مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۱۰۸-۱۱۷

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2022.36745.1901

ساختار ایدآل‌های قطری-پایا در *-جبرهای اکسل-پاردو

حسین لرکی [۱] [×]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۱۱

چکیده: گراف‌های خود-متشابه و C^*-جبرهای متناظر توسط اکسل و پاردو در سال ۲۰۱۷ معرفی شدند. این جبرها توسیع گرافی از جبرهای مهم کاتسورا و نکراشویچ هست‌اند که در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفتند. اخیرا نمونه جبری آن‌ها (که جبرهای اکسل-پاردو نامیده می‌شود) نیز معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله کوتاه، ساختار ایدآل‌های جبرهای اکسل-پاردو را مطالعه می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا این جبرها را در قالب جبرهای استاینبرگ نمایش می‌دهیم. سپس به‌کمک این نمایش، ایدآل‌های مدرج و قطری-پایای جبرهای اکسل-پاردو را متناظر با ساختار گرافی مشخص می‌کنیم. این نتیجه توسیعی از ساختار ایدآل‌های مدرج در جبرهای مسیری لیویت است.

واژه‌های کلیدی: گراف خود-متشابه، جبر اکسل-پاردو، جبر استاینبرگ، ایدآل قطری-پایا.

رده‌بندی ریاضی: 16D70; 16W50

۱ مقدمه

گراف‌های خود-متشابه اصطلاحی است که برای عمل یک گروه G روی یک گراف جهت‌دار E با ویژگی‌های معین به‌کار می‌رود. C^*-جبرهای گراف‌های خود-متشابه $\mathcal{O}_{G,E}$ دسته خاصی از C^*-جبرها است که اکسل و پاردو در [۷] به‌عنوان نمونه گرافی جبرهای کاتسورا [۱۰] و نکراشویچ [۱۳] در سال ۲۰۱۷ معرفی کردند و در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفتند [۲، ۵، ۹، ۱۱، ۱۲] . این دسته از C^*-جبرها ابتدا برای گراف‌های متناهی بدون چشمه در نظر گرفته شدند و سپس در [۲، ۸] حالت‌های کلی‌تری نیز معرفی شدند.

به‌طور خلاصه، متناظر با یک گراف خود-متشابه (G,E) داده‌شده، اکسل و پاردو یک نیم‌گروه وارون $\mathcal{S}_{G,E}$ و یک گروه‌وار $\mathcal{G}_{tight}(\mathcal{S}_{G,E})$ را طوری تعریف کردند که

$$\mathcal{O}_{G,E} \cong C^*(\mathcal{G}_{tight}(\mathcal{S}_{G,E}) \cong C^*(\mathcal{S}_{G,E}).$$

سپس با استفاده از ساختار گروه‌وارها و نیم‌گروهای وارون، میانگین‌پذیری [۷، نتیجه ۱۸.۱۰]، کمینه بودن [۷، قضیه ۱۶.۳]، سادگی و به‌طور محض نامتناهی بودن [۷، بخش ۱۶] این جبرها را در کنار بسیاری نتایج دیگر مشخص نمودند.

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: h.larki@scu.ac.ir

فرض کنیم R یک $*$-حلقه جابه‌جایی یک‌دار باشد. مشابه‌با تعریف $\mathcal{O}_{G,E}$ در [۷]، می‌توان یک $*$-جبر $EP_R(G,E)$ را تعریف کرد[۵، ۹]. با وجود برخی شباهت‌ها، روش‌های مطالعه جبرهای $EP_R(G,E)$ و $\mathcal{O}_{G,E}$ کاملا متفاوت‌اند. (به [۹] مراجعه شود.) ازاین‌رو، نتایج [۹] برای $EP_R(G,E)$ با استفاده از روش‌های کاملا جبری ارائه شده‌اند. به‌ویژه، در حالتی که گروه‌وار توپولوژیکی $\mathcal{G}_{G,E} = \mathcal{G}_{tight}(\mathcal{S}_{G,E})$ هاسدورف باشد، در [۹، قضیه B] نشان داده شده است که جبر استاینبرگ $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ با جبر اکسل-پاردو $EP_R(G,E)$ یکریخت است. یادآوری می‌کنیم که بسیاری از ویژگی‌های جبرهای استاینبرگ با ساختار گروه‌وارهای آن‌ها متناظر است (به‌عنوان نمونه به مراجع [۳، ۴، ۱۵، ۱۶] مراجعه شود). لذا یکریختی $A_R(\mathcal{G}_{G,E}) \cong EP_R(G,E)$ برای مطالعه جبرهای اکسل-پاردو بسیار کمک‌کننده است. هم‌چنین، در [۹، قضیه A]، یک نوع قضیه یکتایی برای این جبرها ثابت شده است.

