مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۱۶۸-۱۷۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.39417.1987

گراف ناجابه‌جایی عمل‌گرهای خطی کران‌دار روی یک فضای هیلبرت

پاندورا رجاء ×

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۴

چکیده:
فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت مختلط و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر شامل تمام عمل‌گرهای خطی کران‌دار روی $\mathcal{H}$ باشد. گراف ناجابه‌جایی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ که آن را با نماد $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ نمایش می‌دهیم، گرافی ساده است که مجموعه رأس‌های آن عمل‌گرهای خطی کران‌دار غیر اسکالر روی $\mathcal{H}$ می‌باشد و دو راس متمایز A و B را به یکدیگر وصل می‌کنیم، اگر و فقط اگر $AB \neq BA$. در این مقاله، نشان می‌دهیم برای هر فضای هیلبرت مختلط، $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ گرافی همبند است. هم‌چنین ثابت می‌کنیم گراف‌های ناجابه‌جایی فضای شامل عمل‌گرهای با رتبه متناهی روی $\mathcal{H}$، فضای شامل عمل‌گرهای فشرده روی $\mathcal{H}$، فضای شامل عمل‌گرهای وارون‌ناپذیر روی $\mathcal{H}$ و فضای شامل عمل‌گرهای فردهُلم روی $\mathcal{H}$، گراف‌هایی همبند می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: گراف ناجابه‌جایی، فضای هیلبرت، عمل‌گر خطی، عمل‌گر فشرده، عمل‌گر فردهُلم

رده‌بندی ریاضی: 05C50; 15A27; 15A33; 16P10

۱ مقدمه

نسبت دادن یک گراف به یک ساختار جبری و بررسی همبندی آن گراف و زیرگراف‌های آن به‌کمک خواص ساختار جبری یکی از موضوعات تحقیقی جذاب و پرطرفدار اخیر است. مقاله‌های زیادی در این باب نوشته شده است که از میان آن‌ها می‌توان به مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵]، مراجعه کرد.

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی میدان اعداد مختلط و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر شامل تمام عمل‌گرهای خطی کران‌دار روی $\mathcal{H}$ باشد. برای هر $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، نماد AB را برای عمل‌گر AoB به‌کار می‌بریم. فرض کنیم $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. در این صورت، $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$، مجموعه شامل همه عمل‌گرهای B است که برای هر $A \in \mathcal{A}$، $AB = BA$ و هم‌چنین، $< \mathcal{A} >$، زیرفضای بسته تولیدشده توسط $\mathcal{A}$ می‌باشد. گراف ناجابه‌جایی $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، یک گراف ساده است که مجموعه راس‌های آن شامل تمام عمل‌گرهای کران‌دار

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: p_raja@sbu.ac.ir

غیر اسکالر، عمل‌گرهایی که مضرب اسکالری از عمل‌گر همانی نیستند، می‌باشد و دو راس متمایز A, B در این گراف به یکدیگر وصل می‌باشند اگر و تنها اگر $AB \neq BA$. یکی از مسایل مهمی که درباره این گراف وجود دارد، بررسی همبندی یا ناهمبندی این گراف و زیرگراف‌های آن می‌باشد. در یک گراف ساده، منظور از یک مسیر دنباله‌ای از راس‌های متمایز مانند:

$$v_۱ — v_۲ — \cdots — v_k$$

است، به‌طوری که هر دو راس متوالی به یکدیگر متصل می‌باشند. هم‌چنین، گراف ساده G را یک گراف همبند نامیم، هر گاه بین هر دو راس متمایز آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. مجموعه شامل تمام ماتریس‌های $n \times n$ را که درایه‌های آن‌ها از اعداد مختلط انتخاب می شوند، با نماد $M_n(\mathbb{C})$ نمایش داده و برای هر i, j، $۱ \leqslant i, j \leqslant n$، منظور از E_{ij}، عضوی در $M_n(\mathbb{C})$ است که درایه (i, j) ام آن برابر ۱ و سایر درایه‌های آن برابر با صفر می‌باشند. یک عمل‌گر خطی کران‌دار را عمل‌گری با بعد متناهی نامیم، هرگاه برد آن فضایی با بعد متناهی باشد و عمل‌گر $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را یک عمل‌گر فشرده نامیم، هرگاه تصویر هر مجموعه کران‌دار تحت C، مجموعه ای فشرده نسبی باشد. عمل‌گر خطی کران‌دار F، فردهُلم نامیده می‌شود، هر گاه در خواص زیر صدق کند:

$i)$ $ker(T)$ فضایی با بعد متناهی باشد.

