مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۷۱-۸۰

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.39205.1981

چندضلعی محدب و برنامه‌ریزی با اعداد صحیح

هادی بصیرزاده ×، محمد یاراحمدی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: امید علی شهنی کرم‌زاده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۳

چکیده: در این مقاله، چندضلعی‌های با اضلاع صحیح معرفی می‌شوند که در رابطه‌ای مشابه رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند. نشان داده می‌شود که این رابطه شبه‌فیثاغورس برای تمام n-ضلعی‌هایی که به این‌صورت ساخته شده‌اند، صدق می‌کند. هم‌چنین، ثابت می‌شود که زاویه مرکزی چندضلعی‌های مذکور از مقداری ثابت، بیش‌تر نیست و بنابراین این چندضلعی‌ها همواره محدب‌اند. به‌علاوه، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح ارائه می‌شود که این مدل می‌تواند اضلاع صحیح این چندضلعی‌ها را به‌دست دهد.

واژه‌های کلیدی: چندضلعی محدب، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح، بهینه‌سازی.

رده‌بندی ریاضی: 52B99; 90C90; 90C10

۱ مقدمه

مسائل بهینه‌سازی هندسی هسته اصلی بسیاری از کاربردها در پردازش هندسه است. انتخاب نمایش هندسی متناسب با یک مسئله بهینه‌سازی می‌تواند حل مسئله را به‌طور چشمگیری ساده کند[۴–۶، ۱۲]. پیدا کردن اعداد صحیح a، b و c که اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند همواره موردعلاقه ریاضی‌دانان بوده است. کتیبه پلیمپتون ۳۲۲ که مربوط به ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح است، اعدادی بر روی آن حک شده است که بیان‌گر اندازه وتر و اندازه ساق‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند که همگی مقادیر صحیح دارند. کتیبه پلیمپتون ۳۲۲ اولین بار توسط «نوگه بائر» و «ژاکس» در سال ۱۹۴۵ توصیف شد[۹]. هزار سال بعد از زمان کتیبه پلیمپتون، تلاش‌هایی صورت گرفت که سه‌تایی‌های فیثاغورسی را به‌صورت پارامتری پیش‌بینی نماید (به صفحه ۷۲ از [۲] رجوع شود).

سه‌تایی‌های مرتب از اعداد صحیح مثبت مانند (a, b, c) را که می‌توانند اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، سه‌تایی‌های فیثاغورسی می‌نامند. اگر سه‌تایی فیثاغورسی (a, b, c) دارای هیچ مقسوم علیه مشترک صحیح به‌جز واحد نباشد آن‌را سه‌تایی فیثاغورسی اولیه می‌نامند. به‌عنوان مثال، (۵،۴،۳) یک سه‌تایی فیثاغورسی اولیه است و (۱۰،۸،۶) یک سه‌تایی فیثاغورسی است که اولیه نیست.

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: basirzad@scu.ac.ir (H. Basirzadeh), m.yarahmadi@scu.ac.ir (M. Yar Ahmadi)

معادله فیثاغورسی $x^2+y^2=z^2$ حالت خاصی از معادله سیاله $x^2+y^2=n$ است که n عدد صحیح مثبتی است. فرض کنیم $a_1, a_2, \cdots, a_k$ و n اعدادی صحیح باشند در این‌صورت معادله زیر را معادله سیاله درجه دوم می‌گویند.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{m=1}^{k} a_m x_m^2 = n. \tag{۱.۱}$$

مسئله نمایش یک عدد صحیح مثبت n به‌صورت مجموع چهار عدد مربع کامل را که به معادله سیاله