جبرهای اکسل-پاردو $EP_R(G,E)$ به‌طور طبیعی توسیعی بسیار گسترده برای جبرهای مسیری لیویت [۱۷] هستاند که اخیرا مورد توجه قرار گرفته‌اند. یادآوری می‌کنیم که جبرهای مسیری لیویت توسط یک گراف جهت‌دار E تولید می‌شود که با فرض این‌که $G = \{e_G\}$ گروه بدیهی باشد یک جبر اکسل-پاردو می‌باشند. هدف اصلی ما در این مقاله بررسی ساختار ایدآل‌های $EP_R(G,E)$ به‌کمک قضایای [۹] است. برای این منظور، ابتدا در قضیه ۷.۲ صورت [۹، قضیه A] را کمی اصلاح می‌کنیم که بتوانیم راحت‌تر آن را در مقاله به‌کار ببریم. سپس، در بخش ۳، قضیه یکتایی مدرج (قضیه ۷.۲) را به‌کار می‌بریم و یک اثبات کوتاه و متفاوت برای یکریختی

$$A_R(\mathcal{G}_{G,E}) \cong EP_R(G,E)$$

در [۹] ارائه می‌کنیم. این قضیه در بخش ۴ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در انتها در بخش ۵، ساختار ایدآل‌های مدرج $EP_R(G,E)$ را به‌کمک ویژگی‌های گرافی آن بررسی خواهیم کرد. در واقع، در قضیه ۸.۴ نشان می‌دهیم که ایدآل‌های دوطرفه مدرج، پایه‌ای و قطر-پایا کاملا بوسیله مجموعه‌های G-موروثی و G-اشباع در (G,E) مشخص می‌شوند. این قضیه توسیعی از [۱۷، قضیه ۹.۷] برای جبرهای مسیری لیویت است.

۲ جبرهای گروه‌وار و اکسل-پاردو

در این بخش مفاهیم و نتایج مورد نیاز در مقاله را مرور می‌کنیم. ابتدا جبرهای استاینبرگ را که به‌طور مستقل در [۶، ۱۵] معرفی شده‌اند یادآوری می‌کنیم.

۱.۲ گروه‌وارها و جبرهای استاینبرگ

جبرهای گروه‌واری استاینبرگ نوع جبری C^*-جبرهای گروه‌واری است [۱، ۱۴] که در این‌جا به‌طور خلاصه مقدماتی از ساختار آن‌ها را بیان خواهیم کرد. برای جزئیات بیشتر به [۱۵] مراجعه کنید.

یک گروه‌وار یک رسته کوچک مانند $\mathcal{G}$ به‌همراه عمل وارون $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ است. برای هر $\alpha \in \mathcal{G}$، برد و دامنه α به‌صورت $r(\alpha) := \alpha\alpha^{-1}$ و $s(\alpha) := \alpha^{-1}\alpha$ تعریف می‌شود. آن‌گاه برای $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$، ترکیب $\alpha\beta$ خوش تعریف است اگر و تنها اگر $s(\alpha) = r(\beta)$. در این صورت فضای یکه $\mathcal{G}$ برابر $\mathcal{G}^{(0)} = \{\alpha^{-1}\alpha : \alpha \in \mathcal{G}\}$ است و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{G}) := \{\alpha \in \mathcal{G} : s(\alpha) = r(\alpha)\}$$

که یک زیر گروه‌وار از $\mathcal{G}$ است.

در این مقاله، ما با گروه‌وارهای توپولوژیکی کار خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم که گروه‌وار $\mathcal{G}$ به‌همراه یک توپولوژی یک گروه‌وار توپولوژیکی نامیده می‌شود هرگاه نگاشتهای $r, s : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ تحت آن پیوسته باشند. زیرمجموعه $B \subseteq \mathcal{G}$ را دوبخشی گوییم هرگاه نگاشت‌های $r|_B$ و $s|_B$ هر دو همسان‌ریختی باشند.

تعریف ۱.۲. گروه‌وار توپولوژیکی $\mathcal{G}$ را وسیع گوییم هرگاه دارای پایه‌ای از دوبخشی‌های فشرده و باز باشد.

در این مقاله R همواره یک حلقه جابه‌جایی یکدار به‌همراه یک پیچش $r \mapsto r^*$ است (در این صورت می‌گوییم R یک $*$-حلقه است).

تعریف ۲.۲. فضای برداری A روی حلقه R به‌همراه عمل ضرب $(a,b) \mapsto ab$ را یک جبر گوییم هرگاه به‌ازای هر $a,b,c \in A$ و $r \in R$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $a(b+c) = ab + ac$ و $(a+b)c = ac + bc$.

۲. $(ra)b = r(ab)$

۳. $a(bc) = (ab)c$

همچنین، عمل $a \mapsto a^*$ را یک پیچش روی A گوییم هرگاه $(a^*)^* = a$، $(ab)^* = b^*a^*$ و $(ra+b)^* = r^*a^* + b^*$. در این حالت، A یک $*$-جبر نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{G}$ یک گروه‌وار باشد و $B \subseteq \mathcal{G}$، معمولا تابع مشخصه χ_B را با 1_B نشان می‌دهیم.

تعریف **۳.۲**. فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک گروه‌وار وسیع باشد. مجموعه تمام نگاشت‌های به‌شکل $f = \sum_{i=1}^{n} r_i 1_{B_i}$ را که در آن $r_i \in R$ و B_iها دوبخشی فشرده و باز هستاند با $A_R(\mathcal{G})$ نمایش می‌دهیم. آن گاه، این مجموعه با جمع معمولی توابع، ضرب $fg(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta)$ و پیچش $f^*(\gamma) := f(\gamma^{-1})^*$ یک $*$-جبر روی R است که به‌آن جبر استاینبرگ تولیدشده به‌وسیله $\mathcal{G}$ گفته می‌شود.

