مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۱۳۸-۱۵۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.39680.1996

بهینه‌سازی برآورد میانگین جامعه

لیدر نوایی [۱] ×، رضا اکبری [۲]

(۱) گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران .

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۰

چکیده: در این مقاله، به بحث در مورد برآورد میانگین جامعه، زمانی که داده‌های نمونه‌گیری دارای خطای اندازه‌گیری هستند با استفاده از یک برآوردکننده جدید کارا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بررسی خواص نااریبی و میانگین مربع خطای برآوردکننده پیشنهادی تا تقریب مرتبه دوم سری تیلور استفاده شده است. همچنین کارایی این برآوردکننده را نسبت به سایر برآوردکننده‌های موجود مورد بررسی قرار داده و این نتایج را برای داده‌های واقعی به کار می‌بریم. نشان می‌دهیم که این برآوردکننده در مقایسه با سایر برآورده‌کننده‌های موجود از کارایی بهتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: اریبی، خطای اندازه‌گیری، برآوردکننده، میانگین مربع خطا، درصد کارایی نسبی.

رده‌بندی ریاضی: 62F12

۱ مقدمه

همان طوری که می‌دانید یکی از عمده‌ترین خطاهایی که در هر آمارگیری ممکن است رخ دهد، خطای اندازه‌گیری است. خطای اندازه‌گیری، تفاوت مقدار به‌دست آمده یا همان مقدار مشاهده شده با مقدار واقعی متغیر تحت بررسی است. این خطا با انجام اندازه‌گیری بر روی واحدهای نمونه رخ می‌دهد. مجموعه اطلاعات ارائه شده توسط پاسخ دهندگان اغلب کمتر یا بیشتر گزارش می‌شود و پژوهشگر با مسئله‌ی خطای اندازه‌گیری، هنگام گردآوری داده‌ها از افراد مواجه است. خطای اندازه‌گیری ممکن است ناشی از موارد زیر باشد:

الف. نقص در ابزار آمارگیری

ب. ارائه‌ی عمدی اطلاعات نادرست توسط پاسخ‌گویان

ج. ارائه‌ی غیرعمدی اطلاعات نادرست توسط پاسخ‌گویان

د. تأثیر آمارگیر بر پاسخ‌های ارائه شده توسط پاسخ‌گویان

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: l.navaei@pnu.ac.ir (L.Navaei), r.akbari@pnu.ac.ir (R.Akbari)

در طول چند دهه‌ی گذشته، آماردانان علاقه‌مند به مسئله‌ی برآورد پارامترهای جامعه (میانگین، واریانس، نسبت) با وجود خطاهای اندازه‌گیری (یا پاسخ) بودند. ککران اثر خطاهای اندازه‌گیری را روی برآوردهای کمترین مربعات معمولی ضرایب رگرسیون مطالعه کرد و پی برد که خطاهای اندازه‌گیری ممکن است به برآوردهای ناسازگار و نااریب از ضرایب رگرسیون منجر شوند. شالب [۷] برآوردگر نسبتی کلاسیک میانگین جامعه را با وجود خطاهای اندازه‌گیری بررسی کرد. مانیشا و سینگ [۹] اثر خطاهای اندازه‌گیری را روی یک برآوردگر جدید که ترکیبی خطی از برآوردگر نسبتی کلاسیک و میانگین نمونه بود، بررسی کردند. دیواکار شوکلا و همکارانش [۸] برآوردگر جدیدی را برای میانگین جامعه معرفی کردند که ترکیبی خطی از برآوردگر سریون کاترمن و میانگین نمونه بود. مسئله خطای اندازه‌گیری همچنین توسط سینگ و کارپ [۱۰] ، کومار و همکارانش [۶] و غیره بررسی شده است. با استفاده از نتایج به دست آمده از پژوهش های فولر [۵] ، کارهای ارزنده دیگری نیز توسط سایر دانشمندان در این زمینه به دست آمده است. همچنین تایلور [†] و همکاران [۱۲] به بحث در مورد برآورد میانگین جامعه برای داده‌های دارای عدم پاسخ پرداخته‌اند. لازم به ذکر است در مورد برآورد واریانس جامعه نیز بوشان [‡] و همکاران [۲] در حالتی که داده‌ها دارای عدم پاسخ بوده‌اند نتایج جالبی را بدست آورده‌اند. کارهای انجام شده توسط سبرین [§] [۳] و همکارانش و احمدا [¶] و همکارانش [۱] نیز در این زمینه انجام گرفته است.

در این مقاله ابتدا پس از معرفی چند نماد در بخش ۲ ، برخی از برآوردگرهای موجود برای میانگین جامعه، یعنی برآوردگر نسبتی شالب [۷] ، برآوردگر مانیشا و سینگ [۹] و برآوردگر شوکلا و همکارانش [۸] را که مبتنی بر برآوردگر نسبتی کلاسیک و میانگین نمونه هستند، با وجود خطای اندازه‌گیری بررسی شده و ویژگی‌های آنها، یعنی اریبی و میانگین مربع خطا بحث شده است و در بخش ۳ برآوردگر جدیدی معرفی شده است و ویژگی‌های آن، یعنی اریبی و میانگین مربع خطا بحث شده است. در بخش ۴ برآوردگر جدید با دیگر برآوردگرهای مذکور با وجود خطای اندازه‌گیری مقایسه و شرایط کارایی بر اساس میانگین مربع خطا نتیجه‌گیری شده است. همچنین در بخش ۵ این نتایج را برای داده‌های واقعی به کار برده‌ایم و صحت نتایج در مقایسه های عددی و شبیه سازی شده حاصل شده است.

۲ نمادگذاری و مروری بر برآوردکننده‌های پیشین

جامعه‌ای متناهی به حجم N را در نظر بگیرید که یک نمونه تصادفی ساده به حجم n بدون جایگذاری از آن انتخاب شده است. فرض کنید که X و Y به ترتیب متغیر مورد مطالعه و متغیر کمکی باشند. همچنین فرض کنید که (x_i, y_i) مقادیر مشاهده شده و (X_i, Y_i) مقادیر صحیح دو صفت (X, Y) برای i امین $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ واحد نمونه‌ای باشند. فرض کنید که خطاهای اندازه‌گیری

$$U_i = y_i - Y_i, \tag{۱.۲}$$

$$V_i = x_i - X_i, \tag{۲.۲}$$

باشند، به طوری که خطاهای اندازه‌گیری ذاتاً تصادفی و ناهمبسته با میانگین صفر و واریانس $S_U^۲$ و $S_V^۲$ هستند. فرض کنید که

$$\bar{Y} = \frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} Y_i,$$

$$\bar{X} = \frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} X_i,$$

به ترتیب میانگین جامعه‌ای متغیرهای Y و X و

$$\bar{y} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} y_i,$$

$$\bar{x} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} x_i,$$

Tailor[†]
Bhushan[‡]
Cebrian[§]
Ahmeda[¶]