$$x^2+y^2+z^2+w^2=n, \tag{۲.۱}$$

متناظر است حالت خاصی از معادله سیاله (۱.۱) است. معادله (۲.۱) به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، حل‌پذیر است. یعنی هر عدد مثبت n، مجموع چهار عدد مربع کامل است. «ورینگ» ریاضی‌دان انگلیسی، درسال ۱۷۷۵ میلادی، ادعا کرد که هر عدد صحیح مثبت n می‌تواند به‌صورت مجموع چهار عدد مربع، ۹ عدد مکعب ، ۱۹ عدد قوه‌ی چهارم و ... نوشته شود. دیوید هیلبرت در ۱۹۰۹ ادعای ورینگ را ثابت کرد. او نشان داد که به‌ازای هر $k \geq ۲$، عددی صحیح مانند N_k موجود است به‌طوری که هر عدد صحیح، مجموع N_kتا عدد قوه kام است. «فرما» حدس زد که معادله $x^n+y^n=z^n$ برای $n \geq ۳$، هیچ جواب ناصفر برای x، y، z ندارد. هم‌چنین معادله $x^4+y^4=z^2$ دارای جواب صحیح غیرصفر نیست. یعنی مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که طول اضلاع آن اعداد صحیح و هر دو ساق آن مربع کامل باشد. پاسخ به این سوال که آیا می‌توان هر عدد صحیح را به‌صورت مجموع سه عدد مربع کامل نوشت، منفی است. به‌عنوان مثال، عدد صحیح ۷ مجموع سه عدد مربع کامل نیست ولی مجموع چهار عدد مربع کامل است. در سال ۱۶۲۱ میلادی، «باشه» حدس زد که هر عدد صحیح، مجموع چهار عدد مربع کامل است. فرما ادعا کرد که با استفاده از روش نزول نامتناهی خویش این حدس را ثابت کرده است. صد سال بعد از مرگ فرما در سال ۱۷۷۰ میلادی، «لاگرانژ» ریاضی‌دان فرانسوی برهانی برای آن ارائه نمود. در این زمینه اویلر اتحادی را ارائه و اثبات کرد که می‌گوید اگر بتوان اعداد صحیح n و m را به‌صورت مجموع چهار عدد مربع کامل نوشت، آنگاه حاصل‌ضرب nm را نیز می‌توان چنین نوشت. هم‌چنین وی بیان می‌کند که اگر هر عدد اول را بتوان به‌صورت مجموع چهار عدد مربع کامل نوشت، آنگاه هر عدد صحیح نامنفی را نیز می‌توان به این‌صورت نوشت[۱].

تاکنون فرمول‌های متفاوتی برای پیدا کردن اعداد فیثاغورسی صحیح ارائه شده است. یکی از مسائل مرتبط با اعداد فیثاغورسی پیدا کردن چهارضلعی‌هایی است که دارای اضلاع صحیح‌اند. در هندسه هندی، قضایای برهماگوپتا دارای اهمیت‌اند. «برهماگوپتا» به شبه‌ذوزنقه‌هایی دست یافت که آن‌ها را شبه‌ذوزنقه برهماگوپتا نام نهاد. این چهارضلعی‌ها دارای اضلاع صحیح، مساحت و قطرهای گویایند که قطرهای آن عمود برهم‌اند، به [۲]، [۳] و [۷] رجوع شود.

در این مقاله چندضلعی‌هایی را با اندازه اضلاع صحیح با استفاده از خواص مثلث‌های قائم‌الزاویه معرفی می‌کنیم که دارای خواص جالب و با ارزشی در هندسه و ریاضیات و به‌خصوص در برنامه‌ریزی غیرخطی و بهینه‌سازی است. این چندضلعی‌ها را به‌گونه‌ای می‌سازیم که دارای یک زاویه قائمه باشند و محیط و مساحت آن‌ها از یک فرمول ساده تبعیت کند. با بیان چند نمونه از آن‌ها یک روند کلی برای ساخت یک n–ضلعی با این خصوصیات ارائه می‌دهیم و براساس آن، رفتار این‌گونه چندضلعی‌ها را پیش‌بینی می‌کنیم. در واقع، ثابت می‌کنیم که زاویه مرکزی همه این چندضلعی‌ها از مقداری ثابت بیش‌تر نیست. اثبات این موضوع، به‌روشی ساده و زیبا با استفاده از مفهوم تقریب چندضلعی با قطاع یک دایره انجام می‌شود. سپس با استفاده از این حکم، نتیجه می‌گیریم که این چندضلعی‌ها همواره محدب‌اند.

برای ارتباط بین اضلاع این چندضلعی‌ها، رابطه‌ای جبری مشابه رابطه فیثاغورس ارائه می‌دهیم و سپس نشان می‌دهیم که این رابطه شبه‌فیثاغورس برای تمام n–ضلعی‌هایی که به این‌صورت ساخته شده‌اند صدق می‌کند. هم‌چنین اندازه اضلاع برای ساخت هر کدام از این چندضلعی‌ها را در یک سطر می‌نویسیم و این سطرها را به‌ترتیب، زیر هم قرار می‌دهیم. مشاهده می‌شود که آرایه‌ای ذوزنقه‌ای شکل تشکیل می‌شود. همان‌طور که بیان شد، این مقاله تلاش می‌کند براساس این‌گونه چندضلعی‌ها یک رابطه جالب و بسیار کاربردی بین هندسه، جبر و برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح برقرار نماید.

