مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۲۰۱-۲۱۱
شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.40175.2015

قضیه رسته بئر برای توپولوژی متقارن حاصل از شبه‌مترهای زیرخطی در مخروطهای موضعاًمحدب

زینب یوسفی ، محمدرضا مطلبی [×]

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم ، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۲۷

چکیده: دراین مقاله، کامل بودن مخروطها را در توپولوژی متقارن حاصل از شبه‌مترهای زیرخطی مورد بررسی قرارداده و ثابت می‌کنیم که در مخروط کامل متقارن همسایگی‌ها نسبت به توپولوژی متقارن از رسته دوم‌اند. سپس توسیعی از قضیه رسته بئر را برای توپولوژی متقارن القائی در مخروطهای موضعاًمحدب شبه‌متری ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: شبه‌متر زیرخطی، مخروط کامل متقارن، قضیه رسته بئر.

رده‌بندی ریاضی: 46A03; 46A16; 46A30

۱ مقدمه

کامل بودن در توپولوژی‌های اصلی مخروطهای موضعاًمحدب در مراجع [۶–۹] و ساختارهای توپولوژیکی موضعاًمحدب حاصل از شبه‌مترهای زیرخطی در [۴، ۱۲] مورد بحث قرار گرفته‌اند. در این مقاله، برخی از خواص همسایگی‌ها و مخروطهای موضعاًمحدب شبه‌متری کامل متقارن را بررسی نموده و توسیعی از قضیه رسته بئر را به توپولوژی متقارن القائی از شبه‌مترهای زیرخطی ارائه می‌کنیم. در ابتدا مفاهیم اساسی مورد نیاز درباره مخروطهای موضعاًمحدب را از مرجع [۴] مرور می‌کنیم.

مخروط مرتب عبارت است از مجموعه $\mathcal{P}$ همراه با یک عمل جمع $(a,b)\to a+b$ و یک عمل ضرب اسکالر $(\lambda,a)\to\lambda a$ با اسکالرهای نامنفی $\lambda\geq ۰$. عمل جمع تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر بوده و عضو خنثی عمل جمع نیز موجود است که با $۰_{\mathcal{P}}$ (یا به اختصار با ۰) نشان داده می‌شود. برای عمل ضرب اسکالر نیز خواص شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برقرار است، یعنی برای هر $\lambda,\mu\geq ۰$ و $a\in\mathcal{P}$ داریم:

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a,\ \ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,\ \ \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,\ \ ۱a=a,\ \ ۰a=۰.$$

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: yousefi@uma.ac.ir (Z. Yousefi)، motallebi@uma.ac.ir (M.R. Motallebi)

به‌علاوه، مخروط $\mathcal{P}$ دارای یک ترتیب (جزئی) $\leq$ با دو خاصیت بازتابی و ترایایی است به‌طوری‌که با اعمال جبری سازگار است، یعنی اگر $a \leq b$ ، آن‌گاه برای هر $a, b, c \in \mathcal{P}$ و $\lambda \geq 0$ داریم $a + c \leq b + c$ و $\lambda a \leq \lambda b$. به‌عنوان مثال، میدان اسکالر توسیع‌یافته $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ از اعداد حقیقی با ترتیب و اعمال جبری معمولی یک مخروط مرتب است. به‌ویژه ، برای هر $\lambda > 0$ تعریف می‌کنیم $\lambda + (+\infty) = +\infty$ ، $\lambda\,(+\infty) = +\infty$ و $0\,(+\infty) = 0$. واضح است که هر مخروط $\mathcal{P}$ با رابطه تساوی مرتب بوده و لذا نتایج مربوط به مخروط‌های مرتب برای مخروط‌های بدون ساختار ترتیبی نیز برقرار است.

فرض کنیم $(\mathcal{P}, \leq)$ یک مخروط مرتب باشد. منظور از یک دستگاه صفر همسایگی مجرد در $\mathcal{P}$ زیرمجموعه‌ای مانند $\mathcal{V}$ از $\mathcal{P}$ است به‌طوری‌که سه ویژگی زیر برقرارند:

(v_1) به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$ ، $v > 0$.

(v_2) به‌ازای هر $u, v \in \mathcal{V}$ ، عضوی مانند $w \in \mathcal{V}$ وجود دارد به‌طوری‌که $w \leq u, v$.