به ترتیب میانگین نمونه‌ای متغییرهای Y و X و

$$S_Y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2,$$
$$S_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)^2,$$

به ترتیب واریانس‌های جامعه متغییرهای Y و X باشند. همچنین فرض کنید که C_Y و C_X به ترتیب ضریب تغییرات متغیرهای Y و X باشند و ρ_{XY} ضریب همبستگی بین متغیرهای Y و X و $f = \frac{n}{N}$ کسر نمونه‌گیری باشد. همچنین فرض کنید که $\bar{X}$ ، میانگین متغیر کمکی، معلوم باشد. برای بدست آوردن ویژگی‌های برآوردگرها، تعدادی علائم دیگر را معرفی می‌کنیم. فرض کنید که

$$\omega_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right), \tag{۳.۲}$$

$$\omega_U = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} U_i, \tag{۴.۲}$$

$$\omega_X = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right), \tag{۵.۲}$$

$$\omega_V = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} V_i. \tag{۶.۲}$$

با استفاده از روابط (۱.۲) و (۲.۲) می‌توان نوشت:

$$\bar{y} = \bar{Y} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_Y + \omega_U\right), \tag{۷.۲}$$

$$\bar{x} = \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_X + \omega_V\right). \tag{۸.۲}$$

بنا به رابطه (۱.۲) میانگین نمونه‌ای متغیر مورد مطالعه $(\bar{y})$ می‌توان به صورت

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i + Y_i\right), \tag{۹.۲}$$

نوشت. با توجه به این که $E[U_i] = 0$ ، داریم:

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(E[U_i] + E[Y_i]\right) = \bar{Y}, \tag{۱۰.۲}$$

یعنی، میانگین نمونه‌ای یک برآوردگر نااریب میانگین جامعه است و واریانس آن برابر است با

$$Var(\bar{y}) = \frac{\bar{Y}^2}{n}\left(C_Y^2 + \frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}\right). \tag{۱۱.۲}$$

برای محاسبه اریبی و واریانس دیگر برآوردگرهای موجود از (۷.۲) و (۸.۲) با فرض

$$\begin{cases} \phi_Y = \bar{y} - \bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_Y + \omega_U\right) \\ \phi_X = \bar{x} - \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\omega_X + \omega_V\right) \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

داریم:

$$E(\phi_Y) = E(\phi_X) = ۰, \qquad (۱۳.۲)$$

زیرا $\bar{y}$ برآوردگر نااریب $\bar{Y}$ و $\bar{x}$ برآوردگر نااریب $\bar{X}$ است و

$$\begin{cases} E(\phi_Y^۲) = Var(\bar{y}) = \frac{۱}{n}\bar{Y}^۲\left(C_Y^۲ + \frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲}\right) \\ E(\phi_X^۲) = Var(\bar{x}) = \frac{۱}{n}\bar{X}^۲\left(C_X^۲ + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}\right) \\ E(\phi_Y\phi_X) = Cov(\bar{y},\bar{x}) = \frac{۱}{n}\bar{Y}\bar{X}\rho_{XY}C_YC_X. \end{cases} \qquad (۱۴.۲)$$

در ادامه این بخش برخی از انواع برآوردگرهای موجود برای میانگین جامعه که مبتنی بر روش برآورد نسبتی بوده و داده‌های نمونه‌گیری دارای خطای اندازه‌گیری هستند را مورد مطالعه قرار میگیرد.

۱.۲ برآوردگر شالب

شالب برآوردگر

$$t_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}, \qquad (۱۵.۲)$$

را پیشنهاد کرد. بدیهی است که این همان برآوردگر نسبتی است. مقدار اریبی t_R برابر

$$B(t_R) = \frac{\bar{Y}}{n}\Big\{\left(C_X^۲ - \rho_{XY}C_XC_Y\right) + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}\Big\}, \qquad (۱۶.۲)$$

و میانگین مربع خطای آن برابر است با:

$$MSE(t_R) = \frac{\bar{Y}^۲}{n}\Big\{\left(C_Y^۲ + C_X^۲ - ۲\rho_{XY}C_XC_Y\right) + \left[\frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲} + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}\right]\Big\}. \qquad (۱۷.۲)$$

۲.۲ برآوردگر مانیشا و سینگ

مانیشا و سینگ برآوردگر ترکیبی

$$\bar{y}_\theta = \theta t_R + (۱-\theta)\bar{y}, \qquad (۱۸.۲)$$

را پیشنهاد کردند، که در آن θ یک عدد ثابت مناسب است. بدیهی است که به‌ازای $\theta = ۱$ برآوردگر شالب و به ازای $\theta = ۰$ میانگین نمونه‌ای نتیجه می‌شود. مقدار اریبی $\bar{y}_\theta$ برابر

$$B(\bar{y}_\theta) = \frac{\theta\bar{Y}}{n}\Big\{\left(C_X^۲ - \rho_{XY}C_XC_Y\right) + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}\Big\}, \qquad (۱۹.۲)$$

و میانگین مربع خطای آن برابر

$$MSE(\bar{y}_\theta) = \frac{\bar{Y}^۲}{n}\Big\{\left(C_Y^۲ + \theta^۲C_X^۲ - ۲\theta\rho_{XY}C_XC_Y\right) + \left[\frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲} + \theta^۲\frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}\right]\Big\}, \qquad (۲۰.۲)$$

است، به طوری که مقدار بهینه θ برابر است با

$$\theta^* = \frac{\rho_{XY}C_XC_Y}{C_X^۲ + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}}, \qquad (۲۱.۲)$$

که به ازای آن میانگین مربع خطای $\bar{y}_\theta$ دارای کمترین مقدار ممکن است.

۳.۲ برآوردگر دیواکار شوکلا و همکاران

دیواکار شوکلا و همکاران برآوردگر

$$\bar{y}_D = \beta\bar{y}(\frac{\bar{x}'}{\bar{X}}) + (۱-\beta)\bar{y}, \qquad (۲۲.۲)$$

را پیشنهاد کردند، به طوری که در آن β یک عدد ثابت مناسب است و

$$\bar{x}' = \frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n}, \qquad (۲۳.۲)$$

بوده و اریبی $\bar{y}_D$ برابر

$$B(\bar{y}_D) = -\frac{\beta\bar{Y}}{N-n}\rho_{XY}C_XC_Y, \qquad (۲۴.۲)$$

می‌باشد و میانگین مربع خطای آن برابر

$$MSE(\bar{y}_D) = \frac{\bar{Y}^۲}{n}\Big\{\big(C_Y^۲ + (\frac{n\beta}{N-n})^۲C_X^۲ - ۲\frac{n\beta}{N-n}\rho_{XY}C_XC_Y\big) + [\frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲} + (\frac{n\beta}{N-n})^۲\frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}]\Big\}, \qquad (۲۵.۲)$$

