مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۸۱-۸۹

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38047.1947

مقدار ویژه -1 و گراف‌های فاقد مثلث

حسین اسماعیلیان، ابراهیم قربانی *

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

دبیر مسئول: محمد حسن حقیقی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۱

چکیده: تعیین مرتبه ماکسیمم در بین گراف‌هایی که ماتریس مجاورتشان دارای مقدار ویژه μ با چندگانگی ثابت kیند، یکی از مسائلی است که توسط محققین مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این میان، شرایط این مسأله برای مقدار ویژه‌های $0, -1$ با سایر مقادیر ویژه متفاوت است. در این مقاله این مسأله را برای گراف‌های فاقد مثلث و برای مقدار ویژه $\mu = -1$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. به‌عنوان نتیجه اصلی این مقاله نشان می‌دهیم مرتبه یک گراف همبند فاقد مثلث با درجه ماکسیمم d و مقدار ویژه -1 با چندگانگی $k > 1$، حداکثر برابر $k + d + 1$ است. به‌علاوه گراف‌هایی را که برای آن‌ها تساوی رخ می‌دهد رده‌بندی می‌کنیم. اثبات این نتیجه مبتنی بر تکنیک مکمل ستاره‌ای است.

واژه‌های کلیدی: گراف فاقد مثلث، مقدار ویژه، تکنیک مکمل ستاره‌ای.

رده‌بندی ریاضی: 05C50

۱ مقدمه

در این مقاله، منظور از یک گراف، گرافی متناهی و ساده، بدون یال چندگانه و طوقه است. فرض کنیم G گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ باشد. در این صورت ماتریس مجاورت G، $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ است که در آن $a_{ij} = 1$ اگر v_i و v_j مجاور باشند و $a_{ij} = 0$ اگر v_i و v_j مجاور نباشند. رابطه مجاورت دو رأس u, v را با نماد $u \sim v$ نیز نشان می‌دهیم. منظور از مقادیر ویژه و رتبه گراف G، مقادیر ویژه و رتبه ماتریس مجاورت آن است.

تعیین مرتبه ماکسیمم در بین گراف‌هایی که دارای مقدار ویژه μ با چندگانگی ثابت kیند، یکی از مسائلی است که توسط محققین مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. همان‌گونه که خواهیم دید، شرایط این مسأله برای مقادیر ویژه $0, -1$ با سایر مقادیر ویژه متفاوت است. فرض کنیم G گرافی از مرتبه n، و μ مقدار ویژه‌ای از آن با چندگانگی k باشد. بل

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: h.esmailian@ipm.ir، ghorbani@kntu.ac.ir

و رولینسون [۲] نشان دادند که اگر $\mu \notin \{-۱,۰\}$ و $n-k>۲$، آنگاه $k \leq n-\frac{۱}{۲}(-۱+\sqrt{۸n+۱})$ و تساوی برای $k=n-۸$ رخ می‌دهد. این کران برای چند خانواده از گراف‌ها مانند گراف‌های منتظم [۲]، گراف‌های مکعبی [۱۶]، درخت‌ها [۱۴] و گراف‌هایی که طول دورهای آن‌ها دارای کران پایین مشخصی‌اند [۱۵] بهبود یافته است. مسأله تعیین مرتبه ماکسیمم گراف‌های دارای یک مقدار ویژه از پیش تعیین‌شده با چندگانگی مشخص، برای مقدار ویژه صفر در واقع تبدیل به تعیین بیش‌ترین مرتبه گراف‌ها بر حسب رتبه می‌شود. به‌دلیل بی‌تاثیر بودن رأس‌های تنها یا رأس‌های با همسایگی‌های یکسان بر رتبه، مرتبه گراف‌های با رتبه ثابت از بالا کران‌دار نیست. از این رو گراف‌ها را به گراف‌های کاهشی محدود می‌کنیم. گرافی را که فاقد رأس تنها و رأس‌هایی با همسایگی یکسان است یک گراف کاهشی می‌نامند. حدسی در این رابطه در سال ۲۰۰۴ توسط اکبری، خسروشاهی و کمرون [۱] ارائه شد که بیان می‌کند مرتبه ماکسیمم گراف‌های کاهشی بر اساس رتبه r، برابر با مقدار زیر است:

$$n(r)=\begin{cases}۲^{(r+۲)/۲}-۲ & \text{زوج } r,\\ ۵\cdot ۲^{(r-۳)/۲}-۲ & \text{فرد } r.\end{cases}$$