۲ بیان مسئله

ما به دنبال چندضلعی‌هایی با یک زاویه قائمه هستیم که دارای اضلاع صحیح و کم‌ترین محیط ممکن باشند. یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه که هر کدام برابر یک است را در نظر می‌گیریم. این مثلث دارای وتری برابر $\sqrt{۲}$ است. کوچک‌ترین مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح، مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ است. طبق قاعده فیثاغورس داریم:

$$۳^2+۴^2=۵^2.$$

محیط این مثلث $P = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$ و مساحت آن $S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = ۶$ است، که اعدادی صحیح‌اند. مثالی دیگر می‌تواند مثلثی با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ باشد که در این مثلث قائم‌الزاویه نیز $P = ۵ + ۱۲ + ۱۳ = ۳۰$ و $S = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ = ۳۰$ که باز هم اعدادی صحیح‌اند ولی کوچک‌ترین مثلث قائم‌الزاویه نیست. براساس همین دو مثلث قائم‌الزاویه معرفی‌شده، می‌توانیم چهارضلعی جدیدی بنا کنیم. مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ را در نظر می‌گیریم. حال بر روی یک گوشه از وتر، یک زاویه قائمه رسم کنید که ضلع دیگر آن به اندازه ۱۲ باشد. دراین‌صورت وتر مثلث بنا شده، برابر ۱۳ است. هم‌اکنون، چهارضلعی به اضلاع ۳، ۴، ۱۲ و ۱۳ را در نظر بگیرید که بر اثر مجاورت دو مثلث بالایی به‌دست آمده است. محیط این چهار ضلعی $P = ۳ + ۴ + ۱۲ + ۱۳ = ۳۲$ و مساحت آن $S = S_۱ + S_۲ = ۶ + ۳۰ = ۳۶$ نیزاعدادی صحیح‌اند. نکته قابل توجه این است که در این چهارضلعی نیز رابطه‌ای شبیه رابطه فیثاغورس می‌توان بیان کرد، یعنی رابطه $۱۳^۲ = ۱۲^۲ + ۴^۲ + ۳^۲$ بین اضلاع چهارضلعی جدید برقرار است. بنابراین چهارضلعی با اضلاع، محیط و مساحت صحیح وجود دارد که در رابطه $a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲ = a_۴^۲$ صدق می‌کند. حال سؤالی مطرح می‌شود که آیا می‌توان پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی و به‌همین ترتیب n-ضلعی‌هایی با اعداد صحیح ساخت که دارای محیط و مساحت صحیح‌اند و در رابطه $a_۱^۲ + a_۲^۲ + \ldots + a_{n-۱}^۲ = a_n^۲$ صدق کنند[۸]؟ پاسخ مثبت است اما این چندضلعی‌ها همیشه محدب نمی‌مانند و با بزرگ شدن تعداد اضلاع، چندضلعی‌های نامحدبی ایجاد می‌شود که از جایی به بعد، چندضلعی خودش را قطع می‌کند.

۳ ساختن یک چندضلعی با ویژگی‌های جالب

در اینجا، می‌خواهیم چندضلعی‌هایی با شرایط چهارگانه زیر بنا کنیم:

آ. یک زاویه قائمه دارند،

ب. اضلاع آن به‌جز دو ضلع ابتدا و انتهای آن، همگی برابر یک‌اند،

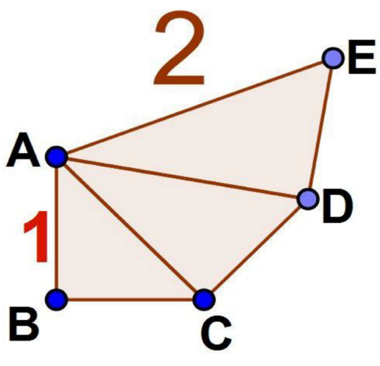
ج. دو ضلع ابتدا و انتهای آن دو عدد طبیعی متوالی دلخواه‌اند،

د. دارای کم‌ترین محیط ممکن‌اند.

یعنی به‌دنبال چندضلعی‌هایی‌ایم که دارای کوچک‌ترین اضلاع صحیح‌اند و با توجه به اضلاع دلخواه ابتدایی و انتهایی دارای محیط کمینه‌اند و علاوه بر آن مساحت آن‌ها نیز از یک نظم منطقی تبعیت کند.