است و مقدار بهینه‌ی β از رابطه زیر محاسبه می‌شود که به ازای آن میانگین مربع خطای $\bar{y}_D$ دارای کمترین مقدار ممکن است.

$$\beta^* = (\frac{N-n}{n})\frac{\rho_{XY}C_XC_Y}{C_X^۲ + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}}. \qquad (۲۶.۲)$$

۳ برآوردگر پیشنهاد شده

سینگ و همکارانش یک برآوردگر نمایی نسبتی - حاصل ضربی برای برآورد میانگین جامعه‌ی متناهی را به صورت

$$t = \bar{y}\Big[\alpha\exp\big(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\big) + (۱-\alpha)\exp\big(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\big)\Big], \qquad (۱.۳)$$

پیشنهاد کردند.
در این بخش با الهام‌گیری از برآوردکننده (۱.۳) یک برآوردگر نمایی نسبتی- حاصلضربی جدید را برای میانگین جامعه‌ی متغیر مورد مطالعه، $(\bar{Y})$ ، با وجود خطای اندازه‌گیری، به صورت

$$t_p = \bar{y}\Big[\alpha\exp\big(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\big) + (۱-\alpha)\exp\big(\frac{\bar{x}'-\bar{X}}{\bar{x}'+\bar{X}}\big)\Big], \qquad (۲.۳)$$

تعریف می‌کنیم، به طوری که α یک عدد ثابت مناسب است.

قضیه ۱.۳. با فرض

$$\alpha_۰ = \{\alpha\big(۱-\frac{n}{N-n}\big) + \frac{n}{N-n}\}, \qquad (۳.۳)$$

برآوردگر پیشنهاد شده

$$t = \bar{y}\Big[\alpha\exp\big(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}\big) + (۱-\alpha)\exp\big(\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{x}+\bar{X}}\big)\Big],$$

دارای ویژگی‌های زیر است:

الف. مقدار اریبی t_p برابر است با

$$B(t_p) = -\frac{\bar{Y}}{۲n}\alpha_{۰}\rho_{XY}C_YC_X + \frac{\bar{Y}\bar{X}}{۸n}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^{۲}+۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^{۲}\Big\}(C_X^{۲}+\frac{S_V^{۲}}{\bar{X}^{۲}}). \tag{۴.۳}$$

ب. میانگین مربع خطای t_p برابر است با:

$$MSE(t_p) = \frac{\bar{Y}^{۲}}{n}\Big\{(C_Y^{۲}+\frac{۱}{۴}\alpha_{۰}^{۲}C_X^{۲} - \alpha_{۰}\rho_{XY}C_YC_X) + [\frac{S_U^{۲}}{\bar{Y}^{۲}} + \frac{۱}{۴}\alpha_{۰}^{۲}\frac{S_V^{۲}}{\bar{X}^{۲}}]\Big\}. \tag{۵.۳}$$

ج. بهترین مقدار $\alpha_{۰}^{*}$ برابر است با:

$$\alpha_{۰}^{*} = \frac{۲\rho_{XY}C_YC_X}{(\frac{S_X^{۲}+S_V^{۲}}{\bar{X}^{۲}})}. \tag{۶.۳}$$

اثبات. الف. با جایگذاری (۲۳.۲) در (۲.۳) برآوردگر پیشنهاد شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} t_p &= \bar{y}\Big[\alpha\exp(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}) + (۱-\alpha)\exp(\frac{\frac{NX-n\bar{x}}{N-n}-\bar{X}}{\frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n}+\bar{X}})\Big] \\ &= \bar{y}\Big[\alpha\exp(\frac{\bar{X}-\bar{x}}{\bar{X}+\bar{x}}) + (۱-\alpha)\exp(\frac{-n(\bar{x}-\bar{X})}{(۲N-n)\bar{X}-n\bar{x}})\Big]. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

اینک با جایگذاری (۱۲.۲) در (۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} t_p &= (\bar{Y}+\phi_Y)\Big[\alpha\exp(\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}+\phi_X}) + (۱-\alpha)\exp(\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}-n\phi_X})\Big] \\ &= (\bar{Y}+\phi_Y)\Big[\alpha\exp\Big((\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}})\frac{۱}{۱+\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}}\Big) + (۱-\alpha)\exp\Big((\frac{-n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})\frac{۱}{۱-\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

با بسط دادن $\exp(.)$ و در نظر گرفتن جمله‌ها تا مرتبه دوم داریم:

$$\begin{aligned} t_p =&(\bar{Y}+\phi_Y)\Big[\alpha\Big\{۱+\Big((\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}})\frac{۱}{۱+\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}}\Big) + \frac{۱}{۲}\Big((\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}})\frac{۱}{۱+\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}}\Big)^{۲}\Big\} \\ &+(۱-\alpha)\Big\{۱+\Big((\frac{-n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})\frac{۱}{۱-\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}}\Big) + \frac{۱}{۲}\Big((\frac{-n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})\frac{۱}{۱-\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}}\Big)^{۲}\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

با فرض $|\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}| < ۱$ و $|\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}| < ۱$ می‌توان عبارت‌های $(\frac{۱}{۱+\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}})$ و $(\frac{۱}{۱-\frac{\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}})$ را بسط داد. لذا با در نظر گرفتن جمله‌ها تا مرتبه‌ی اول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_p \cong&(\bar{Y}+\phi_Y)\Big[\alpha\Big\{۱+\Big((\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}})\{۱-\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}\}\Big) + \frac{۱}{۲}\Big((\frac{-\phi_X}{۲\bar{X}})\{۱-\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}\}\Big)^{۲}\Big\} \\ &+(۱-\alpha)\Big\{۱+\Big((\frac{-n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})\{۱+\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}\}\Big) + \frac{۱}{۲}\Big((\frac{-n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})\{۱+\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}}\}\Big)^{۲}\Big\}\Big] \\ =&(\bar{Y}+\phi_Y)\Big[\alpha\Big\{۱-\frac{\phi_X}{۲\bar{X}}+\frac{۳}{۲}(\frac{\phi_X}{۲\bar{X}})^{۲}\Big\} + (۱-\alpha)\Big\{۱-\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}} - \frac{۱}{۲}(\frac{n\phi_X}{۲(N-n)\bar{X}})^{۲}\Big\}\Big] \\ =&(\bar{Y}+\phi_Y)\Big[۱-\Big\{\alpha+(۱-\alpha)(\frac{n}{N-n})\Big\}\frac{۱}{۲\bar{X}}\phi_X + \Big\{۳\alpha+(۱-\alpha)(\frac{n}{N-n})^{۲}\Big\}\frac{۱}{۸\bar{X}^{۲}}\phi_X^{۲}\Big]. \end{aligned}$$