$ii)$ $Ran(T)$ مجموعه ای بسته باشد.

$iii)$ $Coker(T)$ فضایی با بعد متناهی است.

فرض کنیم $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو زیرفضای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. نماد $< \mathcal{M}, \mathcal{N} >$ را برای زیرفضای بسته تولیدشده توسط $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ به‌کار می‌بریم. هم‌چنین جمع مستقیم این دو زیرفضا را با نماد $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ نمایش داده و آن را زیرفضایی از $\mathcal{H}$ تعریف می‌کنیم که عناصر آن به‌صورت یکتا به شکل $m + n$ می‌باشند که $m \in \mathcal{M}$ و $n \in \mathcal{N}$. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$، $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ و $B \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$، منظور از $A \oplus B$، عمل‌گری خطی در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است به‌طوری که برای هر $h = m + n$، $m \in \mathcal{M}$ و $n \in \mathcal{N}$، داریم $(A \oplus B)(m + n) = A(m) + B(n)$. برای هر i, j، δ_{ij} تابعی است که اگر $i = j$، آنگاه $\delta_{ij} = ۱$ و درغیر این صورت $\delta_{ij} = ۰$.

در این مقاله، همبندی گراف ناجابه‌جایی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، را که در آن $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر یا جدایی‌پذیر است، ثابت می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم گراف‌های جابه‌جایی مجموعه شامل عمل‌گرهای با بعد متناهی روی $\mathcal{H}$، مجموعه شامل تمام عمل‌گرهای فشرده روی $\mathcal{H}$، مجموعه شامل همه عمل‌گرهای وارون‌ناپذیر روی $\mathcal{H}$ و مجموعه شامل همه عمل‌گرهای فردهُلم روی $\mathcal{H}$، گراف‌هایی همبند می‌باشند.

۲ فضاهای هیلبرت جدایی‌پذیر

در این بخش، به اثبات همبندی گراف $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$، که در آن $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است، می پردازیم. قضیه زیر در مرجع [۱] ثابت شده است.

قضیه ۱.۲. [۱، قضیه ۳.۲] فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی جدایی‌پذیر روی مجموعه اعداد مختلط باشد. در این صورت عمل‌گر خطی کران‌دار $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ موجود است که برای هر $A \in \{T\}'$، $\{A\}' = \{T\}'$.

ملاحظه ۲.۲. طبق معادله $(۳.۲a)$ در اثبات لم ۳.۱ در مرجع [۱]، عمل‌گر T یک عمل‌گر وارون‌ناپذیر در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است.

ابتدا، به سراغ فضاهای با بعد نامتناهی می رویم.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی روی مجموعه اعداد مختلط باشد. در این صورت $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ یک گراف همبند است.

اثبات. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عمل‌گر غیر اسکالر دلخواه باشند و $AB = BA$. برای اثبات همبندی گراف، باید نشان دهیم که یک مسیر بین A و B در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ وجود دارد. طبق قضیه ۱.۲، عمل‌گر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ موجود است که اگر $AT = TA$، آنگاه برای هر $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ که $EA = AE$، داریم $ET = TE$. حالت های زیر را در نظر می گیریم:

i) اگر $AT = TA$ و $BT = TB$، آنگاه $AE \neq EA$ و $BE \neq EB$، هرگاه $ET \neq TE$. بنابراین، برای هر $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌طوری که $ET \neq TE$، مسیر

$$A — E — B$$

را در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ داریم.

ii) اگر $AT \neq TA$ و $BT \neq TB$، آنگاه مسیر

$$A — T — B$$

را در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ داریم.

iii) اگر $TA = AT$ و $BT \neq TB$، با انتخاب E مانند حالت (i)، مسیر

$$A — E — T — B$$

را در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ داریم.

بنابراین، گراف فوق همبند است و حکم ثابت می‌شود. □

حال، همبندی گراف $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ را در حالتی که $\mathcal{H}$ با بعد متناهی است، ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی روی مجموعه اعداد مختلط باشد. در این صورت $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ گرافی همبند است.