نتایجی را که تا کنون در مورد این حدس به‌دست آمده‌اند در این‌جا به‌اختصار مرور می‌کنیم. فرض کنیم G یک گراف کاهشی با مرتبه n و ماتریس مجاورت A با رتبه r باشد. در این صورت A شامل یک زیرماتریس اصلی $r\times r$ مانند B با رتبه r است که متناظر با یک زیرگراف القائی H از G است. G را یک توسیع خطی از H می‌گویند [۹]. در سال ۲۰۱۲ همرز و پیترز [۹]، برای خانواده گراف‌هایی که یک توسیع خطی از گراف $\frac{r}{۲}K_۲$ و خانواده گراف‌هایی که یک توسیع خطی از گراف $K_۳\cup\frac{r-۳}{۲}K_۲$اند، حدس فوق را ثابت کردند. در سال ۲۰۱۵ قربانی، طایفه‌رضایی و محمدیان [۷] ثابت کردند که اگر حدس مذکور برای $r\leq ۴۶$ صحیح باشد، آنگاه در حالت کلی نیز درست است. هم‌چنین آن‌ها نشان دادند که ماکسیمم مرتبه گراف‌های کاهشی با رتبه r حداکثر ۸ برابر $n(r)$ است.

تنها مقدار ویژه‌ای که مسأله تعیین ماکسیمم مرتبه گراف بر حسب چندگانگی داده‌شده برای آن بررسی نشده است، $\mu=-۱$ است. در این حالت مسأله تبدیل به یافتن بیش‌ترین مرتبه گراف‌های G می‌شود به‌طوری‌که $A(G)+I$ دارای رتبه‌ای مشخص‌اند. این مسأله اولین بار در [۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. از این پس، به رتبه $A(G)+I$، ۱-رتبه G می‌گوییم. از آن‌جا که وجود رأس‌های با همسایگی بسته یکسان، تاثیری در ۱-رتبه یک گراف ندارد، مرتبه گراف‌هایی که دارای ۱-رتبه ثابت‌اند، از بالا کران‌دار نیست. به‌همین دلیل، گراف‌ها را به گراف‌های هم‌کاهشی، یعنی گراف‌هایی که فاقد رأس‌های با همسایگی بسته یکسان‌اند محدود می‌کنند. برای گراف‌های هم‌کاهشی با ۱-رتبه ثابت r، می‌توان به‌سادگی نشان داد که مرتبه گراف نمی‌تواند از ۲^r تجاوز کند.

در این مقاله مسأله تعیین مرتبه ماکسیمم را برای گراف‌های فاقد مثلث و برای مقدار ویژه $\mu=-۱$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا نتایج به‌دست‌آمده را برای گراف‌های فاقد مثلث و مقادیر ویژه $\mu\neq -۱$ مرور می‌کنیم. در سال ۲۰۱۵ قربانی، طایفه‌رضایی و محمدیان [۶] این مسأله را برای گراف‌های فاقد مثلث و مقدار ویژه $\mu=۰$ مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها ثابت کردند مرتبه هر گراف کاهشی غیر دوبخشی و فاقد مثلث از رتبه r، حداکثر برابر $۳\cdot ۲^{\lfloor r/۲\rfloor -۲}+\lfloor r/۲\rfloor$ است و هم‌چنین گراف‌هایی را که در حالت تساوی صدق می‌کنند رده‌بندی کردند. در سال ۲۰۱۶، رولینسون [۱۷] این مسأله را برای گراف‌های همبند فاقد مثلث با درجه ماکسیمم مشخص مورد بررسی قرار داد. به‌طور خلاصه او نشان داد برای گراف همبند فاقد مثلث G از مرتبه $n>۵$ که دارای مقدار ویژه $\mu\notin\{-۱,۰\}$ با چندگانگی $k>۱$ است، $k\leq n-d-۱$ که در آن d درجه ماکسیمم G است.

در این مقاله نشان می‌دهیم ماکسیمم مرتبه گراف‌های همبند فاقد مثلث با درجه ماکسیمم d و مقدار ویژه ۱− با چندگانگی $k>۱$، برابر $k+d+۱$ است. به‌علاوه گراف‌هایی که برای آن‌ها تساوی رخ می‌دهد را رده‌بندی می‌کنیم. اثبات این نتیجه مبتنی بر تکنیک مکمل ستاره‌ای است که در بخش ۲ آن را مرور خواهیم کرد. اثبات قضیه اصلی در بخش ۳ ارائه خواهد شد. در انتها حدسی در مورد حالت کلی مسأله فوق، یعنی بیش‌ترین مرتبه گراف‌های فاقد مثلث با ۱-رتبه داده‌شده ارائه خواهیم کرد.