اکنون با نادیده گرفتن جملات با مرتبه‌های بالاتر از دو، می‌توان نوشت:

$$t_p \cong \bar{Y} + \phi_Y - \frac{۱}{۲}\Big\{\alpha(۱ - \frac{n}{N-n}) + \frac{n}{N-n}\Big\}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\phi_X \\ - \frac{۱}{۲\bar{X}}\Big\{\alpha(۱ - \frac{n}{N-n}) + \frac{n}{N-n}\Big\}\phi_Y\phi_X \\ + \frac{۱}{۸}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^۲ + ۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^۲\Big\}\phi_X^۲.$$

بنابه تعریف $\alpha_\circ$ در (۳.۳) داریم:

$$t_p \cong \bar{Y} + \phi_Y - \frac{۱}{۲}\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\phi_X - \frac{۱}{۲\bar{X}}\alpha_\circ\phi_Y\phi_X \\ + \frac{۱}{۸}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^۲ + ۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^۲\Big\}\phi_X^۲. \tag{۸.۳}$$

بنابراین:

$$t_p - \bar{Y} \cong \phi_Y - \frac{۱}{۲}\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\phi_X - \frac{۱}{۲\bar{X}}\alpha_\circ\phi_Y\phi_X \\ + \frac{۱}{۸}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^۲ + ۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^۲\Big\}\phi_X^۲. \tag{۹.۳}$$

اگر از طرفین رابطه (۱۰.۳) امید ریاضی بگیریم، از (۱۳.۲) و (۱۴.۲) مقدار اریبی برآوردگر پیشنهاد شده t_p عبارت است از:

$$B(t_p) = E(t_p - \bar{Y}) \cong -\frac{۱}{۲\bar{X}}\alpha_\circ E(\phi_Y\phi_X) \\ + \frac{۱}{۸}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^۲ + ۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^۲\Big\}E(\phi_X^۲) \\ = -\frac{\bar{Y}}{۲n}\alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X + \frac{\bar{Y}\bar{X}}{۸n}\Big\{\alpha\Big[(\frac{n}{N-n})^۲ + ۳\Big] - (\frac{n}{N-n})^۲\Big\}(C_X^۲ + \frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}). \tag{۱۰.۳}$$

ب. از مجذور کردن دو طرف (۱۰.۳) و محاسبه‌ی امید ریاضی آن، با استفاده از (۱۴.۲) و نادیده گرفتن جملات با مرتبه‌های بالاتر از دو، داریم:

$$MSE(t_p) = E(t_p - \bar{Y})^۲ = E[\phi_Y^۲ + \frac{۱}{۴}\alpha_\circ^۲\frac{\bar{Y}^۲}{\bar{X}^۲}\phi_X^۲ - \alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\phi_Y\phi_X] \\ = E(\phi_Y^۲) + \alpha_\circ^۲\frac{\bar{Y}^۲}{\bar{X}^۲}E(\phi_X^۲) + ۲\alpha_\circ\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}E(\phi_Y\phi_X) \\ = \frac{\bar{Y}^۲}{n}\Big\{(C_Y^۲ + \frac{۱}{۴}\alpha_\circ^۲C_X^۲ - \alpha_\circ\rho_{XY}C_YC_X) + [\frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲} + \frac{۱}{۴}\alpha_\circ^۲\frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}]\Big\}.$$

ج. با مشتق‌گیری از (۵.۳) نسبت به $\alpha_\circ$ و برابر صفر قرار دادن عبارت حاصل، مقدار بهینه‌ی $\alpha_\circ$ برابر است با:

$$\alpha_\circ^* = \frac{۲\rho_{XY}C_YC_X}{(\frac{S_X^۲+S_V^۲}{\bar{X}^۲})}.$$

از جایگذاری (۶.۳) در (۵.۳) ، مینیمم مقدار میانگین مربع خطای t_p برابر است با:

$$\min MSE(t_p) = \frac{\bar{Y}^۲}{n}\Big\{(C_Y^۲ + \frac{۱}{۴}\alpha_\circ^{*۲}C_X^۲ - \alpha_\circ^*\rho_{XY}C_YC_X) + [\frac{S_U^۲}{\bar{Y}^۲} + \frac{۱}{۴}\alpha_\circ^{*۲}\frac{S_V^۲}{\bar{X}^۲}]\Big\}. \tag{۱۱.۳}$$

□

۴ مقایسه کارایی برآوردگر پیشنهاد شده با دیگر برآوردگرها

در این بخش برآوردگر پیشنهاد شده را با دیگر برآوردگرهای مذکور، زمانی که مشاهدات دارای خطای اندازه‌گیری هستند، مقایسه می‌کنیم.

۱. برآوردگر پیشنهاد شده از میانگین نمونه‌ای متداول کاراتر است اگر

$$Var(\bar{y}) - MSE(t_p) > 0. \tag{۱.۴}$$

بنابراین از (۱۱.۲) و (۵.۳) داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}(C_Y^2 + \frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}) - \frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_0^2 C_X^2 - \alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X) + [\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_0^2 \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}]\Big\} > 0. \tag{۲.۴}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{4n}\Big\{4\alpha_0^2(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - \alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X\Big\} < 0. \tag{۳.۴}$$

این رابطه صحیح است اگر:

$$\alpha_0^2(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - 4\alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X < 0. \tag{۴.۴}$$

بنابراین t_p از $\bar{y}$ کاراتر است اگر:

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{4}\alpha_0 \frac{C_X}{C_Y}(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{4}\alpha_0 \frac{C_X}{C_Y}(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0, \end{cases} \tag{۵.۴}$$

به ویژه هنگامی که C_X و C_Y دارای مقادیر یکسان باشند، شرایط (۵.۴) به شرایط زیر تقلیل میابد:

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{4}\alpha_0(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{4}\alpha_0(1 + \frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0. \end{cases} \tag{۶.۴}$$

۲. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر شالب کاراتر است اگر :

$$MSE(t_R) - MSE(t_p) > 0. \tag{۷.۴}$$

با استفاده از (۱۷.۲) و (۵.۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{(C_Y^2 + C_X^2 - 2\rho_{XY} C_Y C_X) + [\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}]\Big\} - \frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{(C_Y^2 + \frac{1}{4}\alpha_0^2 C_X^2 - \alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X) + [\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2} + \frac{1}{4}\alpha_0^2 \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}]\Big\} > 0. \tag{۸.۴}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{(1 - \frac{1}{4}\alpha_0^2)(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - 2(1 - \frac{1}{2}\alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X)\Big\} > 0. \tag{۹.۴}$$

این رابطه صحیح است اگر :

$$(1 - \frac{1}{4}\alpha_0^2)(C_X^2 + \frac{S_V^2}{\bar{X}^2}) - 2(1 - \frac{1}{2}\alpha_0 \rho_{XY} C_Y C_X) > 0. \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین t_p از t_R کاراتر است اگر:

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0. \end{cases} \tag{۱۱.۴}$$

به ویژه در حالتی که C_X و C_Y دارای مقادیر یکسان باشند، شرایط (۱۱.۴) به شرایط زیر تقلیل می‌یابد،

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0. \end{cases} \tag{۱۲.۴}$$

۳. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر مانیشا و سینگ کاراتر است اگر

$$MSE(\bar{y}_\theta) - MSE(t_p) > 0. \tag{۱۳.۴}$$

روابط (۲۰.۲) و (۵.۳) را در نظر بگیرید خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big(C_Y^2+\theta^2C_X^2-2\theta\rho_{XY}C_YC_X\big)+\big[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\theta^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big]\Big\}- \\ \frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big(C_Y^2+\frac{1}{4}\alpha_0^2C_X^2-\alpha_0\rho_{XY}C_YC_X\big)+\big[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\frac{1}{4}\alpha_0^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big]\Big\} > 0. \tag{۱۴.۴}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big(\theta^2-\frac{1}{4}\alpha_0^2\big)\big(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big)-2\big(\theta-\frac{1}{2}\alpha_0\big)\rho_{XY}C_YC_X\Big\} > 0. \tag{۱۵.۴}$$

این رابطه صحیح است اگر:

$$\big(\theta^2-\frac{1}{4}\alpha_0^2\big)\big(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big)-2\big(\theta-\frac{1}{2}\alpha_0\big)\rho_{XY}C_YC_X\big) > 0. \tag{۱۶.۴}$$

فرض کنید $\alpha_0 < 2\theta$ ، در این صورت برآوردگر t_p از $\bar{y}_\theta$ کاراتر است اگر:

$$\begin{cases} \rho_{XY} < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} > -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0. \end{cases} \tag{۱۷.۴}$$

و با این فرض که $\alpha_0 > 2\theta$ ، برآوردگر t_p از $\bar{y}_\theta$ کاراتر است اگر:

$$\begin{cases} \rho_{XY} > \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} > 0 \\ \rho_{XY} < -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}) & ; \quad \bar{X}\bar{Y} < 0. \end{cases} \tag{۱۸.۴}$$

۴. برآوردگر پیشنهاد شده از برآوردگر دیواکار شوکلا و همکارانش کاراتر است اگر

$$MSE(\bar{y}_D) - MSE(t_p) > 0. \tag{۱۹.۴}$$

با استفاده از روابط (۲۵.۲) و (۵.۳) داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big(C_Y^2+\big(\frac{n\beta}{N-n}\big)^2C_X^2-2\frac{n\beta}{N-n}\rho_{XY}C_YC_X\big)+\big[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\big(\frac{n\beta}{N-n}\big)^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big]\Big\}- \\ \frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big(C_Y^2+\frac{1}{4}\alpha_0^2C_X^2-\alpha_0\rho_{XY}C_YC_X\big)+\big[\frac{S_U^2}{\bar{Y}^2}+\frac{1}{4}\alpha_0^2\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big]\Big\} > 0. \tag{۲۰.۴}$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\frac{\bar{Y}^2}{n}\Big\{\big((\frac{n\beta}{N-n})^2-\frac{1}{4}\alpha_0^2\big)\big(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big)-2\big(\frac{n\beta}{N-n}-\frac{1}{2}\alpha_0\big)\rho_{XY}C_YC_X\Big\}>0. \quad (۲۱.۴)$$

این رابطه صحیح است اگر:

$$\big((\frac{n\beta}{N-n})^2-\frac{1}{4}\alpha_0^2\big)\big(C_X^2+\frac{S_V^2}{\bar{X}^2}\big)-2\big(\frac{n\beta}{N-n}-\frac{1}{2}\alpha_0\big)\rho_{XY}C_YC_X>0. \quad (۲۲.۴)$$

بنابراین با فرض $\frac{2n\beta}{N-n}>\alpha_0$ ، برآوردگر t_p از $\bar{y}_D$ کاراتر است اگر:

$$\begin{cases}\rho_{XY}<\frac{1}{2}(\frac{n\beta}{N-n}+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}\big(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\big) & ; \quad \bar{X}\bar{Y}>0\\ \rho_{XY}<-\frac{1}{2}(\frac{n\beta}{N-n}+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}\big(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\big) & ; \quad \bar{X}\bar{Y}<0.\end{cases} \quad (۲۳.۴)$$

و با فرض $\frac{2n\beta}{N-n}<\alpha_0$ ، برآوردگر t_p از $\bar{y}_D$ کاراتر است اگر:

$$\begin{cases}\rho_{XY}>\frac{1}{2}(\frac{n\beta}{N-n}+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}\big(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\big) & ; \quad \bar{X}\bar{Y}>0\\ \rho_{XY}<-\frac{1}{2}(\frac{n\beta}{N-n}+\frac{1}{2}\alpha_0)\frac{C_X}{C_Y}\big(1+\frac{S_V^2}{S_X^2}\big) & ; \quad \bar{X}\bar{Y}<0.\end{cases} \quad (۲۴.۴)$$

۵ مقایسه عددی و شبیه سازی

در این بخش به بررسی نتایج شبیه‌سازی برآورد پارامترها در حالات مختلف پرداخته می‌شود. برای مقایسه تجربی و عددی برآوردگر پیشنهاد شده t_p^* (برآوردگر پیشنهاد شده به ازای α_0^*) با برآوردگر میانگین نمونه‌ای متداول $\bar{y}$ (برآوردگر نسبتی شالب (t_R)) ، برآوردگر مانیشا و سینگ $(\bar{y}_\theta)$ و برآوردگر دیواکار شوکلا $(\bar{y}_D)$ یک جامعه‌ی فرضی و شبیه سازی شده را در نظر می‌گیریم. برای مقایسه برآوردگر پیشنهاد شده، MSE و PRE برآوردگرها محاسبه شده است. شش جامعه شبیه سازی شده‌اند به طوری که ضریب همبستگی آنها پایین، بالا، مثبت و منفی است. فرض شده است که حجم هر جامعه ۵۰۰۰ و حجم نمونه ۵۰۰ می‌باشد. متغیرکمکی واقعی مربوط به جامعه‌ی $X\sim N(10,2)$ و متغیر کمکی اندازه‌گیری شده، $x=X+N(10,2)$ فرض شده است، پس $V=x-X$. متغیر مورد مطالعه با مدل خطی $Y=2+bx+N(0,1)$ شبیه سازی شده است.

برای کنترل همبستگی بین متغیر مورد مطالعه و متغیر کمکی، مقدار b تغییر کرده است. مقادیر مفروض b عبارتند از: ۰/۱، ۰/۳، ۰/۵، ۰/۱-، ۰/۳-، ۰/۵- . همانند متغیر کمکی، متغیر مورد مطالعه اندازه‌گیری شده با $y=Y+N(0,1)$ تعمیم داده شده است، لذا $U=y-Y$.