(v_3) به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$ و هر $\lambda > 0$ ، $\lambda v \in \mathcal{V}$.

هرگاه همه عضوهای $\mathcal{P}$ از پایین کران‌دار باشند، یعنی برای هر $a \in \mathcal{P}$ و $v \in \mathcal{V}$ اسکالری مانند $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $0 \leq a + \lambda v$ ، آن‌گاه زوج $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ مخروط موضعاًمحدب پر نامیده می‌شود. همسایگی‌های هر عضو $a \in \mathcal{P}$ در توپولوژی بالایی و پایینی به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v(a) = \{b \in \mathcal{P} : b \leq a + v\}, \quad (a)v = \{b \in \mathcal{P} : a \leq b + v\},\ v \in \mathcal{V}.$$

تظریف مشترک دو توپولوژی فوق را توپولوژی متقارن نامیده و همسایگی‌ها در توپولوژی متقارن را با $v^s(a) = v(a) \cap (a)v$ نشان می‌دهند. بالاخره، زوج $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ مخروط موضعاًمحدب نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{P}$ یک مخروط موضعاًمحدب پر بوده و لزوماً شامل دستگاه صفر همسایگی $\mathcal{V}$ نباشد. به‌عنوان مثال، مخروط $\overline{\mathbb{R}}$ با سیستم صفر همسایگی مجرد $\mathcal{V} = \{\epsilon \in \mathbb{R} : \epsilon > 0\}$ یک مخروط موضعاًمحدب است.

گردایه $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های محدب $U \subset \mathcal{P}^2$ را یک ساختار شبه‌یکنواخت محدب گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(U_1) به‌ازای هر $U \in \mathcal{U}$ ، $\triangle \subset U$ که $\triangle = \{(a, a) : a \in \mathcal{P}\}$.

(U_2) برای هر $U, V \in \mathcal{U}$ عضوی مانند $W \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $W \subseteq U \cap V$.

(U_3) برای هر $\lambda, \mu > 0$ و $U \in \mathcal{U}$ ، $\lambda U \circ \mu U \subseteq (\lambda + \mu) U$ که در آن

$$\lambda U \circ \mu U = \{(a, b) \in \mathcal{P}^2 : \exists c \in \mathcal{P},\ (a, c) \in \lambda U,\ (c, b) \in \mu U\}.$$

(U_4) برای هر $U \in \mathcal{U}$ و $\lambda > 0$ ، $\lambda U \in \mathcal{U}$.

هرگاه $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ یک مخروط موضعاًمحدب باشد، آن‌گاه گردایه همه مجموعه‌های $\widetilde{v} \subseteq \mathcal{P}^2$ که به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$ ،

$$\widetilde{v} = \{(a, b) : a \leq b + v\},$$

یک ساختار شبه‌یکنواخت محدب بر $\mathcal{P}$ تعریف می‌کند. از طرف دیگر، هرگاه یک ساختار شبه‌یکنواخت محدب $\mathcal{U}$ روی مخروط $\mathcal{P}$ دارای خاصیت زیر باشد

(U_5) به‌ازای هر $a \in \mathcal{P}$ و $U \in \mathcal{U}$ اسکالری مانند $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(0, a) \in \lambda U$

آن‌گاه به یک مخروط موضعاًمحدب پر شامل $\mathcal{P}$ منجر شده و همان ساختار شبه‌یکنواخت محدب را ایجاد می‌کند. برای توضیحات بیش‌تر به بخش ۲.۵ از فصل اول در [۴] مراجعه شود.

۲ شبه‌مترهای زیرخطی، مخروط کامل متقارن و قضیه رسته بئر

فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک مخروط بوده و مخروط حاصل ضربی $\mathcal{P}^{۲} = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ را با اعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه وار با اسکالرهای نامنفی $\lambda \geq ۰$ در نظر بگیریم و فرض کنیم $\overline{\mathbb{R}}_+ := [۰, +\infty]$. مطابق بخش ۶.۵ از فصل اول در [۴]، تابع $d : \mathcal{P}^{۲} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ شبه‌متر زیرخطی نامیده می‌شود هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

$(\mathrm{M}_۱)$ به‌ازای هر $a \in \mathcal{P}$، $d(a, a) = ۰$.