۲ مجموعه‌های ستاره‌ای و تکنیک مکمل ستاره‌ای

در این بخش تکنیک مکمل ستاره‌ای را که در اثبات قضیه اصلی این مقاله به‌کار خواهیم برد مرور می‌کنیم. به‌علاوه یک گزاره مربوط به مجموعه‌های ستاره‌ای و مقدار ویژه ۱− را ثابت می‌کنیم. ابتدا چند نماد را یادآوری می‌کنیم. ماتریسی $m \times n$ را که همه درایه‌های آن یک‌اند با نماد $J_{m\times n}$ نشان می‌دهیم. اگر $m = n$، آن را با نماد مختصرتر J_n نمایش می‌دهیم. بردار nتایی را که همه مؤلفه‌های آن یک‌اند با $\mathbf{1}_n$ نشان می‌دهیم. ماتریسی $m \times n$ را که همه درایه‌های آن صفرند با نماد $O_{m\times n}$ نشان می‌دهیم و اگر $m = n$، آن را با O_n نمایش می‌دهیم. همچنین بردار nتایی را که همه مؤلفه‌های آن صفرند با $\mathbf{0}_n$ نشان می‌دهیم.

در سرتاسر این بخش، فرض می‌کنیم G گرافی از مرتبه n، و μ مقدار ویژه‌ای از آن با چندگانگی k است.

تعریف ۱.۲. زیرمجموعه X از $V(G)$ را مجموعه ستاره‌ای برای μ می‌گویند هرگاه $|X| = k$ و چندگانگی مقدار ویژه μ در زیرگراف القائی $G - X$ برابر ۰ باشد. همچنین $G - X$ را مکمل ستاره‌ای برای μ می‌گویند.

بنابر [۴، قضیه ۳.۱.۷] برای هر ماتریس مجاورت، مجموعه ستاره‌ای وجود دارد. مفهوم مجموعه ستاره‌ای اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط سوتکویچ، رولینسون و سیمیچ [۳] برای مطالعه فضای ویژه گراف‌ها مطرح شد. اصطلاح مکمل ستاره‌ای را نخستین بار رولینسون [۱۳] مورد استفاده قرار داد. در مقالات متعددی، به‌عنوان نمونه [۲، ۱۴–۱۶، ۱۸] از تکنیک مکمل ستاره‌ای برای حل برخی مسائل در خصوص مقادیر ویژه گراف‌ها و چندگانگی آن‌ها استفاده شده است. در ادامه برخی از این نتایج را ذکر می‌کنیم.

قضیه ۲.۲ ([۴، قضیه ۱.۴.۷]). فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف G و ماتریس مجاورت G به‌صورت

$$\begin{bmatrix} A_X & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$$

باشد که در آن A_X ماتریس مجاورت زیرگراف القائی روی X است. در این صورت X یک مجموعه ستاره‌ای برای μ در G است اگر و فقط اگر μ مقدار ویژه‌ای از C نباشد و

$$A_X - \mu I = B^\top (C - \mu I)^{-1} B. \tag{۱.۲}$$

فرض کنیم G گرافی از مرتبه n و دارای مقدار ویژه μ از چندگانگی k باشد. فرض کنیم X یک مجموعه ستاره‌ای برای μ در G باشد و $H = G - X$. ستون‌های $\mathbf{b}_u$ از B به‌ازای $u \in X$ بردار مشخصه همسایگی

$$N_H(u) = \{v \in V(H) : v \sim u\}$$

است. از معادله (۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{b}_u^\top (C - \mu I)^{-1} \mathbf{b}_v = \begin{cases} -\mu & \text{اگر } u = v, \\ ۱ & \text{اگر } u \sim v, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \tag{۲.۲}$$

لم زیر از قضیه ۲.۲ نتیجه می‌شود.

لم ۳.۲ ([۱۷]). اگر X یک مجموعه ستاره‌ای برای μ در G باشد و $\mu \notin \{-۱, ۰\}$، آنگاه برای هر دو رأس $u, v \in X$ همسایگی‌های $N_H(u)$ و $N_H(v)$ مجموعه‌هایی ناتهی و متمایزند.