۲.۲ جبرهای اکسل-پاردو

در این بخش تعاریف مقدماتی جبرهای اکسل-پاردو را مرور خواهیم کرد که از [۹] گرفته شده است. فرض کنیم $E = (E^0, E^1, r, s)$ یک گراف جهت‌دار با مجموعه رئوس E^0، مجموعه یال‌های E^1 و نگاشت‌های دامنه و برد $r, s : E^1 \to E^0$ باشد. اگر به‌ازای هر رأس $v \in E^0$، مجموعه $vE^1 := r^{-1}(v)$ متناهی باشد، می‌گوییم E یک گراف سطر-متناهی است. مجموعه مسیرهای E را با E^* نشان می‌دهیم که عبارت است از

$$E^* = \bigcup_{n\geq 0} E^n = \bigcup_{n\geq 0}\{\mu = e_1 \dots e_n : e_i \in E^1, s(e_i) = r(e_{i+1})\}.$$

برای هر $\mu = e_1 \dots e_n \in E^n$، می‌گوییم μ یک مسیر با طول n است و می‌نویسیم $|\mu| = n$. معمولا راس‌ها را مسیرهایی با طول صفر در نظر می‌گیریم.

تعریف **۴.۲**. فرض کنیم E یک گراف جهت‌دار سطر-متناهی باشد. یک E-خانواده، مجموعه‌ای مانند $\{s_\mu : \mu \in E^*\}$ در یک $*$-جبر است به‌طوری که

۱. $\{s_v : v \in E^0\}$ تصویرهای دوبه‌دو متعامد هستاند به‌طوری که $s_v = \sum_{e\in vE^1} s_e s_e^*$ برای هر $v \in E^0$.

۲. $\{s_\mu : \mu \in E^* \setminus E^0\}$ مجموعه‌ای از یک‌متریهای جزئی هستاند به‌طوری که $s_\mu s_\nu = s_{\mu\nu}$ و $s_e s_f^* = \delta_{e,f} s_{s(e)}$ برای هر $e, f \in E^1$.

تعریف **۵.۲** ([۵، ۹]). فرض کنیم G یک گروه آبلی شمارا با عضو همانی e_G باشد. یک گراف خود-متشابه یک سه‌تایی (G, E, φ) است به‌طوری که

۱. E یک گراف سطر-متناهی است؛

۲. یک عمل $G \curvearrowright E$ وجود دارد به‌طوری که اثر هر $g \in G$ روی E به‌صورت $g : E^0 \sqcup E^1 \to E^0 \sqcup E^1$ یک خودریختی گرافی است؛

۳. φ یک ۱-هم‌دور به‌صورت $\varphi : G \times E^1 \to G$ است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\varphi(g, e).v = g.v \qquad (v \in E^0, e \in E^1, g \in G).$$

اگر ابهامی وجود نداشته باشد، گاهی اوقات سه‌تایی (G, E, φ) را به‌شکل (G, E) خلاصه می‌نویسیم.

تعریف **۶.۲** ([۵، ۹]). فرض کنیم (G, E) یک گراف خود-متشابه باشد. یک (G, E)-خانواده، مجموعه‌ای مانند

$$\{s_\mu : \mu \in E^*\} \cup \{u_{v,g} : v \in E^0, g \in G\}$$

در یک $*$-جبر است به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\{s_\mu : \mu \in E^*\}$ یک E-خانواده است. (تعریف ۴.۲).

۲. $u_{v,e_G} = s_v$ برای هر $v \in E^\circ$.

۳. $u^*_{v,g} = u_{g^{-1}.v,g^{-1}}$ برای هر $v \in E^\circ$ و $g \in G$.

۴. $u_{v,g}s_\mu = \delta_{v,g.r(\mu)}s_{g.\mu}u_{g.s(\mu),\varphi(g,\mu)}$ برای هر $v \in E^\circ$، $\mu \in E^*$ و $g \in G$.

۵. $u_{v,g}u_{w,h} = \delta_{v,g.w}u_{v,gh}$ برای هر $g, h \in G$ و $v, w \in E^\circ$.

آن‌گاه جبر اکسل-پاردو $EP_R(G,E)$ $*$-جبر جامعی است که توسط یک (G,E)-خانواده $\{s_\mu, u_{v,g}\}$ تولید می‌گردد. ویژگی جامعیت به‌این معنا است که اگر $\{S_\mu, U_{v,g}\}$ یک (G,E)-خانواده دیگر در یک $*$-جبر B باشد، آن‌گاه $*$-همریختی $\phi : EP_R(G,E) \to B$ وجود دارد به‌طوری که

$$\phi(s_\mu) = S_\mu, \;\; \phi(u_{v,g}) = U_{v,g} \qquad (v \in E^\circ, \mu \in E^*, g \in G).$$

توجه شود که وجود جبر $EP_R(G,E)$ در [۹، قضیه ۶.۱] ثابت شده است و داریم

$$EP_R(G,E) = \mathrm{span}_R\{s_\mu u_{s(\mu),g}s^*_\nu : \mu,\nu \in E^*, g \in G, s(\mu) = g.s(\nu)\}. \tag{۱.۲}$$

با توجه به‌ساختار ۱.۲، می‌توان یک درجه‌بندی استاندارد برای جبر $EP_R(G,E)$ تعریف کرد. درواقع، برای هر $\mu,\nu \in E^*$ و $g \in G$، تعریف می‌کنیم $d(s_\mu u_{s(\mu),g}s^*_\nu) := |\mu| - |\nu|$ که در آن $|\mu|$ و $|\nu|$ طول مسیرهای μ و ν هستاند. آن‌گاه برای $n \in \mathbb{Z}$، مجموعه اعضای n-همگن برابر است با

$$EP_R(G,E)_n := \mathrm{span}_R\{s_\mu u_{s(\mu),g}s^*_\nu : \mu,\nu \in E^*, |\mu| - |\nu| = n\}$$

و $EP_R(G,E)$ به‌صورت

$$EP_R(G,E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} EP_R(G,E)_n$$

یک جبر $\mathbb{Z}$-مدرج است (برای جزئیات بیش‌تر به [۹] مراجعه شود).