$(\mathrm{M}_۲)$ به‌ازای هر $a, b, c \in \mathcal{P}$، $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

$(\mathrm{M}_۳)$ به‌ازای هر $a, b, a', b' \in \mathcal{P}$، $d((a, b) + (a', b')) \leq d(a, b) + d(a', b')$.

$(\mathrm{M}_۴)$ به‌ازای هر $a, b \in \mathcal{P}$ و $\lambda \geq ۰$، $d(\lambda(a, b)) = \lambda d(a, b)$.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک مخروط بوده و d یک شبه‌متر زیرخطی بر $\mathcal{P}$ با خاصیت زیر باشد:

$(\mathrm{M}_۵)$ به‌ازای هر $a \in \mathcal{P}$، $d(۰, a) < +\infty$.

قرار می‌دهیم $\mathcal{U}_d = \{\mathrm{U}_{\lambda d} : \lambda > ۰\}$ که در آن به ازای هر اسکالر $\lambda > ۰$،

$$\mathrm{U}_{\lambda d} = \{(a, b) \in \mathcal{P}^{۲} : d(a, b) \leq ۱/\lambda\}.$$

در این‌صورت $\mathcal{U}_d$ یک ساختار شبه‌یکنواخت محدب بر $\mathcal{P}$ با شرط $(\mathrm{U}_۵)$ ایجاد می‌کند (گزاره ۷.۵ درفصل اول [۴] دیده شود).
برای هر $\lambda > ۰$ و عضوهای $a, b \in \mathcal{P}$ تعریف می‌کنیم $a \leq b + v_{\lambda d}$ هرگاه $(a, b) \in \mathrm{U}_{\lambda d}$ و قرار می‌دهیم

$$\mathcal{V}_d = \{v_{\lambda d} : \lambda > ۰\}.$$

مطابق بخش ۴.۵ فصل اول در [۴]، مخروط پر $\mathcal{P} \oplus \mathcal{V}_d$، با دستگاه صفر همسایگی $\mathrm{V}_d = \{۰\} \oplus \mathcal{V}_d$ وجود دارد به‌طوری‌که همسایگی‌های آن همان ساختار شبه‌یکنواخت محدب را روی $\mathcal{P}$ ایجاد می‌کنند و عضوهای $\mathcal{V}_d$ پایه‌ای برای V_d تشکیل می‌دهند؛ یعنی برای عضوهای $a, b \in \mathcal{P}$ و اسکالر $\lambda > ۰$، $a \leq b + v_{\lambda d}$ ایجاب می‌کند $a \leq b \oplus \mathrm{v}_{\lambda d}$. مخروط موضعاً‌محدبی را که به‌وسیله $\mathcal{V}_d$ روی $\mathcal{P}$ ایجاد می‌شود مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری تولیدشده به‌وسیله d نامیده و با $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ نشان می‌دهیم. برای جزئیات بیش‌تر به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

مثال ۲.۲. فرض کنیم $Conv(\overline{\mathbb{R}})$ مخروط حاصل از همه زیرمجموعه های محدب غیرتهی در $\overline{\mathbb{R}}$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی با اسکالرهای نامنفی $\lambda \geq ۰$ باشد. تابع $D : Conv(\overline{\mathbb{R}})^{۲} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ را برای $A, B \in Conv(\overline{\mathbb{R}})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(A, B) = \inf\{\lambda > ۰ : A \subseteq\downarrow B + \lambda \mathbb{B}_{\mathbb{R}}\}, \ \mathbb{B}_{\mathbb{R}} := [-۱, ۱]$$

که در آن

$$\downarrow B = \{a \in \overline{\mathbb{R}} : \exists b \in B, \ a \leq b\}$$

مجموعه نزولی تولیدشده به‌وسیله B است. توجه کنیم که اگر

$$\{\lambda > ۰ : A \subseteq B + \lambda \mathbb{B}_{\mathbb{R}}\} = \emptyset,$$

آن‌گاه $D(A, B) := +\infty$.
برای هر اسکالر $\lambda > ۰$ و $A \in Conv(\overline{\mathbb{R}})$ داریم $A \subseteq\downarrow A + \lambda \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$، لذا $D(A, A) = ۰$؛ یعنی $(\mathrm{M}_۱)$ برقرار است.
فرض کنیم $A, B, C \in Conv(\overline{\mathbb{R}})$. هرگاه $D(A, B) = +\infty$ یا $D(B, C) = +\infty$، آن‌گاه به‌وضوح $(\mathrm{M}_۲)$ برقرار است.
اگر $D(A, B) = \lambda$ و $D(B, C) = \mu$ که $\lambda, \mu > ۰$، آن‌گاه

$$A \subseteq\downarrow B + \lambda \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \quad B \subseteq\downarrow C + \mu \mathbb{B}_{\mathbb{R}},$$

درنتیجه $A \subseteq\downarrow C + (\lambda + \mu) \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$؛ یعنی $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$.