لم ۳.۲ برای مقدار ویژه ۱− برقرار نیست. حکمی مشابه برای مقدار ویژه ۱− در گراف‌های هم‌کاهشی برقرار است که در زیر آن را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۴.۲. فرض کنیم G یک گراف هم‌کاهشی باشد. اگر X یک مجموعه ستاره‌ای برای -1 در G باشد، آن‌گاه برای هر دو رأس $u, v \in X$، $N_H(u)$ و $N_H(v)$ مجموعه‌هایی ناتهی و متمایزند.

اثبات. فرض کنیم $|X| = k$ و A ماتریس مجاورت G باشد. ماتریس A' را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A' = A + I = \begin{bmatrix} A_X + I & B^\top \\ B & C + I \end{bmatrix}.$$

چون زیرگراف القائی توسط C مکمل ستاره‌ای برای -1 است، $C + I$ وارون‌پذیر است. لذا ماتریس

$$M = \begin{bmatrix} B & C + I \end{bmatrix}$$

دارای رتبه کامل است. از طرفی رتبه ماتریس A' برابر با رتبه ماتریس M است. لذا سطرهای ماتریس M تشکیل یک پایه برای فضای سطری A' می‌دهند. A'_u را سطر متناظر با رأس u در ماتریس A' در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض کنیم $\mathbf{b}_u$ و $\mathbf{b}_v$ به‌ترتیب ستون‌های متناظر با رأس‌های u و v در ماتریس B باشند.

حال به برهان خلف فرض کنیم $N_H(u) = \emptyset$ یا $N_H(u) = N_H(v)$.

اگر $N_H(u) = \emptyset$، آن‌گاه $\mathbf{b}_u = \mathbf{0}$. چون سطرهای A' از ترکیب خطی سطرهای M تولید می‌شوند، نتیجه می‌شود که ستون متناظر با u در A' صفر است، که یک تناقض است. لذا $N_H(u) \neq \emptyset$.

اگر $N_H(u) = N_H(v)$، آن‌گاه $\mathbf{b}_u = \mathbf{b}_v$. تمامی درایه‌های بالای ستون $\mathbf{b}_u$ و $\mathbf{b}_v$ به‌ترتیب توسط ترکیب خطی عناصر $\mathbf{b}_u$ و $\mathbf{b}_v$ تولید می‌شوند، لذا ستون‌های متناظر با رأس‌های u و v یکسان‌اند که با هم‌کاهشی بودن G در تناقض است. بنابراین هیچ دو ستونی از ماتریس B یکسان نیستند و لذا $N_H(u)$ و $N_H(v)$ متمایزند. □

قضیهٔ زیر که به قضیهٔ درهم‌بافتگی معروف است یکی از ابزارهای مهم در مطالعه مقادیر ویژه گراف‌ها است.

قضیه ۵.۲ ([۸، قضیه ۱.۱.۹]). فرض کنیم A ماتریسی هرمیتی با مقادیر ویژه $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ و B یک زیرماتریس اصلی $m \times m$ آن با مقادیر ویژهٔ $\eta_1 \geq \cdots \geq \eta_m$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $i = 1, \ldots, m$،

$$\mu_{n-m+i} \leq \eta_i \leq \mu_i.$$

با استفاده از قضیه درهم‌بافتگی، لم زیر را داریم:

لم ۶.۲ ([۱۷]). اگر X یک مجموعه ستاره‌ای برای μ در G و U زیرمجموعه‌ای سره از X باشد، آن‌گاه $X \setminus U$ یک مجموعه ستاره‌ای برای μ در $G - U$ است.

لم ۷.۲ ([۱۲، لم ۳]). فرض کنیم μ مقدار ویژه‌ای از گراف G باشد. اگر K زیرگراف القائی از G باشد که μ را به‌عنوان مقدار ویژه نداشته باشد، آن‌گاه K مشمول در یک مکمل ستاره‌ای برای μ است.

یک گراف n رأسی و k-منتظم را که هر دو رأس مجاور آن دقیقاً λ همسایه مشترک و هر دو رأس غیرمجاور آن دقیقاً θ همسایه مشترک داشته باشند، یک گراف قویاً منتظم می‌نامند و به‌اختصار می‌نویسند G یک $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \theta)$ است.