اثبات. از آنجا که $\mathcal{H}$ با بعد متناهی است، برای $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم $\Gamma(M_n(\mathbb{C}))$ گرافی همبند است. پس فرض کنیم $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ دو ماتریس غیراسکالر باشند که $AB = BA$. اگر $۱ \leq i, j \leq n$ و یک درایه ناصفر که روی قطر اصلی نیست در سطر iام یا ستون iام ماتریس A و یک درایه ناصفر که روی قطر اصلی نیست در سطر jام یا ستون jام ماتریس B موجود باشد، در این صورت $AE_{ii} \neq E_{ii}A$ و $BE_{jj} \neq E_{jj}B$ و در نتیجه مسیر

$$A — E_{ii} — E_{ij} — E_{jj} — B$$

را داریم و اثبات کامل می‌شود.

حال، فرض کنیم ماتریس‌های A و B ماتریس‌های قطری باشند. از آنجا که این دو ماتریس غیر اسکالر می‌باشند، اندیس‌های $۱ \leq i, j, i', j' \leq n$ موجودند که $i \neq j$، $i' \neq j'$، $a_{ii} \neq a_{jj}$ و $b_{i'i'} \neq b_{j'j'}$. بنابراین $AE_{ij} \neq E_{ij}A$ و $BE_{i'j'} \neq E_{i'j'}B$. اگر $i = i'$، آنگاه $E_{ii}E_{ij} \neq E_{ij}E_{ii}$ و $E_{ii}E_{i'j'} \neq E_{i'j'}E_{ii}$ و لذا مسیر

$$A — E_{ij} — E_{ii} — E_{i'j'} — B$$

را در $\Gamma(M_n(\mathbb{C}))$ داریم. اگر $j = j'$، به‌روش مشابه می‌توان مسیر مناسب را یافت. بنابراین می‌توان فرض کرد $i \neq i'$ و $j \neq j'$. در این حالت نیز مسیر

$$A — E_{ij} — E_{ii} — E_{ii'} — E_{i'i'} — E_{i'j'} — B$$

را داریم.

در آخر، فرض کنیم A یک ماتریس قطری و B یک ماتریس غیرقطری باشد. چون A یک ماتریس غیر اسکالر است، $۱ \leq i, j \leq n$ موجودند که $i \neq j$ و $a_{ii} \neq a_{jj}$. همچنین، فرض کنیم یک درایه ناصفر که روی قطر اصلی نیست در سطر j'ام یا ستون j'ام ماتریس B باشد. در این صورت، $i \neq j'$ یا $j \neq j'$. اگر $i \neq j'$، مسیر

$$A — E_{ij} — E_{ii} — E_{ij'} — E_{j'j'} — B$$

و اگر $j \neq j'$ و $i = j'$، مسیر

$$A — E_{j'j} — E_{j'j'} — B$$

را خواهیم داشت و اثبات کامل می‌شود. □

به‌کمک اثبات قضیه ۴.۲، نتیجه زیر به‌سادگی حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۲. فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۲$. در این صورت $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ یک گراف همبند است.

۳ فضاهای هیلبرت جدایی‌ناپذیر

در این بخش، همبندی گراف $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ را در حالتی که $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر است، ثابت می‌کنیم. در ابتدا به اثبات چند لم مفید می پردازیم.

لم ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ چنان باشد که برای هر عمل‌گر فشرده $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، داشته باشیم $AC = CA$. در این صورت، برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\lambda_x \in \mathbb{C}$ موجود است که $Ax = \lambda_x x$.

اثبات. اگر $x = 0$، چیزی برای اثبات نداریم. برای کامل کردن اثبات، به‌روش برهان خلف، فرض کنیم $0 \neq x \in \mathcal{H}$ موجود است که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، داریم، $Ax \neq \lambda x$. طبق قضیه [۶، قضیه ۵.۳]، تابعک خطی پیوسته Φ روی $< x, Ax >$ موجود است که $\Phi(x) = 1$ و $\Phi(Ax) = 0$. طبق قضیه هان–باناخ، توسیع $\tilde{\Phi}$ از Φ روی $\mathcal{H}$ موجود است. اگر برای هر $y \in \mathcal{H}$، قرار دهیم، $Ky = (\tilde{\Phi}y)x$، آنگاه K یک عمل‌گر فشرده است. همچنین

$$KAx = \tilde{\Phi}(Ax)x = 0,$$

$$AKx = \tilde{\Phi}(x)Ax = Ax$$

و لذا از فرض، نتیجه می‌شود $Ax = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $\lambda_x \in \mathbb{C}$، وجود دارد که $Ax = \lambda_x x$. □

لم ۲.۳. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ چنان باشد که برای هر عمل‌گر فشرده $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، داشته باشیم $AC = CA$. در این صورت، $\lambda \in \mathbb{C}$ موجود است که $A = \lambda I$.