قضیه یکتایی مدرج یکی از قضایای بنیادی در زمینه جبرهای مسیری لیویت است [۱۷، قضیه ۳.۵] که در دسته‌بندی و تعیین ایدآل‌ها بسیار اهمیت دارد. این قضیه در [۹، قضیه A]، برای جبرهای اکسل-پاردو توسیع داده شده است که در ادامه این مقاله مکررا آن را به‌کار خواهیم برد.

قضیه ۷.۲ ([۹، قضیه A]، قضیه یکتایی مدرج). فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه باشد. همچنین، فرض کنیم B یک $*$-جبر $\mathbb{Z}$-مدرج و $\phi : EP_R(G,E) \to B$ یک $*$-همریختی جبری باشد به‌طوری که درجه‌بندی $EP_R(G,E)$ تحت ϕ پایا است. اگر برای هر عضو به‌فرم

$$a = \sum_{i=1}^{l} r_i u_{v,g_i} \in EP_R(G,E) \qquad (r_i \in R, v \in E^\circ, g_i \in G)$$

با ویژگی $g^{-1}_i.v = g^{-1}_j.v$ برای همه $1 \le i,j \le l$ داشته باشیم $\phi(a) \neq 0$، آن‌گاه ϕ یک به‌یک است.

۳.۲ گروه‌وار متناظر با (G,E,φ)

فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه باشد. در [۷، بخش ۴]، اکسل و پاردو نیم‌گروه وارون $\mathcal{S}_{G,E}$ و گروه‌وار $\mathcal{G}_{G,E}$ را متناظر با (G,E,φ) معرفی کردند. سپس به‌کمک ساختار C^*-جبرهای گروه‌واری، ویژگی‌های C^*-جبر تولید شده به‌وسیله (G,E,φ) را مطالعه نمودند. در این مقاله حالت جبری این ساختار را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم که در [۵، بخش ۶] ارائه شده است.

متناظر با $(G,E.\varphi)$، نیم‌گروه وارون

$$\mathcal{S}_{G,E} = \{(\mu,g,\nu) : \mu,\nu \in E^*, g \in G, s(\mu) = g.s(\nu)\} \cup \{0\}$$

با ضرب

$$(\mu,g,\nu)(\gamma,h,\delta):=\begin{cases}(\mu,g\varphi(h,\varepsilon),\delta h.\varepsilon) & \nu=\gamma\varepsilon\\ (\mu g.\varepsilon,\varphi(g,\varepsilon)h,\delta) & \gamma=\nu\varepsilon\\ ۰ & Oth.\end{cases}$$

و وارون $(\mu,g,\nu)^*:=(\nu,g^{-۱},\mu)$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم E^∞ مجموعه همه مسیرهای نامتناهی یک طرفه به‌شکل $x=e_۱e_۲\ldots$ در E باشد. آن‌گاه عمل $G\curvearrowright E$ را می‌توان به یک عمل $G\curvearrowright E^\infty$ روی E^∞ توسیع داد [۷، گزاره۱.۸]. هم‌چنین به‌ازای هر $(\mu,g,\nu)\in\mathcal{S}_{G,E}$ و $x=\nu\hat{x}\in E^\infty$، تعریف می‌کنیم $(\mu,g,\nu).x=\mu(g.\hat{x})$. آن‌گاه گروه‌وار $\mathcal{G}_{G,E}$ شامل همه جرم‌های عمل $\mathcal{S}_{G,E}$ روی E^∞ است که عبارت است از

$$\mathcal{G}_{G,E}=\{[\mu,g,\nu;x]:x=\nu\hat{x}\}.$$

در این صورت، فضای یکه $\mathcal{G}_{G,E}$ برابر

$$\mathcal{G}^{(۰)}_{G,E}=\{[\mu,e_G,\mu;x]:x=\mu\hat{x}\}$$

است که به‌کمک تناظر $[\mu,e_G,\mu;x]\mapsto x$ با فضای E^∞ معادل است. هم‌چنین، برد و دامنه هر عضو $\mathcal{G}_{G,E}$ به‌صورت زیر است

$$r([\mu,g,\nu;x])=\mu(g.\hat{x}),\quad s([\mu,g,\nu;x])=\nu\hat{x}.$$

طبق [۷، بخش ۱۰]، می‌توان $\mathcal{G}_{G,E}$ را به‌عنوان یک گروه‌وار وسیع در نظر گرفت که پایه آن از دوبخشی‌هایی به‌شکل

$$\Theta(\mu,g,\nu):=\{[\mu,g,\nu;x]:x\in\nu E^\infty\}$$

تشکیل شده است.