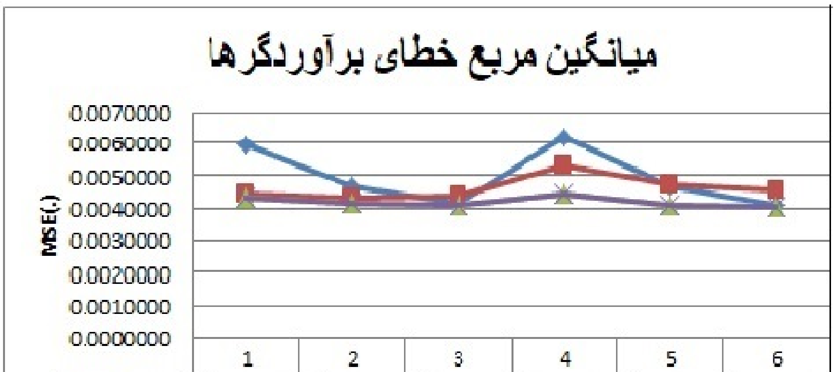
پارامترهای جامعه در جدول ۱ خلاصه شده است. در جدول ۲، میانگین مربع خطای MSE برآوردگر پیشنهاد شده و چهار برآوردگر دیگر محاسبه شده‌اند. جدول ۳، درصد کارایی نسبی PRE برآوردگر شالب، برآوردگر مانیشا و سینگ، برآوردگر دیواکار شوکلا و برآوردگر پیشنهاد شده نسبت به برآوردگر نااریب را در بر می‌گیرد.

۶ بحث و نتیجه گیری

با توجه به نمودارهای میانگین مربع خطا (MSE) و در صد کارایی نسبی (PRE) برآوردگرها، می‌توان به این نتیجه رسید که برآوردکننده پیشنهادی (t_p) نسبت به برآوردکننده‌های (t_R) و $(\bar{y}_D)$ از کارایی بهتری برخوردار است. لازم به ذکر است، کارایی برآوردکننده پیشنهادی تقریبا برابر برآوردکننده پیشنهادی مانیشا و سینگ $(\bar{y}_\theta)$ است. با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌گردد که برآوردکننده $(\bar{y}_\theta)$ در بین برآوردکننده‌ها از کارایی بسیار کمتری برخوردار است. لذا برای بهتر مقایسه کردن سایر برآوردکننده‌ها با برآوردگر پیشنهادی در نمودار ۲ به مقایسه کارایی در مورد سه برآوردکننده $(\bar{y}_\theta)$ ، (t_p) و (t_R) می‌پردازیم و ملاحظه می‌گردد برآوردگر پیشنهادی از برآوردکننده (t_R) کاراتر می‌باشد. در نمودار ۵ به بحث در مورد در صد کارایی نسبی (PRE) برآورد کننده‌ها می‌پردازیم ملاحظه می‌شود این نمودار نیز تایید کننده کارایی برآوردگر پیشنهادی می‌باشد. در نمودار های ۳، ۴ و ۶ نتایج برآوردگرها به طور مجزا برای (MSE) و (PRE) بررسی و مقایسه شده‌اند و نتایج بالا مجددا تایید شده‌اند.

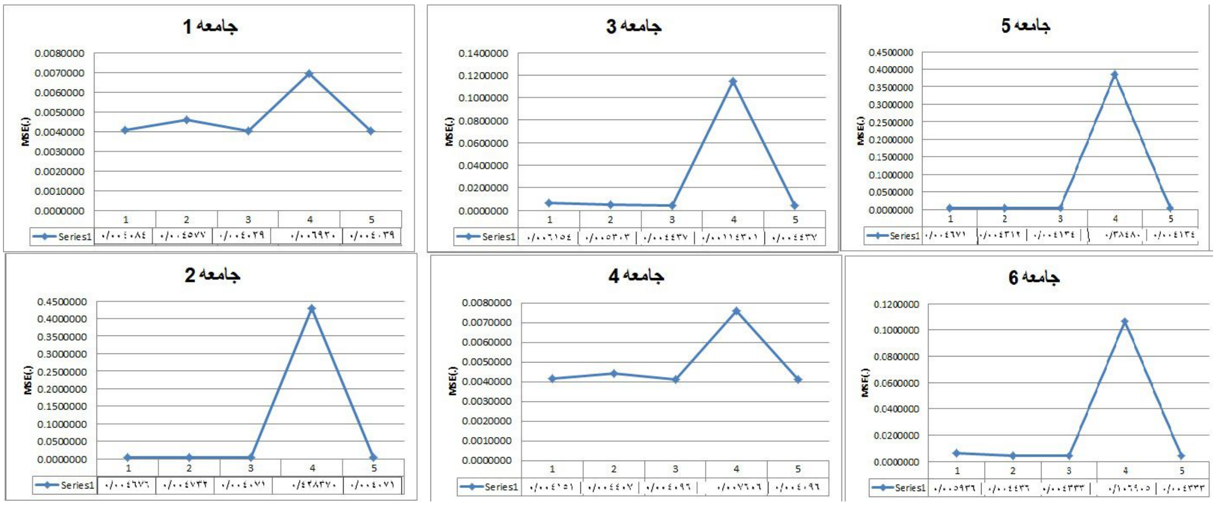
	1	2	3	4	5	6
$MSE(\bar{y})$	۰/۰۰۵۹۳۶	۰/۰۰۴۶۷۱	۰/۰۰۴۱۵۱	۰/۰۰۶۱۵۴	۰/۰۰۴۶۷۶	۰/۰۰۴۰۸۴
$MSE(t_R)$	۰/۰۰۴۴۳۶	۰/۰۰۴۳۱۲	۰/۰۰۴۴۰۷	۰/۰۰۵۳۰۳	۰/۰۰۴۷۳۳	۰/۰۰۴۵۷۷
$MSE(\bar{y}_0)$	۰/۰۰۴۳۳۳	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۰۳۹
$MSE(\bar{y}_D)$	۰/۱۰۶۹۰۵	۰/۰۳۸۴۸۵	۰/۰۰۷۶۰۶	۰/۱۱۴۳۰۱	۰/۰۴۲۸۳۷	۰/۰۰۶۹۳۰
$MSE(t_P)$	۰/۰۰۴۳۳۳	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۰۳۹