اثبات. فرض کنیم $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ دو عضو مستقل خطی باشند. طبق لم ۱.۳، $\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2} \in \mathbb{C}$ موجودند که $Ax_1 = \lambda_{x_1}x_1$ و $Ax_2 = \lambda_{x_2}x_2$. حال، می دانیم، عمل‌گرهای خطی Φ_1 و Φ_2 روی $\mathcal{H}$ موجودند که برای $1 \leq k, j \leq 2$، داریم $\Phi_j(x_k) = \delta_{k,j}$. برای هر $x \in \mathcal{H}$، تعریف کنید:

$$Kx = \Phi_1(x)x_2 + \Phi_2(x)x_1.$$

در نتیجه، K یک عمل‌گر فشرده است، $Kx_1 = x_2$ و $Kx_2 = x_1$. بنابراین:

$$KAx_1 = K(\lambda_{x_1}x_1) = \lambda_{x_1}x_2,$$

$$AKx_1 = Ax_2 = \lambda_{x_2}x_2.$$

از فرض نتیجه می‌شود $\lambda_{x_1} = \lambda_{x_2}$ و اثبات کامل می‌شود. □

حال، آماده ایم تا قضیه اصلی این بخش را ثابت کنیم.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر روی مجموعه اعداد مختلط باشد. در این صورت، $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ گرافی همبند است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم، اگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ چنان باشد که برای هر $x \in \mathcal{H}$، داشته باشیم $Ax \in < x >$، آنگاه $\lambda \in \mathbb{C}$ موجود است که $A = \lambda I$.

برای اثبات این نکته، فرض کنیم $\{e_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. طبق فرض، برای هر $i \in \mathbb{I}$، $\lambda_i \in \mathbb{C}$ موجود است که $Ae_i = \lambda_i e_i$. اگر برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $\lambda_i = \lambda_j$، چیزی برای اثبات نداریم. بنابراین، می‌توان فرض کرد $j, k \in \mathbb{I}$ موجودند که $\lambda_j \neq \lambda_k$. حال، قرار دهید $x = e_j + e_k$. از آنجا که e_j, e_k مستقل خطی می‌باشند، داریم:

$$Ax = Ae_j + Ae_k = \lambda_j e_j + \lambda_k e_k \notin < x >,$$

که یک تناقض است. بنابراین، A یک عمل‌گر اسکالر است.

در ادامه، فرض کنیم $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ دو عمل‌گر غیر اسکالر باشند و $AB = BA$. در این صورت، B^* نیز یک عمل‌گر غیراسکالر خواهد بود و طبق آن‌چه ثابت شد، $x, y \in \mathcal{H}$ موجودند که $Ax \notin < x >$ و $B^*y \notin < y >$. عمل‌گر $x \otimes y$ را که به‌صورت:

$$(x \otimes y)(z) =< z, x > y, \quad z \in \mathcal{H},$$

تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که این عمل‌گر خطی، با هیچ‌کدام از عمل‌گرهای A و B جابه‌جا نمی‌شود. برای اثبات این ادعا، فرض کنیم عمل‌گر $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ چنان باشد که $S(x \otimes y) = (x \otimes y)S$ در این صورت:

$$x \otimes Sy = S^* x \otimes y,$$

که نتیجه می دهد $S^*(x) \in < x >$ و $Sy \in < y >$. چون هر یک از عمل‌گرهای A و B، حداقل در یکی از این شرایط صدق نمی‌کنند، ادعا ثابت می‌شود و لذا:

$$A \text{—} x \otimes y \text{—} B$$

یک مسیر در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ است. □

۴ فضاهای هیلبرت مختلط

در این بخش، همبندی گراف ناجابه‌جایی برخی زیرمجموعه های $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ را ثابت می‌کنیم. ابتدا قضیه مهم زیر را که نتیجه مستقیم از اثبات قضیه ۳.۳، است، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $A, B \in \mathcal{H}$ دو عمل‌گر غیر اسکالر باشند. در این صورت، عمل‌گر با رتبه یک $C \in \mathcal{H}$ موجود است که

$$A \text{—} C \text{—} B$$

یک مسیر در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ است.

اثبات. نتیجه مستقیم روند اثبات قضیه ۳.۳ است. □

قضیه ۲.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $\mathcal{F}$ زیرمجموعه تمام عمل‌گرهای با بعد متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، $\Gamma(\mathcal{F})$ گرافی همبند است.