تعریف ۸.۲. گراف خود-متشابه (G,E,φ) را شبه‌آزاد گوییم هر گاه برای هر $g\in G$ و $e\in E^۱$ داشته باشیم:

$$g.e=e\ \wedge\ \varphi(g,e)=e_G\implies g=e_G.$$

در این مقاله با گراف‌های خود-متشابه شبه‌آزاد کار خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم که اگر (G,E,φ) شبه‌آزاد باشد، آن‌گاه [۷، گزاره ۱.۱۲] ثابت می‌کند که $\mathcal{G}_{G,E}$ یک گروه‌وار وسیع با توپولوژی هاسدورف است.

۳ جبرهای اکسل-پاردو به‌عنوان جبرهای استاینبرگ

فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه شبه‌آزاد باشد. در این بخش نشان می‌دهیم که جبر اکسل-پاردو $EP_R(G,E)$ با جبر استاینبرگ $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ یکریخت است. از این یکریختی در بخش بعد برای مطالعه ساختار ایدآل‌ها استفاده خواهیم کرد.
توجه کنید این یکریختی در [۹] ثابت شده است و در این بخش، به‌کمک گروه‌وارها، می‌خواهیم یک اثبات ساده‌تر و متفاوت با [۹] برای آن ارائه کنیم. قبل از آن لم ساده زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۳. فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه باشد. عضوهای $v,w\in E^۰$ و $g,h\in G$، با ویژگی $g.v=h.v=w$ را در نظر بگیرید. اگر $g\neq h$، آن‌گاه

$$\Theta(v,g,w)\cap\Theta(v,h,w)=\emptyset.$$

اثبات. فرض کنیم

$$[v,g,w;x]=[v,h,w;y]\in\Theta(v,g,w)\cap\Theta(v,h,w)$$

که در آن $x,y\in wE^\infty$. آن‌گاه از [۷، گزاره ۶.۸] خواهیم داشت $x=y$ و $h=\varphi(g,w)=g$ و لم ثابت می‌شود. □

قضیه ۲.۳. فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه باشد. آن‌گاه یک $*$-یکریختی جبری $\phi:EP_R(G,E)\to A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $v\in E^۰$، $\mu\in E^*$ و $g\in G$ داریم

$$\phi(s_\mu)=۱_{\Theta(\mu,e_G,s(\mu))},\quad \phi(u_{v,g})=۱_{\Theta(v,g,g^{-۱}.v)}.$$

اثبات. برای هر $v \in E^{\circ}$، $\mu \in E^{*}$ و $g \in G$ تعریف می‌کنیم

$$S_{\mu} := ۱_{\Theta(\mu, e_G, s(\mu))}, \qquad U_{v,g} := ۱_{\Theta(v, g, g^{-۱}.v)}.$$

چون

$$S_{\mu}^{*} = ۱_{\Theta(\mu, e_G, s(\mu))^{-۱}} = ۱_{\Theta(s(\mu), e_G, \mu)}, \quad U_{v,g}^{*} = ۱_{\Theta(g^{-۱}.v, g^{-۱}, v)}$$

یک محاسبه‌سرراست نشان می‌دهد که $\{S_{\mu}, U_{v,g}\}$ یک (G, E)-خانواده در $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ است. پس ویژگی جامعیت وجود $*$-همریختی ϕ را ثابت می‌کند.

توجه شود که هر عضو $\Theta(\mu, g, \nu)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Theta(\mu, g, \nu) = \Theta(\mu, e_G, s(\mu))\Theta(s(\mu), g, s(\nu))\Theta(\nu, e_G, s(\nu))^{-۱}.$$

حال چون $\mathcal{G}_{G,E}$ یک گروه‌وار وسیع با پایه ای از دوبخشی‌های به‌شکل $\Theta(\mu, g, \nu)$ است، نتیجه می‌گیریم که همریختی ϕ پوشا است.

برای اثبات یک‌به‌یک بودن ϕ، قضیه یکتایی مدرج، قضیه ۷.۲، را به‌کار می‌بریم. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $c : \mathcal{G}_{G,E} \to \mathbb{Z}$ با تعریف $c([\mu, g, \nu; x]) := |\mu| - |\nu|$، به‌طور استاندارد یک $\mathbb{Z}$-درجه‌بندی روی جبر $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ القا می‌کند. همچنین، با توجه به‌ساختار جبر $EP_R(G, E)$ در ۱.۲، یک $\mathbb{Z}$-درجه‌بندی طبیعی به‌صورت $c'(s_{\mu}u_{s(\mu),g}s_{\nu}^{*}) = |\mu| - |\nu|$ روی آن وجود دارد که تحت ϕ پایا است. پس شرط اولیه قضیه ۷.۲ برای ϕ برقرار است.

حال فرض کنیم $\phi(a) = \circ$ که در آن a عضوی از $EP_R(G, E)$ به‌شکل $a = \sum_{i=۱}^{l} r_i u_{v,g_i}$ با ویژگی $g_i^{-۱}.v = g_j^{-۱}.v$ باشد. با ترکیب g_iهای مشابه، می‌توان فرض کرد که g_iها متمایزند. آن‌گاه

$$\phi(a) = \sum_{i=۱}^{l} r_i ۱_{\Theta(v, g_i, g_i^{-۱}.v)} = \circ.$$

توجه شود که لم ۱.۳ می‌گوید که دوبخشی‌های $\Theta(v, g_i, g_i^{-۱}.v)$ دو به‌دو از هم جدا هستند. لذا برای هر i و هر $\beta \in \Theta(v, g_i, g_i^{-۱}.v)$ داریم $r_i = \phi(a)(\beta) = \circ$. بنابراین $a = \circ$ و قضیه یکتایی مدرج نتیجه می‌دهد که ϕ یک‌به‌یک و یکریختی است.