بررسی شرط (M_3) مشابه (M_2) بوده و (M_4) بدیهی است. برای هر $A \in Conv(\overline{\mathbb{R}})$ اسکالری مانند $\lambda > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $0 \in\downarrow A + \lambda\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ ، لذا $D(\{0\}, A) < +\infty$ ؛ یعنی (M_5) نیز برقرار است. بنابراین $(Conv(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{V}_D)$ یک مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری است. به‌ویژه، $(Conv(\mathbb{R}), \mathcal{V}_D)$ و $(Conv(\mathbb{R}_+), \mathcal{V}_D)$ مخروط‌های موضعاً‌محدب شبه‌متری‌اند.

چون مخروط $\overline{\mathbb{R}}$ را می توان زیرمخروطی از $Conv(\overline{\mathbb{R}})$ در نظر گرفت، پس $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{V}_d)$ نیز یک مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری است که شبه‌متر زیرخطی $d : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ برای هر $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = D(\{x\},\{y\}) = \begin{cases} \max\{x-y, 0\}, & y \neq +\infty, \\ 0, & y = +\infty. \end{cases}$$

به‌ویژه، $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{V}_d)$ و $(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_d)$ مخروط‌های موضعاً‌محدب شبه‌متری‌اند.

مثال **۳.۲**. برای $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ، تعریف می‌کنیم $x^+ = \max\{x, 0\}$ ، $x^- = -\min\{x, 0\}$ و فرض کنیم $\mathcal{P}$ مخروط حاصل از همه دنباله‌های $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $\overline{\mathbb{R}}$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر زیر باشد:

$$x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (x, y \in \mathcal{P}, \lambda \geq 0).$$

برای هر $x \in \mathcal{P}$ ، $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم:

$$||x||_\infty = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, & x \subset \mathbb{R}, \\ +\infty, & \exists n \in \mathbb{N}, x_n = +\infty. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $\overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}} : ||(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty < +\infty\}$ و تابع $d_\infty : \overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}}) \times \overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ را برای $x, y \in \overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}})$ ، $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_\infty(x,y) = \begin{cases} ||((x_n - y_n)^+)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty, & \exists n \in \mathbb{N}, y_n < +\infty, \\ 0, & \forall n \in \mathbb{N}, y_n = +\infty, \\ +\infty, & \exists n \in \mathbb{N}, x_n = +\infty. \end{cases}$$

در این‌صورت d_∞ در شرط‌های (M_1)-(M_4) صدق می‌کند. برای هر $x \in \overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}})$ ، $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ داریم

$$d_\infty(0, x) = ||((0 - x_n)^+)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty = ||(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty < +\infty,$$

لذا d_∞ در شرط (M_5) نیز صدق می‌کند. بنابراین $(\overline{\ell}_\infty(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{V}_{d_\infty})$ یک مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری است (با مثال ۱۰.۲ در [11] مقایسه شود).

ملاحظه **۴.۲**. در مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ ، همسایگی‌های متقارن القائی بر $\mathcal{P}$ به‌صورت زیرند:

$$v^s_{\lambda d}(a) = \{b \in \mathcal{P} : d^s(a,b) \leq 1/\lambda\}, \quad a \in \mathcal{P}, \lambda > 0,$$

که در آن شبه‌متر زیرخطی متقارن d^s بر $\mathcal{P}^2$ عبارت است از

$$d^s(a,b) = \max\{d(a,b), d^{-1}(a,b)\}, \quad d^{-1}(a,b) = d(b,a).$$

به‌عنوان مثال، شبه‌متر زیرخطی متقارن D^s بر $Conv(\overline{\mathbb{R}})^2$ به‌صورت زیر قابل توصیف است:

$$D^s(A,B) = \begin{cases} |\sup A - \sup B|, & \sup A \neq +\infty, \sup B \neq +\infty, \\ 0, & \sup A = \sup B = +\infty, \\ +\infty, & \sup A \neq \sup B = +\infty, \\ +\infty, & \sup A = \sup B \neq +\infty. \end{cases}$$