رولینسون و طایفه رضایی قضیه زیر را اثبات کردند:

قضیه ۸.۲ ([۱۸، قضیه ۲.۲]). اگر گراف d-منتظم G، گراف ستاره $K_{1,s}$ را که $s > 1$، به‌عنوان یک مکمل ستاره‌ای برای μ داشته باشد، آن‌گاه یکی از موارد زیر برقرار است:

(الف) $\mu = \pm 2$، $d = s = 2$ و G برابر C_4 است؛

(ب) $\mu = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$، $d = s = 2$ و G برابر C_5 است؛

(ج) $\mu \in \mathbb{N}$، $d = s$ و G یک $\mathrm{srg}\big((\mu^2 + 3\mu)^2, \mu(\mu^2 + 3\mu + 1), 0, \mu(\mu + 1)\big)$ است.

نتیجه‌ای مشابه برای گراف‌های فاقد مثلث به‌صورت زیر به‌دست آمده است.

گزاره ۹.۲ ([۱۷]). فرض کنیم G یک گراف فاقد مثلث با n رأس، m یال و μ مقدار ویژه‌ای از آن با چندگانگی $k > 1$ باشد. اگر $\mu \notin \{-1, 0\}$، آنگاه $k \leq n - 1 - \frac{2m}{n}$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G یک گراف قویاً منتظم با پارامترهای داده‌شده در قضیه ۸.۲ (ج) باشد.

قضیه زیر در مورد گراف‌های فاقد مثلث است با مقادیر ویژه‌ای به‌جز -1 و 0 که دارای مکمل ستاره‌ای به‌صورت یک گراف ستاره‌اند.

قضیه ۱۰.۲ ([۱۷]). فرض کنیم G یک گراف همبند فاقد مثلث از مرتبه $n > 5$ و $\mu \notin \{-1, 0\}$ مقدار ویژه‌ای از آن با چندگانگی $k > 1$ باشد. اگر d ماکسیمم درجه G باشد، آنگاه $k \leq n - 1 - d$. اگر $k = n - 1 - d$، آنگاه $K_{1,d}$ یک مکمل ستاره‌ای برای μ است و یا

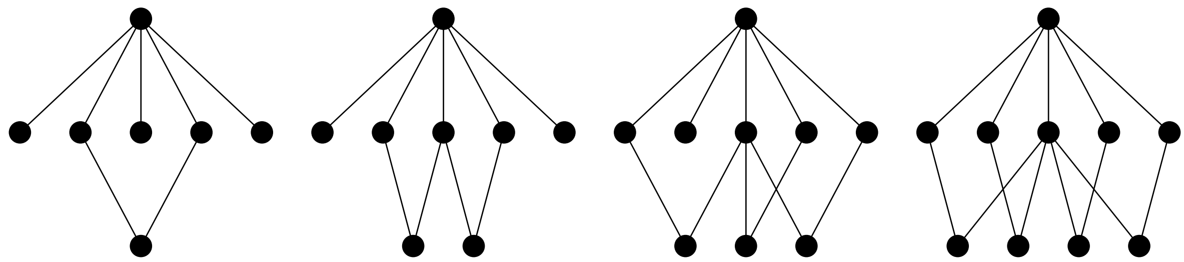
(الف) $d = \mu(\mu^2 + 3\mu + 1)$ و $k \leq (\mu^2 + 3\mu + 1)(\mu^2 + 2\mu - 1)$، و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\mu \in \mathbb{N}$ و G یک $\mathrm{srg}\big((\mu^2 + 3\mu)^2, \mu(\mu^2 + 3\mu + 1), 0, \mu(\mu + 1)\big)$ باشد یا

(ب) G دوبخشی باشد و $k \leq d - 1$.

۳ مقدار ویژه -1 و گراف‌های فاقد مثلث

رولینسون (قضیه ۱۰.۲) نشان داد برای گراف همبند فاقد مثلث G از مرتبه $n > 5$ و مقدار ویژه $\mu \notin \{-1, 0\}$، با چندگانگی $k > 1$، اگر d ماکسیمم درجه G باشد، آنگاه $k \leq n - d - 1$. در این بخش، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم که نشان می‌دهد نتیجه رولینسون برای مقدار ویژه -1 نیز برقرار است.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم G یک گراف همبند فاقد مثلث از مرتبه n با مقدار ویژه $\mu = -1$ از چندگانگی $k > 1$ باشد. اگر ماکسیمم درجه G برابر d باشد، آنگاه $n \geq k + d + 1$. به‌علاوه تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $K_{1,d}$ یک مکمل ستاره‌ای برای $\mu = -1$ و G یکریخت با یکی از گراف‌های شکل ۱ باشد.



شکل ۱: گراف‌های هم‌کاهشی با مقدار ویژه -1 با چندگانگی $k = n - d - 1$.