□

۴ ساختار ایدآل‌های $EP_R(G, E)$

فرض کنیم (G, E, φ) یک گراف خود-متشابه‌شبه‌آزاد است. آن‌گاه $\mathcal{G}_{G,E}$ یک گروه‌وار وسیع است و زیرگروه‌وار یکه $\mathcal{G}_{G,E}^{(\circ)}$ در آن هم باز و هم بسته است. لذا برای هر $f \in A_R(\mathcal{G}_{G,E})$، تحدید $f|_{\mathcal{G}_{G,E}^{(\circ)}}$ مجددا در $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ قرار دارد. بنابراین $A_R(\mathcal{G}_{G,E}^{(\circ)})$ یک $*$-زیرجبر $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ است و تابع امید شرطی $\mathcal{E} : A_R(\mathcal{G}_{G,E}) \to A_R(\mathcal{G}_{G,E}^{(\circ)})$ با تعریف $\mathcal{E}(f) = f|_{\mathcal{G}_{G,E}^{(\circ)}}$ روی $A_R(\mathcal{G}_{G,E})$ وجود دارد.

فرض کنیم $D := \operatorname{span}_R\{s_{\mu}s_{\mu}^{*} : \mu \in E^{*}\}$. آن‌گاه به‌کمک تناظر قضیه ۲.۳، تابع امید به‌صورت $\mathcal{E} : EP_R(G, E) \to D$ با تعریف

$$\mathcal{E}(s_{\mu}u_{s(\mu),g}s_{\nu}^{*}) = \delta_{\mu,\nu}\delta_{g,e_G}s_{\mu}s_{\mu}^{*} \quad (\mu, \nu \in E^{*}, s(\mu) = g.s(\nu))$$

است.

تعریف ۱.۴. ایدآل (دو طرفه) I در $EP_R(G, E)$ را قطری-پایا گوییم هرگاه $\mathcal{E}(I) \subseteq I$.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم (G, E, φ) یک گراف خود-متشابه باشد. زیرمجموعه $H \subseteq E^{\circ}$ را

الف) G-موروثی گوییم هر گاه از $v \in H$ نتیجه بگیریم $s(\{g.e : g \in G, e \in E^{۱}, r(e) = v\}) \subseteq H$؛

ب) G-اشباع گوییم هرگاه برای هر $v \in E^{\circ}$ و $g \in G$، از $s(\{e \in E^{۱} : r(e) = v\}) \subseteq H$ نتیجه بگیریم $g.v \in H$.

قبل از نتیجه اصلی مقاله، چند لم را بیان می‌کنیم که به‌آن‌ها نیاز خواهیم داشت. ایده اولیه این لم‌ها از [۱۷] گرفته شده است و اثبات استاندارد دارند.

لم ۳.۴ (به [۱۷، لم ۶.۷] مراجعه شود.). اگر I ایدآلی (دو طرفه) از $EP_R(G,E)$ باشد، آن‌گاه $H_I := \{v \in E^\circ : s_v \in I\}$ یک مجموعه G-موروثی و G-اشباع در E° است.

لم ۴.۴. فرض کنیم H یک زیرمجموعه G-موروثی و G-اشباع در E° باشد. آن‌گاه ایدآل تولیدشده به‌وسیله $\{s_v : v \in H\}$ در $EP_R(G,E)$ برابر است با

$$I_H := \operatorname{span}_R\{s_\mu u_{s(\mu),g} s_\nu^* : g \in G, s(\mu), s(\nu) \in H\}. \tag{۱.۴}$$

اثبات. مشابه‌با [۱۷، گزاره ۷.۷] می‌توان نشان داد که I_H یک ایدآل در $EP_R(G,E)$ است که مولدهای $\{s_v : v \in H\}$ را شامل می‌شود. از طرف دیگر، اگر J ایدآلی در $EP_R(G,E)$ باشد که این مولدها را شامل شود، آن‌گاه هر عضو $s_\mu u_{s(\mu),g} s_\nu^*$ در بسط ۱.۴ در J قرار می‌گیرد و درنتیجه $I_H \subseteq J$. بنابراین، I_H کوچک‌ترین ایدآل با این ویژگی است. □

لم ۵.۴. فرض کنیم H یک زیرمجموعه G-موروثی و G-اشباع در E° باشد. برای هر $v \in E^\circ$ و $0 \neq r \in R$ داریم $v \in H$ اگر و تنها اگر $rs_v \in I_H$.

اثبات. برهان این لم مانند بخش دوم اثبات [۱۷، گزاره ۷.۷] است. □

توجه شود که اگر (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه و H زیرمجموعه‌ای G-موروثی و G-اشباع در E° باشد، به‌راحتی می‌توان چک‌کرد که $(G, E\setminus EH, \varphi|_{G\times E\setminus EH})$ نیز یک گراف خود-متشابه است.