به‌ویژه، شبه‌متر زیرخطی متقارن d^s بر $\overline{\mathbb{R}}^2$ به‌صورت زیر است:

$$d^s(a,b) = \begin{cases} |a-b|, & a \neq +\infty, b \neq +\infty, \\ 0, & a = b = +\infty, \\ +\infty, & a \neq +\infty, b = +\infty, \\ +\infty, & a = +\infty, b \neq +\infty. \end{cases}$$

مطابق تعریف ۸.۳ در [۴]، مخروط موضعاًمحدب $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ را تفکیک‌پذیرگویند هرگاه برای $a,b\in\mathcal{P}$ ، $\overline{a}=\overline{b}$ ایجاب کند $a=b$ ، که $\overline{a}$ بستار مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ نسبت به توپولوژی پایینی است. بنا به گزاره ۹.۳ در [۴]، مخروط $\mathcal{P}$ تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر توپولوژی متقارن هاسدورف باشد، یعنی به‌ازای هر $a\in\mathcal{P}$ ، $\overline{a}^s=\{a\}$ که در آن $\overline{a}^s$ بستار $\{a\}$ در توپولوژی متقارن است. برای هر $v\in\mathcal{V}$ ، $\mathcal{V}_v=\{\lambda v:\lambda>0\}$ یک دستگاه صفر همسایگی در $\mathcal{P}$ بوده و $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ نیز یک مخروط موضعاًمحدب است. واضح است که اگر مخروط‌های موضعاًمحدب $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ ، $v\in\mathcal{V}$ تفکیک‌پذیر باشند، آن‌گاه $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ نیز تفکیک‌پذیر است.

ملاحظه **۵.۲**. هرگاه برای $v\in\mathcal{V}$ ، تابع $d_v:\mathcal{P}^2\to\overline{\mathbb{R}}_+$ را به‌صورت

$$d_v(a,b)=\inf\{\lambda>0: a\leq b+\lambda v\},\quad \forall(a,b)\in\mathcal{P}^2,$$

تعریف کنیم، آن‌گاه مطابق گزاره ۴.۲ در [۱۲]، d_v یک شبه‌متر زیرخطی با شرط (M_5) بوده و $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ با مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری $(\mathcal{P},\mathcal{V}_{d_v})$ معادل است. به‌ویژه، $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر $(\mathcal{P},\mathcal{V}_{d_v})$ تفکیک‌پذیر باشد.

تعریف **۶.۲**. شبه‌متر زیرخطی d را متر زیرخطی می‌نامیم هرگاه در شرط‌های زیر صدق کند:

(M_6) برای $a,b\in\mathcal{P}$ ، $d^{-1}(a,b)=d(a,b)$.

(M_7) برای $a,b\in\mathcal{P}$ ، هرگاه $a\neq b$ آن‌گاه $d(a,b)\neq 0$.

هرگاه متر زیرخطی d بر $\mathcal{P}$ در شرط (M_5) صدق کند، آن‌گاه $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ را مخروط موضعاًمحدب متری تولیدشده به‌وسیله d بر $\mathcal{P}$ می نامیم. مطابق [۱۲]، شبه‌متر زیرخطی d را بر مخروط $\mathcal{P}$ جداکننده گوییم هرگاه شبه‌متر متقارن d^s در شرط (M_7) صدق کند، یعنی برای $a,b\in\mathcal{P}$ که $a\neq b$ ، $d^s(a,b)\neq 0$. هرگاه شبه‌متر d جداکننده باشد، آن‌گاه $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ تفکیک‌پذیر است؛ به‌ویژه توپولوژی متقارن القائی بر $\mathcal{P}$ هاسدورف است.