۱.۳ روش ساخت

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC که قائمه در B و اندازه اضلاع زاویه قائمه برابر یک را در نظر می‌گیریم. بر روی وتر و در یک گوشه از وتر مانند C ضلع جدیدی به اندازه یک بنا می‌کنیم به‌طوری‌که این ضلع نیز بر وتر مثلث اولیه عمود باشد. چهارضلعی جدیدی براساس این اضلاع داریم. یعنی چهارضلعی $ABCD$ که سه ضلع آن برابر یک و یک ضلع آن به اندازه $\sqrt{۳}$ است. روی ضلع بزرگ‌تر و در یک گوشه از آن مانند D ضلع جدیدی به اندازه یک رسم کنیم که بر AD عمود باشد. پنج‌ضلعی جدید $ABCDE$ دارای اضلاع صحیح است. یعنی چهار ضلع آن برابر یک و اندازه ضلع پنجم برابر ۲ است. شکل ۱ را ببینیم.



شکل ۱: پنج‌ضلعی

این پنج‌ضلعی دارای اضلاع صحیح و اندازه محیط صحیح است اما مساحت آن دیگر صحیح نیست با این حال از یک نظم منطقی برخوردار است. اگر محیط چندضلعی را با P و مساحت آن را با S نشان دهیم خواهیم داشت: $P_۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ = ۶$ و $S_۵ = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۳})$. یعنی کوچک‌ترین n-ضلعی که با فرایند گفته‌شده می‌توان یافت که همه اضلاع

آن صحیح باشند پنج‌ضلعی است. حال می‌خواهیم بدانیم اگر این فرایند را تکرار کنیم آیا چندضلعی‌هایی با اعداد صحیح می‌توان بنا کرد؟ قبل از آن متذکر می‌شویم که پنج‌ضلعی معرفی شده یک پنج‌ضلعی محدب است. حال فرایند را برای ضلع دلخواه برابر ۲ تکرار می‌کنیم؛ یعنی یک مثلث قائم‌الزاویه که ضلع ابتدایی آن برابر عدد ۲ و ضلع دیگرش برابر ۱ باشد را رسم می‌کنیم. اندازه وتر برابر $\sqrt{۵}$ است که عددی صحیح نیست. روی یکی از گوشه‌های وتر یک زاویه قائمه به ارتفاع واحد رسم می‌کنیم تا چهارضلعی‌ای به‌دست آید. این چهارضلعی دارای اضلاع برابر ۲، ۱، ۱ و $\sqrt{۶}$ است که ضلع آخر صحیح نیست. فرایند را دنبال می‌کنیم تا اعداد صحیح به‌دست آیند. پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی حاصل دارای ضلعی است که اندازه صحیح ندارد. اما هفت‌ضلعی‌ای که براساس این فرایند به‌دست می‌آید دارای اضلاع صحیح است و محیط و مساحت آن قابل فرمول‌بندی و محاسبه است. این هفت‌ضلعی نیز محدب است و محیط و مساحت آن را می‌توان برحسب تعداد اضلاع نوشت. می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم اگر این فرایند را دنبال کنیم چندضلعی‌هایی با کوچک‌ترین محیط و با اضلاع ابتدایی و انتهایی دلخواه دیگر را چگونه می‌توان نوشت.

۲.۳ ویژگی‌های مشترک چندضلعی‌های ساخته شده

با دقت در نتایج به‌دست‌آمده برای ساخت چندضلعی‌های مورد بحث درمی‌یابیم که این چندضلعی‌ها، دارای خواص مشترک زیرند:

۱) این چندضلعی‌ها همواره دارای $۲n+۳$ ضلع‌اند که برای $n = ۱, ۲, ۳, \dots$ عددی فرد است،

۲) این چندضلعی‌ها همواره دارای $۲n+۱$ ضلع میانی برابر ۱ و اضلاع ابتدایی و انتهایی دلخواه به‌ترتیب برابر n و $n+۱$ است،

۳) این چندضلعی‌ها همواره دارای یک زاویه قائمه‌اند،

۴) محیط این چندضلعی‌ها همواره عددی صحیح مثبت و برابر است با

$$P_{(۲n+۳)} = (n) + (\underbrace{۱+۱+۱+\dots+۱}_{(۲n+۱)-\text{times}}) + (n+۱) = ۴n+۲, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots .$$

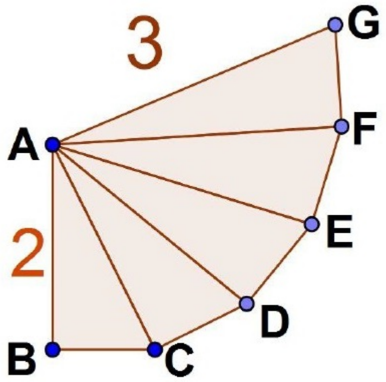
قضیه ۱.۳. همه چندضلعی‌های ساخته شده به روش بالا، همواره محدب‌اند.