گزاره ۶.۴. فرض کنیم H یک زیرمجموعه G-موروثی و G-اشباع در E° باشد. همچنین فرض کنیم $\{t_\mu, w_{v,g}\}$ یک $(G,E\setminus EH)$-خانواده مولد $EP_R(G,E\setminus EH)$ باشد. آن‌گاه نگاشت $\psi : EP_R(G,E\setminus EH) \to EP_R(G,E)/I_H$ با تعریف

$$\psi(t_\mu w_{r(\mu),g} t_\nu^*) := s_\mu u_{r(\mu),g} s_\nu^* + I_H \quad (\mu,\nu \in (E\setminus EH)^*, g \in G)$$

یک $*$-یکریختی از $EP_R(G,E\setminus EH)$ روی جبر خارج‌قسمتی $EP_R(G,E)/I_H$ است.

اثبات. اگر برای هر $v \in E^\circ$، $\mu \in E^*$ و $g \in G$ تعریف کنیم $T_\mu := s_\mu + I_H$ و $U_{v,g} := u_{v,g} + I_H$، آن‌گاه $\{T_\mu, U_{v,g}\}$ یک $(G,E\setminus EH)$-خانواده در $EP_R(G,E)/I_H$ است. پس به‌کمک ویژگی جامعیت، چنین $*$-همریختی ψ وجود دارد. توجه شود چون برای هر $\mu \in (EH)^*$ داریم $s_\mu \in I_H$، لذا ψ پوشا است.
برای نشان دادن یک‌به‌یک بودن از قضیه یکتایی مدرج، قضیه ۷.۲، استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه شود که چون I_H یک ایدآل مدرج است، ψ یک همریختی مدرج است. عضو $a = \sum_{i=1}^n r_i w_{v,g_i}$ در $EP_R(G,E\setminus EH)$ را به‌طور ثابت در نظر می‌گیریم به‌طوری که $v \in E^\circ \setminus H$ و $g_i^{-1}.v = g_j^{-1}.v$ برای همه $1 \le i,j \le n$. مشابه با اثبات قضیه ۲.۳ می‌توان فرض کرد که g_iها متمایز هستند. اگر $\psi(a) = 0$، آن‌گاه $\psi(a) = \sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i} + I_H = I_H$ و داریم $\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i} \in I_H$. بنابراین، چون I_H یک ایدآل است، برای هر $1 \le j \le n$، با ضرب $u_{g_j^{-1}.v, g_j^{-1}}$ از راست داریم

$$(\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i}) u_{g_j^{-1}.v, g_j^{-1}} = \sum_{i=1}^n r_i u_{v, g_i g_j^{-1}} \in I_H.$$

لذا از قطری-پایا بودن I_H خواهیم داشت

$$r_j s_v = r_j u_{v,e_G} = \mathcal{E}(\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i g_j^{-1}}) \in I_H.$$

چون $v \notin H$، لم ۵.۴ نتیجه می‌دهد $r_j = 0$ و لذا $a = 0$. حال قضیه ۷.۲ می‌گوید که ψ یک‌به‌یک است و اثبات کامل می‌شود. □

تعریف ۷.۴. ایدآل I در $EP_R(G,E)$ را پایه‌ای گوییم هرگاه از $rs_v \in I$ نتیجه بگیریم $s_v \in I$ برای هر $v \in E^\circ$ و $r \in R \setminus \{0\}$.

قضیه **۸.۴.** فرض کنیم (G,E,φ) یک گراف خود-متشابه شبه‌آزاد باشد. آن‌گاه $H\mapsto I_H$ یک تناظر دوسویه بین زیرمجموعه‌های G-موروثی و G-اشباع از E° و ایدآل‌های پایه‌ای، مدرج و قطری-پایا از $EP_R(G,E)$ است. علاوه‌براین، $I\mapsto H_I$ وارون این تناظر است.

اثبات. لم ۵.۴ یک‌به‌یک بودن $I_H\mapsto H$ را نشان می‌دهد. درواقع، اگر $I_H=I_K$، آن‌گاه بنابر لم ۵.۴ خواهیم داشت $H=H_{I_H}=H_{I_K}=K$.

برای دیدن پوشا بودن تناظر، فرض می‌کنیم I یک ایدآل پایه‌ای، مدرج و قطری-پایا از $EP_R(G,E)$ است و نشان می‌دهیم $I=I_{H_I}$. برای سادگی قرار می‌دهیم $J:=I_{H_I}$. به‌کمک گزاره ۶.۴، $EP_R(G,E\setminus EH_I)\cong EP_R(G,E)/J$ را به‌عنوان یک $*$-جبر درنظر می‌گیریم. فرض کنیم خانواده‌های $\{s_\mu,u_{v,g}\}$ و $\{t_\mu,w_{v,g}\}$ به‌ترتیب مولد جبرهای $EP_R(G,E)$ و $EP_R(G,E)/J$ هستند. چون $J\subseteq I$، می‌توان نگاشت خارج‌قسمتی $q:EP_R(G,E)/J\to EP_R(G,E)/I$ را تعریف کرد به‌طوری‌که برای هر $v\in E^\circ$، $\mu\in E^*$ و $g\in G$،

$$q(t_\mu)=s_\mu+I,\qquad q(w_{v,g})=u_{v,g}+I.$$

چون I و J هر دو ایدآل‌های مدرج هستند، q یک نگاشت مدرج است .