ملاحظه **۷.۲**. فرض کنیم E یک فضای برداری توپولوژیکی حقیقی با بردار صفر θ باشد. زیرمجموعه $P\neq\{\theta\}$ از E مخروط نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $\lambda\geq 0$ ، $\lambda P\subseteq P$ و $P\cap -P=\{\theta\}$. برای $x,y\in E$ ترتیب جزئی $\ll$ روی E به این‌صورت تعریف می‌شود: $x\ll y$ هرگاه $y-x\in\mathrm{int}P$ که $\mathrm{int}P$ درون توپولوژیکی P است. مطابق ملاحظه ۱۰.۲ در [۲]، $\mathrm{int}P$ در شرط‌های (v_1) ، (v_1) و (v_3) مربوط به مخروط‌های موضعاًمحدب صدق می‌کند و لذا یک دستگاه صفر همسایگی در E است. همچنین عضوهای E نسبت به $\mathrm{int}P$ از پایین کران‌دارند، یعنی به‌ازای هر $x\in E$ و $c\in\mathrm{int}P$ ، اسکالری مانند $\lambda>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $0\ll x+\lambda c$. بنابراین زوج $(E,\mathrm{int}P)$ یک مخروط موضعاًمحدب پر است. با توجه به این که $(E,\mathrm{int}P)$ در تعریف فضاهای متری مخروطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، فضاهای‌متری مخروطی و مخروط‌های موضعاًمحدب کاربردهای مشابهی دارند. برای مشاهده بعضی از این کاربرها می‌توان به مراجع [۱–۳، ۱۱، ۱۳] مراجعه کرد.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. زیرمجموعه A از X را هیچ‌جا چگال گویند هرگاه درون بستار A تهی باشد. مجموعه A از رسته اول نامیده می‌شود هرگاه بتوان آن را به‌صورت اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌های هیچ‌جا چگال نوشت. اگر A از رسته اول نباشد آن را از رسته دوم گویند. فضای توپولوژی X را بئر گویند هرگاه هر زیرمجموعه باز غیرتهی از X در X از رسته دوم باشد. برای مطالعه بیش‌تر به [۵، ۱۰] مراجعه شود.

مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ را بئر متقارن می‌نامیم هرگاه $\mathcal{P}$ نسبت به توپولوژی متقارن القائی از شبه‌متر زیرخطی d بئر باشد. در ادامه، همسایگی‌های از رسته دوم را در توپولوژی متقارن حاصل از مخروط‌های موضعاًمحدب شبه‌متری بررسی نموده و توسیعی از قضیه رسته بئر را در مخروط‌ها ارائه می‌کنیم. فرض کنیم $A\subseteq(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$. درون A را نسبت به توپولوژی متقارن با نماد $\mathrm{int}^s(A)$ نشان خواهیم داد. همچنین بستار A را نسبت به توپولوژی متقارن $\mathcal{P}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{cl}^s(A)=\{b\in\mathcal{P}:\forall\lambda>0,\exists a\in A, d^s(a,b)\leq\lambda\}.$$

(با بخش ۴.۳ ، فصل اول در [۴] مقایسه شود).

ملاحظه **۸.۲**. هرگاه $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ یک مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری باشد، آن‌گاه همسایگی‌های متقارن $v^s_{\lambda d}(a)$ ، $\lambda>0$ و $a\in\mathcal{P}$ در توپولوژی متقارن بسته‌اند؛ در واقع اگر $b\in\mathrm{cl}^s(v^s_{\lambda d}(a))$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $\gamma>0$ عضوی مانند $c\in\mathrm{cl}^s(v^s_{\lambda d}(a))$ وجود دارد به‌طوری‌که $d^s(b,c)\leq\gamma$. بنابراین $\mathrm{d}^s(b,a)\leq d^s(b,c)+d^s(c,a)\leq\gamma+1/\lambda$. چون γ دلخواه است، پس $d^s(b,a)\leq\lambda$ ؛ یعنی $b\in v^s_{\lambda d}(a)$.