اثبات. فرض کنیم A و B دو عمل‌گر غیراسکالر در $\mathcal{F}$ باشند، به‌طوری که $AB = BA$ طبق قضیه ۱.۴، حکم برقرار است. □

قضیه ۳.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $\mathcal{C}$ مجموعه تمام عمل‌گرهای فشرده روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، $\Gamma(\mathcal{C})$ گرافی همبند است.

اثبات. فرض کنیم A و B دو عمل‌گر غیراسکالر در $\mathcal{C}$ باشند و $AB = BA$. طبق قضیه ۱.۴، عمل‌گر با رتبه یک $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ موجود است که

$$A \text{—} C \text{—} B$$

یک مسیر در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ است. از آنجا که هر عمل‌گر با بعد متناهی، عمل‌گری فشرده است، اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۴.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $\mathcal{A}$ مجموعه تمام عمل‌گرهای وارون‌ناپذیر در $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، $\Gamma(\mathcal{A})$ گرافی همبند است.

اثبات. دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد، از آنجا که می‌توان فرض کرد E عمل‌گری وارون‌ناپذیر است، طبق ملاحظه ۲.۲ و اثبات قضیه ۳.۲، حکم ثابت می‌شود.

حالت دوم: اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت چدایی‌ناپذیر باشد، به‌کمک اثبات قضیه ۳.۳، حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۵.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی مجموعه اعداد مختلط و $\mathcal{D}$ مجموعه تمام عمل‌گرهای فردهلم روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت، $\Gamma(\mathcal{D})$ گرافی همبند است.

اثبات. فرض کنیم A و B دو عمل‌گر فردهلم غیر اسکالر در $\mathcal{D}$ باشند، به‌طوری که $AB = BA$. طبق لم ۲.۳، عمل‌گرهای فشرده غیراسکالر C_1 و C_2 موجودند که $C_1A \neq AC_1$ و $C_2B \neq BC_2$. طبق قضیه ۳.۴، عمل‌گرهای فشرده $K_1, \dots, K_n$ در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ موجودند که

$$C_1 — K_1 — \cdots — K_n — C_2$$

یک مسیر در $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ است. طبق [۶، قضیه ۱۸.۴، قضیه ۲۳.۴، قضیه ۲۵.۴]، برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم $I - K_i$ ،$I - C_1$ و $I - C_2$ عمل‌گرهای فردهلم می‌باشند و لذا:

$$A — I - C_1 — I - K_1 — \cdots — I - K_n — I - C_2,$$

مسیری در $\Gamma(\mathcal{D})$ خواهد بود و اثبات کامل می‌شود. □

فهرست منابع

[1] C. Ambrozie, J. Bračič, B. Kuzma, V. Müller, The commuting graph of bounded linear operators on a Hilbert space, J. Funct. Anal. **264** (2013) 1068–1087.

[2] S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, On commuting graphs of semisimple rings, Linear Algebra Appl. **390** (2004) 345–355.

[3] S. Akbari, P. Raja, Commuting graphs of some subsets in simple rings, Linear Algebra Appl. **418** (2006) 161–176.

[4] S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja,On the diameters of commuting graphs, Linear Algebra Appl. **416**(2006) 1038–1047.

[5] D. Dolžan, P. Oblak, Commuting graphs of matrices over semirings, Linear Algebra Appl. **435** (2011) 1657–1665.

[6] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Science, 1991.

[7] B. P. Rynne and M.A. Youngson , *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag, London, 2008.

The Noncommuting Graph of Bounded Linear Operators on a Hilbert Space

Pandora Raja †

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 2021/12/11 Accepted: 2022/4/24

Abstract: Let $\mathcal{H}$ be a Complex Hilbert space and $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ be the algebra of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$. The non-commuting graph of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, denoted by $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ is a graph whose vertices are non-scalar bounded operators and two distinct vertices A and B are adjacent if and only if $AB \neq BA$. In this paper, we prove the connectivity of $\Gamma(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ for separable and non-separable complex Hilbert spaces. Also we show that the noncommuting graphs of the set of all finite rank operators on $\mathcal{H}$, the set of all compact operators on $\mathcal{H}$, the set of all non-invertible operators on $\mathcal{H}$ and the set of all Fredholm operators on $\mathcal{H}$ are connected graphs.

Keywords: Noncommuting graph, Hilbert space, Operators, Compact Operators, Fredholm Operators.

†Corresponding author.
E-mail addresses: p_raja@sbu.ac.ir