اثبات. از همبند بودن G و اینکه $k > 1$، نتیجه می‌شود $d > 1$. چون G فاقد مثلث است، شامل یک $K_{1,d}$ به‌عنوان زیرگراف القایی است. لذا G دارای یک زیرگراف القایی $K_{1,d}$ است که دارای مقدار ویژه -1 نیست (زیرا مقادیر ویژه ناصفر $K_{1,d}$ عبارت‌اند از $\pm\sqrt{d}$). در نتیجه بنابر لم ۷.۲، یک مکمل ستاره‌ای هم‌چون H برای مقدار ویژه -1 وجود دارد به‌طوری که H شامل زیرگراف $K_{1,d}$ است. بنابراین $d + 1 \leq n - k$ و لذا $k \leq n - d - 1$.

حال فرض کنیم $k = n - 1 - d$ و v رأسی با درجه d در G باشد. چون $d > 1$، زیرگراف القائی ساخته‌شده توسط v و همسایه‌هایش یک مکمل ستاره‌ای برای $\mu = -1$ است. چون گراف فاقد مثلث است، این مکمل ستاره‌ای یک گراف ستاره است که آن را با $H = K_{1,d}$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین مجموعه X را مجموعه ستاره‌ای برای $\mu = -1$ در نظر می‌گیریم. بنابراین ماتریس مجاورت G را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$A = \begin{bmatrix} A_X & B^\top \\ B & C \end{bmatrix},$$

که در آن A_X ماتریس مجاورت زیرگراف القائی $G[X]$ است. به‌علاوه ماتریس مجاورت گراف H به‌صورت

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_d^\top \\ \mathbf{1}_d & O_{d\times d} \end{bmatrix}$$

است. از آن‌جا که مقادیر ویژه C برابر با ۰ و $\pm\sqrt{d}$ اند، لذا $f(x) = x(x^2-d)$ چندجمله‌ای مینیمال C است. با ضرب $d-1$ در طرفین (۱.۲) داریم:

$$(d-1)(A_X+I) = B^\top(d-1)(C+I)^{-1}B. \tag{۱.۳}$$

اکنون وارون ماتریس $C+I$ را محاسبه می‌کنیم. واضح است که

$$C^2 = \begin{bmatrix} d & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & J \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} 0 & d\mathbf{1}^\top \\ d\mathbf{1} & O \end{bmatrix} = dC.$$

می‌دانیم چندجمله‌ای مشخصه C برابر با $\det(\lambda I - C) = \lambda^{n-2}(\lambda^2-d)$ است. لذا چندجمله‌ای مشخصه $C+I$ برابر

$$g(\lambda) = \det\big(\lambda I - (C+I)\big) = (\lambda-1)^{n-2}\big((\lambda-1)^2-d\big) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i.$$

است. از قضیه کیلی-همیلتون ([۱۰]، قضیه ۲.۴.۳.۲ دیده شود)، نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(C+I)^i = -a_0 I. \tag{۲.۳}$$

می‌دانیم $(C+I)^{-1}$ وارون‌پذیر است، لذا با ضرب $(C+I)^{-1}$ در طرفین (۲.۳)، نتیجه می شود که $(C+I)^{-1}$ یک چندجمله‌ای برحسب توان‌های C و I است. از طرفی $C^3 = dC$ و لذا $(C+I)^{-1}$ به‌صورت یک چندجمله‌ای درجه ۲ بر حسب C است. فرض کنیم $(C+I)^{-1} = \alpha I + \beta C + \gamma C^2$. در این صورت:

$$\begin{aligned} I &= (C+I)(\alpha I + \beta C + \gamma C^2) \\ &= \alpha I + (\beta+\alpha)C + (\gamma+\beta)C^2 + \gamma C^3 \\ &= \alpha I + (\beta+\alpha+d\gamma)C + (\gamma+\beta)C^2. \end{aligned}$$

چون چندجمله‌ای مینیمال C درجه ۳ است، لذا ماتریس‌های I، C و C^2 مستقل خطی اند. پس ضرایب C و C^2 برابر با صفرند. در نتیجه

$$\alpha = 1,\ \beta = \tfrac{-1}{1-d},\ \gamma = \tfrac{1}{1-d}.$$

بنابراین داریم:

$$(d-1)(C+I)^{-1} = (d-1)I + C - C^2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{1} & (d-1)I - J \end{bmatrix}. \tag{۳.۳}$$

فرض کنیم $\mathbf{b}_u$ ستون متناظر با رأس u در B باشد.

