخت باشد که غیرممکن است؛ زیرا $\mathbb{A}ut(\langle g\rangle)$ گروهی آبلی است. پس مرتبه هر عضو غیرهمانی از N یکی از اعداد ۳ یا ۵ است و قضیه ثابت می‌شود. □

نتیجه ۷.۴. فرض کنیم G یک $\mathbb{Q}$-گروه فروبنیوس باشد. در این‌صورت

۱. $G \cong E(۳^n) : \mathbb{Z}_۲$، $n \geq ۱$، که $E(۳^n)$ گروه آبلی مقدماتی از مرتبه ۳^n است و $\mathbb{Z}_۲$ روی $E(۳^n)$ با وارون کردن هر عضو عمل می‌کند؛

۲. $G \cong E(۳^{۲m}) : Q_۸$، $m \geq ۱$، $E(۳^{۲m})$ جمع مستقیم m کپی از نمایش تحویل‌ناپذیر ۲ بعدی $Q_۸$ روی میدان با ۳ عضو است؛

۳. $G \cong E(۵^۲) : Q_۸$ که $E(۵^۲)$ نمایش تحویل‌ناپذیر ۲بعدی $Q_۸$ روی میدان با ۵ عضو است.

اثبات. نتایج فوق ازگزاره‌های قبلی نتیجه می‌شود و در واقع هر کدام از گروه‌های ذکرشده در (۱) و (۲) و (۳) $\mathbb{Q}$-گروه فروبنیوس‌اند. □

فهرست منابع

[1] M. J. Collins, *Some infinite Frobenious groups*, J. Alg. 131 (1990) 161-165.

[2] K. Corradi and E. Horuath, *Steps towards an elemamtary proof of Frobenious's theorem*, Comm. Alg; 24 (1996) 2285-2292.

[3] M. R. Darafsheh and H. sharifi, Frobenious Q-groups, Arch. Math. 83 (2004) 102 - 105.

[4] L. Dorohoff, *Group representation theory*, Part A Ordinary representation theory, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

[5] W. Feit, *On the structure of Forbenious group*, Canad. J. Math., 9 (1957) 587-596.

[6] F. G. Frobeniiuo, *uber auflosbare Gruppen IV*, S'ber. Akad. Wiss. Berlin (1901), 1216 – 1230 ; Ges, Abh. III, 189-203.

[7] R. Gow, *Groups whose characters are rational-valued*, J. Alg. 40, 280-299 (1976).

[8] D. S. Passman, *Permutation groups*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1968.

[9] J. G. Thompson, *Finite groups with fixed point automorphisms of prime order*, proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A 45 (1595), 578-581.

Secrets of Frobenius Group

Mohamad Reza Darafsheh [1] †

(1) School of mathematics, statistics and computer science, College of Science, University of Theran, Tehran, Iran

Communicated by: M. Namdari

Received: 2021/10/22 Accepted: 2021/12/4

Abstract: Frobenius groups are important class of finite groups. They appear in both the theory of abstract groups as well as permutation groups and have applications. In the paper we prove some important properties of Frobenius groups and classify a class of Frobenius groups called $\mathbb{Q}$-groups.

Keywords: Frobenius group, Frobenius kernel, Frobenius complement

†Corresponding author.
E-mail addresses: darafsheh@ut.ac.ir (M. R. Darafsheh),