ملاحظه **۹.۲**. فرض کنیم $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ یک مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری بوده و $A\subseteq\mathcal{P}$. در این‌صورت:
(الف) $\mathcal{P}\setminus \mathrm{cl}^s(A)=\mathrm{int}^s(\mathcal{P}\setminus A)$؛ زیرا اگر $a\in\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A)$، آن‌گاه $a\notin\mathrm{cl}^s(A)$ لذا اسکالر $\lambda>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $v^s_{\lambda d}(a)\cap A=\emptyset$؛ یعنی $v^s_{\lambda d}(a)\subseteq\mathcal{P}\setminus A$. به‌عکس، اگر $a\in\mathrm{int}^s(\mathcal{P}\setminus A)$، آن‌گاه $\lambda>0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $v^s_{\lambda d}(a)\subseteq\mathcal{P}\setminus A$؛ یعنی $v^s_{\lambda d}(a)\cap A=\emptyset$ لذا $a\notin\lambda\mathrm{cl}^s(A)$، پس $a\in\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A)$.
(ب) مجموعه A نسبت به توپولوژی متقارن در $\mathcal{P}$ هیچ‌جا چگال است اگر و فقط اگر $\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A)$ در توپولوژی متقارن چگال باشد؛ زیرا فرض کنیم $\mathrm{cl}^s(\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A))\neq\mathcal{P}$. عضو $a\in\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A)$ و اسکالر $\lambda>0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$v^s_{\lambda d}(a)\cap(\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A))=\emptyset,$$

بنابراین $v^s_{\lambda d}(a)\subseteq\mathrm{cl}^s(A)$ که تناقض است. به‌عکس، اگر $\mathrm{cl}^s(\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A))=\mathcal{P}$، آن‌گاه به ازای هر $a\in\mathcal{P}$ و $\lambda>0$ داریم $(\mathcal{P}\setminus\mathrm{cl}^s(A))\cap v^s_{\lambda d}(a)\neq\emptyset$؛ یعنی $\mathrm{int}^s(\mathrm{cl}^s(A))=\emptyset$.

تعریف **۱۰.۲**. برای دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{P}$ و $a\in\mathcal{P}$، می‌نویسیم $x_n\to a$ در $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ هرگاه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نسبت به توپولوژی متقارن به a همگرا باشد، یعنی به‌ازای هر $\lambda>0$، $n_\lambda\in\mathbb{N}$ ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ که $n\geq n_\lambda$، $d^s(x_n,a)\leq\lambda$. دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را کوشی متقارن گوییم هرگاه به‌ازای هر $\lambda>0$، $n_\lambda\in\mathbb{N}$ ای موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m,n\geq n_\lambda$، $d^s(x_n,x_m)\leq\lambda$. مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ را کامل متقارن می‌نامیم هرگاه هر دنباله کوشی متقارن در $\mathcal{P}$ نسبت به توپولوژی متقارن همگرا باشد.

ملاحظه **۱۱.۲**. فرض کنیم $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ یک مخروط موضعاًمحدب بوده و $v\in\mathcal{V}$. در این‌صورت $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ کامل متقارن است اگر و فقط اگر مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری $(\mathcal{P},\mathcal{V}_{d_v})$ کامل متقارن باشد. درواقع، هرگاه دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $(\mathcal{P},\mathcal{V}_v)$ کوشی متقارن باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $\lambda>0$، $n_\lambda\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای $m,n\geq n_\lambda$، $x_n\leq x_m+\lambda v$ و $x_m\leq x_n+\lambda v$؛ یعنی اگر و فقط اگر برای $m,n\geq n_\lambda$، $d^s_v(x_n,x_m)\leq\lambda$ و لذا $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $(\mathcal{P},\mathcal{V}_{d_v})$ کوشی متقارن است.

گزاره **۱۲.۲**. هرگاه دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ کوشی متقارن بوده و در توپولوژی متقارن زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد، آن‌گاه نسبت به توپولوژی متقارن همگرا ست.

اثبات. فرض کنیم $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای از $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای عضوی مانند $y\in\mathcal{P}$، $x_{n_i}\to y$. در این‌صورت $n_0\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m,n\geq n_0$، $d^s(x_m,x_n)\leq\frac{1}{2}$. از طرفی چون $x_{n_i}\to y$، $i_0\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i\in\mathbb{N}$ که $i\geq i_0$، $d^s(y,x_{n_i})\leq 1/2$. در این‌صورت برای هر $n\geq n_0$ اگر $i\in\mathbb{N}$ طوری انتخاب شود که $i\geq i_0$ و $n_i\geq n$، آن‌گاه $d^s(y,x_n)\leq d^s(y,x_{n_i})+d^s(x_{n_i},x_n)\leq 1/2+1/2\leq 1$. بنابراین $x_n\to y$. □