اثبات. به‌منظور اثبات این قضیه، روی زاویه مرکزی A متمرکز می‌شویم. سوالی که وجود دارد این است که آیا با بزرگ شدن ضلع ابتدایی و دلخواه N، زاویه A نیز بزرگ می‌شود؟ برای پاسخ به این سوال برای Nهای مختلف، زاویه مرکزی A را محاسبه می‌کنیم. برای $N=۱$ یک پنج‌ضلعی داریم که از سه مثلث تشکیل شده است. لذا زاویه مرکزی A مجموع سه زاویه خواهد بود. شکل ۱ را مشاهده کنیم. پس

$$A = \sum_{i=۱}^{۳} \theta_i = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = ۴۵ + ۳۵/۲۶ + ۳۰ = ۱۱۰/۲۶.$$

برای $N=۲$ یک هفت‌ضلعی داریم که از پنج مثلث تشکیل شده است. لذا زاویه مرکزی A مجموع پنج زاویه خواهد بود. شکل ۲ را مشاهده کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} A = \sum_{i=۱}^{۵} \theta_i &= \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAG} \\ &= ۲۶/۵۶۵ + ۲۴/۰۹ + ۲۲/۲۰ + ۲۰/۷۰ + ۱۹/۴۷ = ۱۱۳/۰۲۵. \end{aligned}$$



شکل ۲: هفت‌ضلعی

به‌همین ترتیب، برای $N = ۳$ یک نه‌ضلعی داریم که از هفت مثلث تشکیل شده است. لذا زاویه مرکزی A مجموع هفت زاویه خواهد بود. بنابراین داریم:

$$A = \sum_{i=۱}^{۷} \theta_i = ۱۸/۴۳۴ + ۱۷/۵۵ + ۱۶/۷۷ + ۱۶/۱۰ + ۱۵/۵۰ + ۱۴/۹۶ + ۱۴/۹۶ + ۱۴/۴۷$$
$$= ۱۱۳/۷۸۴.$$

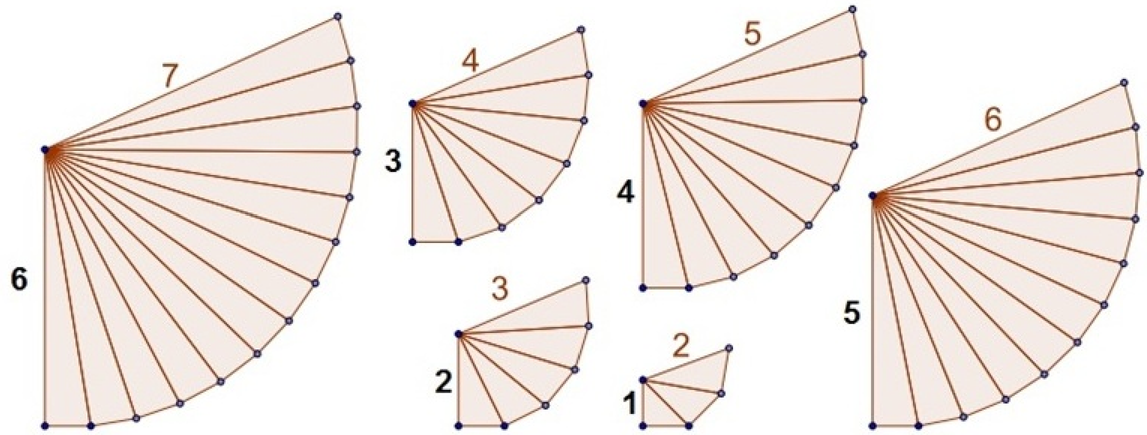
اگر ضلع دلخواه N بزرگ شود نسبت بین N و $N + ۱$ کوچک می‌شود. وقتی N بزرگ می‌شود چندضلعی حاصل را می‌توان به‌طور تقریبی به‌عنوان قطاعی با زاویه مرکزی A از یک دایره به شعاع $N + ۱$ در نظر گرفت. از طرف دیگر، می‌دانیم که در یک قطاع با شعاع R و زاویه مرکزی θ، طول قوس D یا همان کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی، از رابطه $D = R\theta$ به‌دست می‌آید. مجموع اضلاعی از Nضلعی که اندازه یک دارند برابر با $۲N + ۱$ است. حال با توجه به تقریب Nضلعی با قطاع، $۲N + ۱$ تقریبی برای طول قوس قطاع متناظر با آن است؛ یعنی $D = ۲N + ۱$. لذا چون $R = N + ۱$، پس داریم:

$$\theta = \frac{۲N + ۱}{N + ۱}.$$

اگر N بزرگ شود آن‌گاه:

$$\theta = \lim_{N \to \infty} \frac{۲N + ۱}{N + ۱} = ۲,$$

که θ حد زاویه مرکزی برای چندضلعی با اضلاع دلخواه بزرگ N و $N + ۱$ و تعداد $۲N + ۱$ ضلع برابر یک است. اگر N بزرگ شود آن‌گاه θ به سمت ۲ میل می‌کند؛ یعنی زاویه مرکزی چندضلعی برابر ۲ رادیان است که معادل با ۱۱۴/۵۹۱۵۵۹ درجه است. لذا زاویه مرکزی این‌گونه چندضلعی‌ها از این مقدار تجاوز نمی‌کند و چندضلعی برای هر مقداری از N، همواره محدب باقی می‌ماند.
چندضلعی‌های ساخته‌شده برای $N = ۱, ۲, \ldots, ۶$ را در شکل ۳ مشاهده کنیم.



شکل ۳: چندضلعی‌ها

۴ آرایه شبه‌ذوزنقه

اگر اندازه اضلاع هر چندضلعی ساخته‌شده را از سمت چپ به‌ترتیب در یک سطر بنویسیم به آرایه‌ای ذوزنقه‌ای شکل ۴ دست می‌یابیم. اعداد سمت چپ ذوزنقه بیان‌گر عدد دلخواه N به‌عنوان اندازه ضلع آغازین و اعداد سمت راست ذوزنقه بیان‌گر عدد $N+1$ به‌عنوان ضلع نهایی چندضلعی و $2N+1$ عدد برابر یک میانی بیان‌گر اضلاع برابر یک در چندضلعی است. نکته قابل‌توجه این است که در این Nضلعی‌ها نیز رابطه‌ای مانند رابطه فیثاغورس می‌توان بیان کرد، یعنی پنج‌ضلعی، هفت‌ضلعی، . . . و nضلعی‌های با اعداد صحیح را می‌توان بنا کرد که دارای محیط صحیح‌اند و در رابطه $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ صدق می‌کنند. درایه‌های هر سطر ذوزنقه بالا، مصداقی برای معادله فوق‌اند؛ که a_1 بیان‌گر ضلع دلخواه اولیه و a_n بیان‌گر ضلع انتهایی و a_iهای میانی همه برابر یک‌اند.

۱۱۱۱۲

۲۱۱۱۱۱۳

۳۱۱۱۱۱۱۱۴

۴۱۱۱۱۱۱۱۱۱۵

۵۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۶

۶۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۷

۷۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۸

۸۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۹

۹۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰

۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۲

۱۲۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۳

شکل ۴: آرایه ذوزنقه‌ای

۵ مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح

همان‌طور که مشاهده کرده‌ایم زاویه‌ی مرکزی چندضلعی‌های ساخته‌شده از مقدار ثابت ۲ رادیان، تجاوز نمی‌کند و درنتیجه چندضلعی‌های مذکور همواره محدب‌اند. این چندضلعی‌ها با اضلاع صحیح و دارای محیط کمینه‌اند. هم‌چنین آن‌ها رابطه جبری جالبی بین اضلاع خود، مشابه رابطه فیثاغورس دارند.

در مدل‌های بهینه‌سازی، استفاده از مسائل با متغیرهای اعداد صحیح به‌همراه روابط غیرخطی بین متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف یا محدودیت‌ها، با عنوان برنامه‌ریزی غیرخطی با متغیرهای اعداد صحیح شناخته می‌شود. این نوع برنامه‌ریزی در بسیاری از علوم مانند تحقیق در عملیات، مهندسی صنایع، مهندسی مکانیک، مهندسی شیمی، اقتصاد، آمار، کامپیوتر، مدیریت پروژه و... کاربرد دارند. برای به‌دست آوردن اندازه اضلاع صحیح چندضلعی‌های مورد بحث، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \texttt{subject to} \quad & G(x) = ۰, \\ & x \in \mathbb{N}^n, \end{aligned}$$