نمودار ۱. میانگین مربع خطای برآوردگرها با ۵ برآوردگر

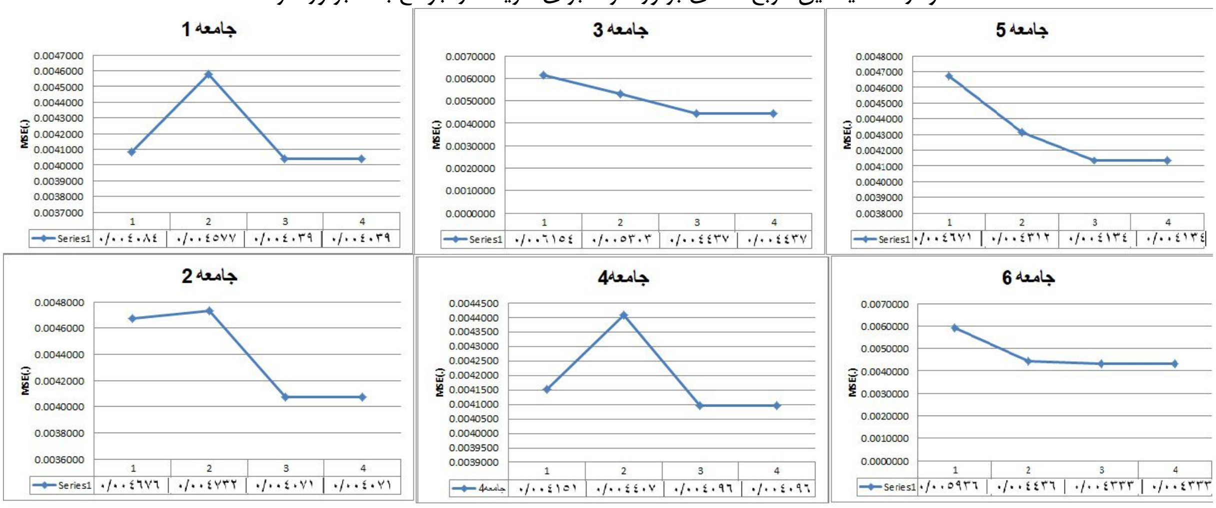


	1	2	3	4	5	6
$MSE(\bar{y})$	۰/۰۰۵۹۳۶	۰/۰۰۴۶۷۱	۰/۰۰۴۱۵۱	۰/۰۰۶۱۵۴	۰/۰۰۴۶۷۶	۰/۰۰۴۰۸۴
$MSE(t_R)$	۰/۰۰۴۴۳۶	۰/۰۰۴۳۱۲	۰/۰۰۴۴۰۷	۰/۰۰۵۳۰۲	۰/۰۰۴۷۲۳	۰/۰۰۴۵۷۷
$MSE(\bar{y}_0)$	۰/۰۰۴۳۳۳	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۰۳۹
$MSE(t_P)$	۰/۰۰۴۳۳۳	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۰۳۹

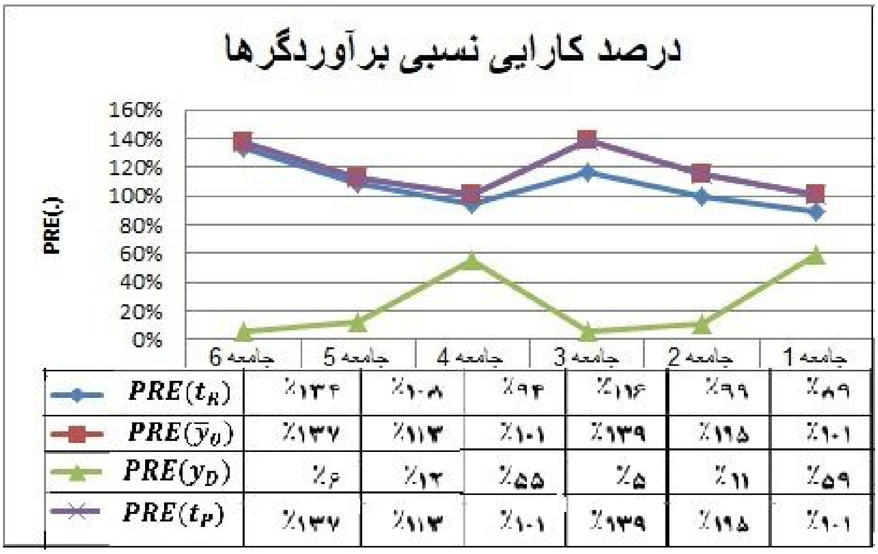
نمودار ۲. میانگین مربع خطای برآوردگرها با ۴ برآوردگر



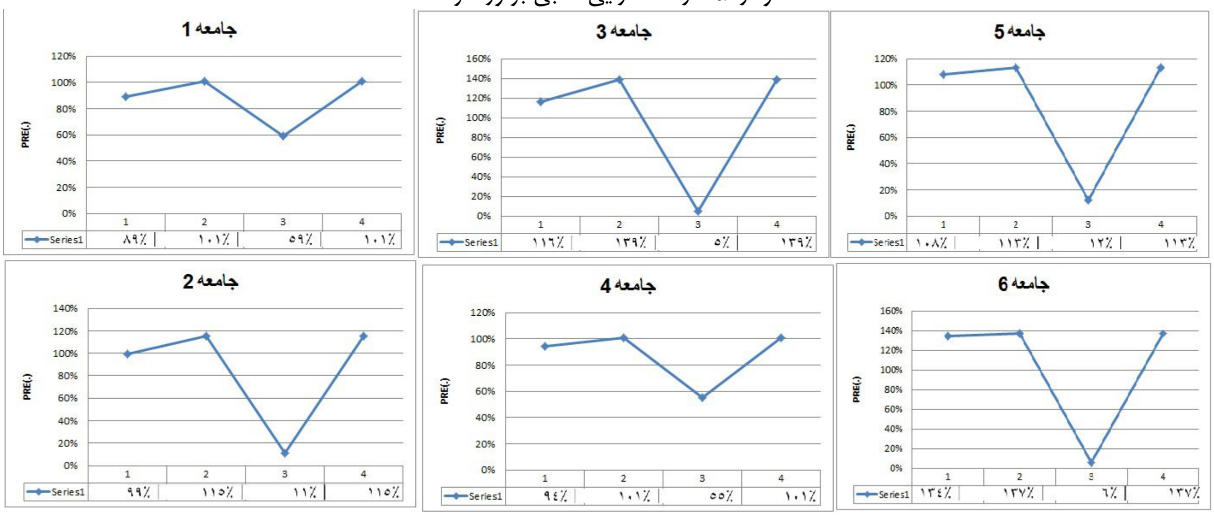
نمودار ۳. میانگین مربع خطای برآوردگرها برای هریک از جوامع با ۵ برآوردگر



نمودار ۴. میانگین مربع خطای برآوردگرها برای هریک از جوامع با ۴ برآوردگر



نمودار ۵. درصد کارایی نسبی برآوردگرها



نمودار ۶. درصد کارایی نسبی برای هریک از جوامع

.