ادعا می‌کنیم که q یک‌به‌یک است و برای دیدن آن می‌خواهیم قضیه ۷.۲ را برای q به‌کار ببریم. پس عضوی مانند $a=\sum_{i=1}^n r_i w_{v,g_i}$ با $v\in E^\circ\setminus H_I$ و $v.g_i^{-1}$های برابر را درنظر می‌گیریم به‌طوری که $q(a)=0$. از $q(a)=0$ نتیجه می‌شود $\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i}\in I$. مانند قبل فرض می‌کنیم که g_iها متمایز هستند. آن‌گاه، برای هر $1\le j\le n$، خواهیم داشت

$$b:=(\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_i})(u_{g_j^{-1}.v,g_j^{-1}})=\sum_{i=1}^n r_i u_{v,g_ig_j^{-1}}\in I.$$

اگر $r_j\neq 0$، چون I پایه‌ای و قطری-پایا است،

$$I\ni\mathcal{E}(b)=r_j u_{v,e_G}=r_j s_v$$

و لذا $v\in H_I$ که تناقض است. ازاین‌رو، همه r_jها صفر هستند و $a=0$. پس بنابر قضیه ۷.۲ نگاشت q یک‌به‌یک است. درنتیجه خواهیم داشت $I=J=I_{H_I}$ و برهان کامل می‌شود. □

سپاس‌گزاری. در پایان، نویسنده از حمایت مالی دانشگاه شهید چمران اهواز در این پژوهش سپاس‌گزاری و قدردانی می‌نماید (شماره پژوهانه: SCU.MM۱۴۰۰٫۲۷۹).

فهرست منابع

[1] Anantharaman-Delaroche C. and Renault J., *Amenable groupoids*, volume 36 of Monographs of L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000.

[2] Bédos E., Kaliszewski S. and Quigg J., *On Exel-Pardo algebras*, J. Operator Theory **78**(2) (2017), 309-345.

[3] Clark L.O. and Edie-Michell C., *Uniqueness theorems for Steinberg algebras*, Algebra Represent. Theory **18** (2015), 907-916.

[4] Clark L.O. and Edie-Michell C., an Huef A. and Sims A., *Ideals of Steinberg algebras of strongly effective groupoids, with applications to Leavitt path algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), 5461-5486.

[5] Clark L.O., Exel R. and Pardo E., *A generalized uniqueness theorem and the graded ideal structure of Steinberg algebras*, Forum Math. **30** (3) (2018), 533-552.

[6] Clark L.O., Farthing C., Sims A. and Tomforde M., *A groupoid generalisation of Leavitt path algebras*, Semigroup Forum **89** (2014), 501-517.

[7] Exel R. and Pardo E., *Self-similar graphs, a unified treatment of Katsura and Nekrashevych C^*-algebras*, Adv. Math. **306** (2017), 1046-1129.

[8] Exel R., Pardo E. and Starling C., *C^*-algebras of self-similar graphs over arbitrary graphs*, preprint, arXiv:1807.01686 (2018).

[9] Hazrat R., Pask D., Sierakowski A. and Sims A., *An algebraic analogue of Exel-Pardo C^*-algebras*, Algebr. Represent. Theory (2020). https://doi.org/10.1007/s10468-020-09973-x.

[10] Katsura T., *A construction of actions on Kirchberg algebras which induce given actions on their K-groups*, J. Reine Angew. Math. **617** (2008), 27-65.

[11] Larki H., *A dichotomy for simple self-similar graph C^*-algebras*, J. Math Anal. Appl **494**(2) (2021), 124622.

[12] Li H. and Yang D., *Self-similar k-graph C^*-algebras*, Int. Math. Res. Not., IMRN, doi: 10.1093/imrn/rnz146.

[13] Nekrashevych V., *Cuntz-Pimsner algebras of group actions*, J. Operator Theory **52** (2004), 223-249.

[14] Renault J., A groupoid approach to C^*-algebras, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer, Berlin, 1980.

[15] Steinberg B., *A groupoid approach to inverse semigroup algebras*, Adv. Math. **223** (2010), 689-727.

[16] Steinberg B., *Simplicity, primitivity and semiprimitivity of étale groupoid algebras with applications to inverse semigroup algebras*, J. Pure Appl. Algebra **220**(3) (2016), 1035-1054.

[17] Tomforde M., *Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 471-484.

Structure of diagonal-invariant ideals in Exel-Pardo $*$-agebras

Hossein Larki[1, †]

(1) Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2021/2/24 Accepted: 2022/3/31

Abstract: As a unified treatment of Katsura and Nekrashevych C^*-algebras, Exel and Pardo introduced self-similar graph C^*-algebras in 2017. More recently, the algebraic version of these C^*-algebras (called Exel-Pardo algebras) are introduced and considered by some authors. In this note, we study the ideal structure of Exel-Pardo algebras. To do this, we first give a short proof for representing these algebras as Steinberg algebras. Then, by this result, we characterize basic, graded, and diagonal-invariant ideals of Exel-Pardo algebras by underlying graph structure. This result generalizes the graded ideal structure of Leavitt path algebras to self-similar graphs.

Keywords: Self-similar graph, Exel-Pardo algebra, Steinberg algebra, diagonal-invariant ideal.

†Corresponding author.

E-mail addresses: h.larki@scu.ac.ir.