که x یک بردار nتائی، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و حداقل یکی از توابع $f(x)$ یا $G(x)$ غیرخطی است. این‌گونه مسائل مشابه مدل‌های بهینه‌سازی غیرخطی است که همه متغیر (مجهول)های مسئله عدد صحیح مثبت‌اند. همانند بهینه‌سازی غیرخطی، هدف این برنامه پیدا کردن مقدار کمینه یا بیشینه تابع هدف خطی یا غیرخطی بر روی فضایی با محدودیت‌هایی خطی یا غیرخطی است. اما به‌دلیل وجود متغیرهای گسسته، این فضا پیوسته و محدب نیست بلکه فضایی گسسته و درنتیجه نامحدب است. تابع هدف این مدل می‌تواند براساس دو روی‌کرد کمینه‌سازی مجموع متغیرها یا حاصل‌ضرب متغیرها باشد. جالب توجه این‌که جواب هر دو روی‌کرد یکسان است. بسیاری از روش‌های کلاسیک برای یافتن جواب‌های این‌گونه برنامه‌ریزی‌ها عملا کارائی نداشته و باید به روش‌های ارائه‌شده برای مسائل غیرخطی با اعداد صحیح و یا ابتکاری، آن‌ها را حل کرد. در روی‌کرد کمینه‌سازی مجموع متغیرها به‌دنبال یافتن $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$هایی هستیم که $n \geq ۵$ عددی فرد است و در رابطه جبری

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_{n-۱}^۲ = x_n^۲,$$

صدق می‌کند و هم‌چنین کم‌ترین مجموع را دارد. به عبارت دیگر

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n,$$

کمینه شود به شرط آن‌که x_iها مقادیر طبیعی داشته باشند (برای هر $۱ \leq i \leq n$، $x_i \in \mathbb{N}$). در این روی‌کرد مدل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{n+۱}, \\ \texttt{subject to} \quad & x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = x_{n+۱}, \\ & x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_{n-۱}^۲ = x_n^۲, \\ & x_i \in \mathbb{N}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, n+۱. \end{aligned}$$

مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی با اعداد صحیح است. برای مثال برای $n = ۵$ مدل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۶, \\ \texttt{subject to} \quad & x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = x_۶, \\ & x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + x_۴^۲ = x_۵^۲, \\ & x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶ \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

پاسخ این مدل $x_۱ = ۱$، $x_۲ = ۱$، $x_۳ = ۱$، $x_۴ = ۱$، $x_۵ = ۲$ و $x_۶ = ۶$ است که $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ عناصر سطر اول آرایه ذوزنقه‌ای است. هم‌چنین برای $n = ۷$ مدل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۸, \\ \texttt{subject to} \quad & x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ + x_۷ = x_۸, \\ & x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + x_۴^۲ + x_۵^۲ + x_۶^۲ = x_۷^۲, \\ & x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶, x_۷, x_۸ \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

پاسخ این مدل $x_1 = ۲$، $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = ۱$، $x_7 = ۳$ و $x_8 = ۱۰$ است که x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 و x_7 عناصر سطر دوم آرایه ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد. البته محدودیت‌های این مدل بدون درنظرگرفتن تابع هدف، جواب یکتا ندارد. برای مثال هر ضریبی از این اعداد نیز مصداقی برای مدل فوق خواهد بود.

در روی‌کرد کمینه‌سازی حاصل‌ضرب متغیرها به‌دنبال یافتن $x_1, x_2, \cdots, x_n$هایی هستیم که $n \geq ۵$ عددی فرد است و در رابطه جبری

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = x_n^2,$$

صدق می‌کند و هم‌چنین کم‌ترین حاصل‌ضرب متغیرها را دارد. مدل موردنظر به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min \ \prod_{i=1}^{n} x_i, \\ &\texttt{subject to} \ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = x_n^2, \\ &\qquad x_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

که x_iها مصداقی از سطرهای آرایه ذوزنقه‌ای‌اند. به‌عنوان مثال، به‌ازای $n = ۵$ مدل برنامه‌ریزی غیرخطی فوق به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min \ \prod_{i=1}^{5} x_i, \\ &\texttt{subject to} \ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_5^2, \\ &\qquad x_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \cdots, 5, \end{aligned}$$

که جواب آن $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = ۱$ و $x_5 = ۲$ است که عناصر سطر اول آرایه ذوزنقه‌ای ساخته‌شده‌اند. هم‌چنین به‌ازای $n = ۷$ جواب مدل برنامه‌ریزی غیرخطی فوق $x_1 = ۲$، $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = ۱$ و $x_7 = ۳$اند که سطر دوم آرایه ذوزنقه‌ای ساخته‌شده در بالا است.