جدول ۱: پارامترهای جامعه

پارامتر	جامعه ۱	جامعه۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$\bar{X}$	۳/۰۰۶۱۷۱۳	۵/۰۱۱۱۷۵	۶/۹۷۸۸۳۸	۱/۰۰۷۳۹۱	−۰/۹۷۲۸	−۲/۹۵۵۶۵
$\bar{Y}$	۱۰/۰۶۶۶۸	۱۰/۰۱۲۴۳	۹/۹۸۱۷۱۶	۹/۹۵۳۷۲۲	۹/۹۵۰۷۶۴	۹/۹۴۷۱۱۴
$S_Y^۲$	۱/۰۵۷۳۲۲	۱/۳۸۴۶۳۵	۲/۰۸۶۰۲۴	۱/۰۳۱۰۷۸	۱/۳۳۱۷۳۶	۱/۹۶۸۲۷۷
$S_X^۲$	۴/۰۲۱۱۵	۴/۰۶۵۱۸۷	۴/۱۶۰۳۳۲	۴/۰۶۲۹۶۹	۴/۰۶۷۲۵	۴/۰۲۹۰۱۱
$S_U^۲$	۰/۹۸۴۷۲۹	۰/۹۵۳۵۷۳	۰/۹۹۰۷۶۷	۱/۰۴۴۵۸۴	۱/۰۰۳۷۱۴	۰/۹۹۹۶۶۷
$S_V^۲$	۰/۹۹۲۰۹۴	۰/۹۹۱۹۹۹	۰/۹۷۷۴۸۶	۱/۰۴۰۳۳۱	۱/۰۱۲۲۷۱	۱/۰۳۸۵۲۱
ρ_{XY}	۰/۱۶۳۲۰۴	۰/۵۲۱۶۳۵	۰/۷۱۲۸۳۴	−۰/۱۸۲۷۵	−۰/۵۰۱۷۵	−۰/۷۱۵۵۹

جدول ۲: میانگین مربع خطای برآوردگرها با وجود خطای اندازه‌گیری

MSE(t)	جامعه ۱	جامعه۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$MSE(\bar{y})$	۰/۰۰۴۰۸۴	۰/۰۰۴۶۷۶	۰/۰۰۶۱۵۴	۰/۰۰۴۱۵۱	۰/۰۰۴۶۷۱	۰/۰۰۵۹۳۶
$MSE(t_R)$	۰/۰۰۴۵۷۷	۰/۰۰۴۷۳۲	۰/۰۰۵۳۰۳	۰/۰۰۴۴۰۷	۰/۰۰۴۳۱۲	۰/۰۰۴۴۳۶
$MSE(\bar{y}_\theta)$	۰/۰۰۴۰۳۹	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۳۳۳
$MSE(\bar{y}_D)$	۰/۰۰۶۹۳۰	۰/۰۴۲۸۳۷	۰/۱۱۴۳۰۱	۰/۰۰۷۶۰۶	۰/۰۳۸۴۸۵	۰/۱۰۶۹۰۵
$MSE(t_p)$	۰/۰۰۴۰۳۹	۰/۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۴۴۳۷	۰/۰۰۴۰۹۶	۰/۰۰۴۱۳۴	۰/۰۰۴۳۳۳

جدول ۳: درصد کارایی نسبی برآوردگرها با وجود خطای اندازه‌گیری

PRE(.)	جامعه ۱	جامعه۲	جامعه ۳	جامعه ۴	جامعه ۵	جامعه ۶
$PRE(t_R)$	٪۸۹	٪۹۹	٪۱۱۶	٪۹۴	٪۱۰۸	٪۱۳۴
$PRE(\bar{y}_\theta)$	٪۱۰۱	٪۱۱۵	٪۱۳۹	٪۱۰۱	٪۱۱۳	٪۱۳۷
$PRE(\bar{y}_D)$	٪۵۹	٪۱۱	٪۵	٪۵۵	٪۱۲	٪۶
$PRE(t_p)$	٪۱۰۱	٪۱۱۵	٪۱۳۹	٪۱۰۱	٪۱۱۳	٪۱۳۷

فهرست منابع

[1] Ahmeda M.S., Titib O.A., Rawib Z.A., Estimation of finite population variance in presence of random non-response using auxiliary variables. Infr Mang Sci. 16(2) (2005) 73–82.

[2] Bhushan S., Pandey A. P., Optimal estimation of population variance in the presence of random non-response using simulation approach, Journal of Statistical Computation and Simulation. 91(18) (2021) 3814–3827.

[3] Cebrian A.A., Garcia M.R., Variance estimation using auxiliary information: an almost unbiased multivariate ratio estimator. Metrika. 45 (1997) 171–178.

[4] Cochran W. G., Errors of measurement in statistics.Techno metrics. 10(4) (1968) 637-666.

[5] Fuller W. A., Measurement Error Models. Wiley, New York, (1987).

[6] Kumar M., Singh R., Singh A.K., Smarandache F., Some ratio type estimators under measurement errors. World Applid Sciences Journal, 14(2) (2011) 272-276.

[7] Shalabh, Ratio method of estimation in the presence of measurement errors. Journal of Indian Society of Agricultural Statistics, 50(2) (1997) 150–155.

[8] Shukla D., Pathak S., Thakur N.S., An estimator for mean estimation in presence of measurement error. Research and Reviews: A Journal of Statistics,1(1) (2012) 1–8.

[9] Singh R. M., An estimation of population mean in the presence of measurement errors. Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics 54(1) (2001)13–18.

[10] Singh H., Karpe N., Estimation of mean, ratio and product using auxiliary information in the presence of measurement errors in sample surveys. Journal of Statistical Theory and Practice 4 (2010) 111–136.

[11] Singh R., Chauhan P., Sawan N., On linear combination of ratio and product type exponential estimator for estimating the finite population mean, Statistics in Transition - New Series, 9 (2008) 105–115.

[12] Tailor R., Sharma B., Singh H., An improved procedure of estimating the finite populationmean using auxiliary information in the presence of randomnon-response, CommStats TheoMeth. 44 (2015) 1196-1209.

On Optimal Estimation of Population Mean

Leader Navaei[1, ا] **, Reza Akbari**[2]

(1) Department of Statistics, Payam Noor University (PNU), P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran.
(2) Department of Mathematical Sciences, Payam Noor University(PNU), P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran.

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 2022/1/6 Accepted: 2022/3/11

Abstract: In this paper, estimating the mean problem of the population when the sampling data have measurement errors has been studied via a new efficient estimator. To investigation of the properties of bias and mean square error of the proposed estimators presented were derived up to the secound order approximation using the Taylor series approach. We also investigate the efficiency of this estimator compared to other available estimators. And finally, we use these results for real data. We show that the proposed estimator is more efficient than other existing estimators.

Keywords: Biase, Measurement error, Mean square error, Estimator, Relative efficincy percentage.

[ا]Corresponding author.
E-mail addresses: l.navaei@pnu.ac.ir (F. Author), r.akbari@pnu.ac.ir, (Auhtor).