اکنون به‌منظور اختصار نماد زیر را معرفی می کنیم: رأس $u \in X$ را از نوع (a,b) گوییم اگر تعداد همسایه‌های آن در $\{v\}$ و $N_H(v)$ به‌ترتیب برابر با a و b باشند.

از آن‌جا که تمام همسایه‌های v در H قرار دارند، داریم $a = ۰$. لذا $\mathbf{b}_u^\top I \mathbf{b}_u = b$ و از ساختار ماتریس C به‌راحتی می‌توان دید که $\mathbf{b}_u^\top C \mathbf{b}_u = ۰$ و $\mathbf{b}_u^\top C^۲ \mathbf{b}_u = b^۲$. بنابراین با استفاده از (۳.۳) داریم:

$$(d-۱)\mathbf{b}_u^\top (C+I)^{-۱}\mathbf{b}_u = (d-۱)b - b^۲. \qquad (۴.۳)$$

اکنون با استفاده از (۲.۲) و (۴.۳) نتیجه می‌شود $b^۲ + (۱-d)b + d - ۱ = ۰$. لذا

$$b = \frac{d-۱ \pm \sqrt{(d-۱)(d-۵)}}{۲}.$$

با توجه به صحیح بودن b و $d > ۱$، نتیجه می‌شود $d = ۵$ و از این‌رو $b = ۲$. در نتیجه رأس‌های X همگی از نوع $(۰,۲)$اند و $k \leq n - ۶$.

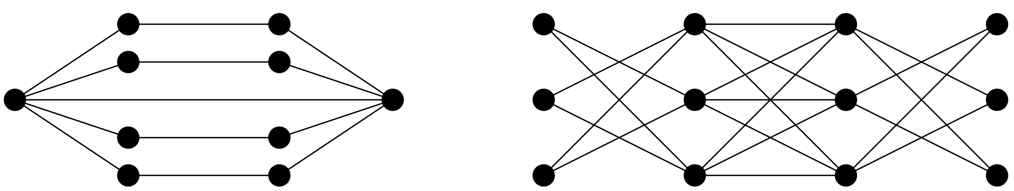
حال فرض کنیم u و u' دو رأس متمایز در X باشند. قرار می‌دهیم $\rho_{uu'} := |N_H(u) \cap N_H(u')|$. در نتیجه $\mathbf{b}_u^\top I \mathbf{b}_{u'} = \rho_{uu'}$ و از ساختار ماتریس C به‌راحتی می‌توان دید که $\mathbf{b}_u^\top C \mathbf{b}_{u'} = ۰$ و $\mathbf{b}_u^\top C^۲ \mathbf{b}_{u'} = ۴$. بنابراین با استفاده از (۳.۳) داریم:

$$۴\mathbf{b}_u^\top (C+I)^{-۱}\mathbf{b}_{u'} = ۴\rho_{uu'} - ۴. \qquad (۵.۳)$$

فرض کنیم رأس‌های u و u' در X مجاور باشند. با توجه به این‌که G فاقد مثلث است، $\rho_{uu'} = ۰$. لذا از (۵.۳) نتیجه می‌شود $\mathbf{b}_u^\top (C+I)^{-۱}\mathbf{b}_{u'} = -۱$. از طرفی بنابر (۲.۲) داریم $\mathbf{b}_u^\top (C+I)^{-۱}\mathbf{b}_{u'} = ۱$، که یک تناقض است. بنابراین مجموعه X مستقل است. لذا بنابر (۲.۲)، $\mathbf{b}_u^\top (C+I)^{-۱}\mathbf{b}_{u'} = ۰$. از این‌رو از (۵.۳) نتیجه می‌شود $\rho_{uu'} = ۱$. با توجه به مقدار پارامترهای b، d و $\rho_{uu'}$ فقط گراف‌های شکل ۱ در تساوی $k = n-۶$ صدق می‌کنند. □

این مقاله را با بیان حدسی درباره مرتبه ماکسیمم گراف‌های فاقد مثلث با ۱−رتبه داده‌شده، به پایان می‌بریم.

حدس ۲.۳. مرتبه یک گراف فاقد مثلث بدون مؤلفه هبندی $K_۲$ با ۱−رتبه r حداکثر برابر $۲r - ۲$ است. تساوی برای یک گراف G رخ می‌دهد اگر و فقط اگر G یکریخت با گراف حاصل از حذف یال‌های یک تطابق کامل از $K_{r-۱,r-۱}$ یا یکریخت با یکی از دو گراف شکل ۲ باشد.