جواب‌های شدنی که در فضای محدودیت این مدل‌ها صدق کنند منحصربه‌فرد نیستند و جواب‌های دیگری نیز وجود دارد که در محدودیت مسئله صدق می‌کند. به‌عنوان مثال، به‌ازای $n = ۵$، چنان‌چه بخواهیم تابع هدف کم‌ترین مقدار را بگیرد، آنگاه جواب بهین زمانی به‌دست می‌آید که تابع هدف مقدار کمینه خود را بگیرد. دراین‌صورت متغیرها مقادیر ۱، ۱، ۱، ۱، ۲ را می‌گیرند. این اعداد عناصر سطر اول شبه‌ذوزنقه را تشکیل می‌دهند که می‌توانند اندازه اضلاع یک پنج ضلعی باشند. هرچند مقدار متغیرهای برابر با ۱، ۱، ۳، ۵، ۶ نیز در محدودیت صدق می‌کنند؛ یا هر ضریبی از این‌ها نیز در محدودیت صدق می‌کنند. به‌عنوان مثالی دیگر فرض کنیم $n = ۷$. تابع هدف زمانی کم‌ترین مقدار را می‌گیرد که متغیرها برابر ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۳ باشند که جواب بهین مسئله است. هرچند مقدار متغیرها برابر با ۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۵ نیز در محدودیت صدق می‌کنند اما کم‌ترین مقدار را به تابع هدف نمی‌دهند. به‌عنوان مثالی دیگر فرض کنیم $n = ۹$. در این حالت تابع هدف زمانی کم‌ترین مقدار را می‌گیرد که متغیرها برابر ۳، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۴ باشند. هرچند مقدار متغیرها برابر ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۶، ۷ یا متغیرهای برابر ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵، ۱۰ نیز در محدودیت صدق می‌کنند اما کم‌ترین مقدار را به تابع هدف نمی‌دهند. بنابراین محدودیت این‌گونه مسائل برای هر n، جواب منحصربه‌فرد نداشته و در نتیجه جواب چندگانه دارد. تنها یکی از این جواب‌ها که کم‌ترین مجموع یا کم‌ترین حاصل‌ضرب مولفه‌ها را دارند، مصداقی برای طول اضلاع چندضلعی‌های مورد بحث است.

فهرست منابع

[1] W. Adams, I.J. Goldstein, *Introduction to number theory*, Prentice-Hall, New Jersy, 1976.

[2] D. M. Burton, *The history of mathematics : An introduction*, 7th edititin, McGraw-Hill, 2011.

[3] M.J. Bradley, *The Birth of Mathematics: Ancient Times to 1300*. Publisher Infobase Publishing, 2006.

[4] Y. Choi, S. Lee, H.K. Ahn, Maximum-area and maximum-perimeter rectangles in polygons, Computational Geometry. **94** (2021) 101710.

[5] A. Dumitrescu, M. Jiang, Minimum-Perimeter Intersecting Polygons, Algorithmica. **63** (2012) 602–615.

[6] J. East, R. Niles, Integer polygons of given perimeter, Bull. Aust. Math. Soc. **100** (2019) 131–147.

[7] B. Engelker, Area and Perimeter of Polygons, MAT Exam Expository Papers. (2006) 11.

[8] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty , *Nonlinear Programming*, Theory and Algorithms, Third Edition, 2006.

[9] O. Neugebauer, A.J. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts: 29 (American Oriental Series)*, New Haven: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research. 1945.

[10] E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylonian: A Reassessment of Plimpton 322., Historia Mathematica. **28** (2001) 167-206.

[11] E. Robson, Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, American Mathematical Monthly. **109** (2002) 105-120.

[12] J. Sassena, B. Heeren, K. Hildebrandt, M. Rumpf, Geometric optimization using nonlinear rotation-invariant coordinates, Computer Aided Geometric Design. **77** (2020) 101829.

Convex polygon and integer programming

Hadi Basirzadeh † **, Mohamad Yar Ahmadi**

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: O.A.S. Karamzadeh

Received: 2021/11/16 Accepted: 2022/2/22

Abstract: In this work, polygons of the integer sides are introduced. Moreover, by considering some Pythagorean-like relationships on these polygons, we prove that for all n-polygons of the aforementioned relationship, Pythagorean quasi-relations are satisfied. Furthermore, it is proved that the central angle of these polygons is not more than a constant value, so these polygons are always convex. Moreover, a nonlinear integer programming model for obtaining the integer sides of these polygons is presented.

Keywords: convex polygons, integer programming, optimization.

†Corresponding author.
E-mail addresses: basirzad@scu.ac.ir (H. Basirzadeh), m.yarahmadi@scu.ac.ir (M. Yar Ahmadi).