شکل ۲: تنها گراف‌های غیرمنتظم با ۱−رتبه r و مرتبه $۲r - ۲$

با اقتباس از الگوریتم ساختن گراف‌های کاهشی با رتبه داده‌شده که در [۱] ارائه شده است، الگوریتم مشابهی برای بررسی حدس ۲.۳ به‌دست می‌آید. با پیاده‌سازی این الگوریتم، درستی حدس ۲.۳ را برای تمام گراف‌های فاقد مثلث با ۱−رتبه حداکثر ۱۰ بررسی کردیم. مجموعه همه گراف‌های کاهشی فاقد مثلث با ۱−رتبه و مرتبه r به‌عنوان ورودی این الگوریتم است و مجموعه همه گراف‌های فاقد مثلث با مرتبه ماکسیمم با ۱−رتبه r به‌عنوان خروجی این الگوریتم است. ورودی الگوریتم مذکور به‌وسیله داده‌های مک کی از گراف‌های کوچک [۱۱] تولید شده است.

فهرست منابع

[1] S. Akbari, P.J. Cameron, and G.B. Khosrovshahi, Ranks and signatures of adjacency matrices, manuscript (2004), available online at http://www.maths.qmul.ac.uk/~lsoicher/designtheory.org/library/preprints/ranks.pdf

[2] F.K. Bell and P. Rowlinson, On the multiplicities of graph eigenvalues, *Bull. Lond. Math. Soc.* **35** (2003), 401–408.

[3] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S.K. Simić, A Study of eigenspaces of graphs, *Linear Algebra Appl.* **182** (1993), 45–66.

[4] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S.K. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[5] H. Esmailian and E. Ghorbani, Maximum order of graphs with a given corank, *Linear Algebra Appl.* **588** (2020), 122–133.

[6] E. Ghorbani, A. Mohammadian, and B. Tayfeh-Rezaie, Maximum order of triangle-free graphs with a given rank, *J. Graph Theory* **79** (2015), 145–158.

[7] E. Ghorbani, A. Mohammadian, and B. Tayfeh-Rezaie, On order and rank of graphs, *Combinatorica* **35** (2015), 655–668.

[8] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York, 2001.

[9] W.H. Haemers and M.J.P. Peeters, The maximum order of adjacency matrices of graphs with a given rank, *Des. Codes, Cryptogr.* **65** (2012), 223–232.

[10] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[11] B.D. McKay, Combinatorial Data, available on line at http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/.

[12] M. Miloševic, An example of using star complements in classifying strongly regular graphs, *Filomat* **22** (2008), 53–57.

[13] P. Rowlinson, On graphs with multiple eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **283** (1998), 75–85.

[14] P. Rowlinson, On multiple eigenvalues of trees, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), 3007–3011.

[15] P. Rowlinson, On eigenvalue multiplicity and the girth of a graph, *Linear Algebra Appl.* **435** (2011), 2375–2381.

[16] P. Rowlinson, Eigenvalue multiplicity in cubic graphs, *Linear Algebra Appl.* **444** (2014), 211–218.

[17] P. Rowlinson, Eigenvalue multiplicity in triangle-free graphs, *Linear Algebra Appl.* **493** (2016), 484–493.

[18] P. Rowlinson and B. Tayfeh-Rezaie, Star complements in regular graphs: old and new results, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), 2230–2242.

Eigenvalue -1 and triangle-free graphs

Hossein Esmailian, **Ebrahim Gorbani** †

Department of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, P. O. Box 16765-3381, Tehran, Iran

Communicated by: M. Haghighi

Received: 2021/7/22 Accepted: 2022/3/2

Abstract: Determining the maximum order of graphs whose adjacency matrices have an eigenvalue μ with multiplicity k, is a problem which has been studied by several authors. The situation of the problem is quite different for the eigenvalues $-1, 0$. In this paper, we investigate this problem for triangle-free graphs and for the eigenvalue $\mu = -1$. As the main result of the paper, we prove that the order of graphs with maximum degree d and the eigenvalue -1 with multiplicity $k > 1$ is at most $k + d + 1$. We also characterize the graphs attainting the lower bound.

Keywords: Triangle-free graphs, Graph eigenvalue, Star complement technique.

†Corresponding author.

E-mail addresses: h.esmailian@ipm.ir (H. Esmailian), ghorbani@kntu.ac.ir (E. Ghorbani).