حال قضیه اشتراک کانتور را برای توپولوژی متقارن در مخروط‌های موضعاًمحدب شبه‌متری به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه **۱۳.۲**. هرگاه $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ یک مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری بوده و $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اسکالرهای مثبت باشد به‌طوری‌که $\lambda_n\to+\infty$، آن‌گاه $\mathcal{P}$ کامل متقارن است اگر و فقط اگر به‌ازای هر دنباله نزولی از همسایگی‌های متقارن $(v^s_{\lambda_n d}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ داشته باشیم

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} v^s_{\lambda_n d}(x_n)\neq\emptyset.$$

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{P}$ کامل متقارن بوده و $(v^s_{\lambda_n d}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از همسایگی‌های متقارن نزولی باشد. در این‌صورت برای هر $\lambda>0$، $n_\lambda\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به طوری‌که به‌ازای هر $m,n\in\mathbb{N}$ اگر $m,n\geq n_\lambda$، آن‌گاه $d^s(x_m,x_n)\leq\frac{1}{2\lambda}\leq\frac{1}{2n_\lambda}$؛ یعنی $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathcal{P}$ کوشی متقارن است. بنابراین عضوی مانند $a\in\mathcal{P}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_n\to a$. به‌ازای هر $n_0\in\mathbb{N}$ داریم $(x_n)_{n\geq n_0}\subseteq v^s_{\lambda_{n_0}d}(x_{n_0})$. لذا از ملاحظه ۸.۲ خواهیم داشت $a\in v^s_{\lambda_{n_0}d}(x_{n_0})$ و درنتیجه

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} v^s_{\lambda_n d}(x_n)\neq\emptyset.$$

به‌عکس، فر ض کنیم دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کوشی متقارن باشد. برای $\lambda=2$، $n_0\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای $m,n\in\mathbb{N}$ که $m,n\geq n_0$، $d^s(x_m,x_n)\leq\frac{1}{2}$. هم‌چنین برای $\lambda=2^2$، $n_1\in\mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای $m,n\in\mathbb{N}$ که $m,n\geq n_1$، $d^s(x_m,x_n)\leq\frac{1}{2^2}$. اگر $n_1,n_2\geq n_0$، آن‌گاه به‌ازای هر $b\in v^s_{2d}(x_{n_2})$ خواهیم داشت:

$$d^s(b,x_{n_1})\leq d^s(b,x_{n_2})+d^s(x_{n_2},x_{n_1})<1,$$

یعنی $v^s_{\text{۲}d}(x_{n_\text{۲}}) \supseteq v^s_d(x_{n_\text{۱}})$. بنابراین دنباله $(v^s_{\text{۲}^{i-\text{۱}}d}(x_{n_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ از همسایگی‌های متقارن در $\mathcal{P}$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که

$$v^s_{\text{۲}^{i-\text{۱}}d}(x_{n_i}) \supseteq v^s_{\text{۲}^i d}(x_{n_{i+\text{۱}}}), \qquad i\in\mathbb{N}.$$

لذا مطابق فرض، اشتراک $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} v^s_{\text{۲}^{i-\text{۱}}d}(x_{n_i})$ غیرتهی بوده و دارای عضوی مانند a است. درنتیجه

$$d^s(a,x_{n_i}) \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{(i-\text{۱})}} \to \text{۰} \ \ (i\to+\infty)$$

یعنی $x_{n_i}\to a$ ، لذا با استفاده از گزاره ۱۲.۲ خواهیم داشت $x_n\to a$. بنابراین $\mathcal{P}$ کامل متقارن است. □

نتیجه ۱۴.۲. هرگاه $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ یک مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری تفکیک‌پذیر بوده و $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای از اسکالرهای مثبت باشد به‌طوری‌که $\lambda_n\to+\infty$ ، آن‌گاه $\mathcal{P}$ کامل متقارن است اگر و فقط اگر به ازای هردنباله نزولی از همسایگی‌های متقارن $(v^s_{\lambda_n d}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ، اشتراک $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} v^s_{\lambda_n d}(x_n)$ تک نقطه‌ای باشد.

اثبات. اگر $a,b\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} v^s_{\lambda_n d}(x_n)$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $d^s(a,x_n)\leq\frac{\text{۱}}{\lambda_n}$ و $d^s(x_n,b)\leq\frac{\text{۱}}{\lambda_n}$ ، لذا

$$d^s(a,b)\leq d^s(a,x_n)+d^s(x_n,b)\leq\frac{\text{۱}}{\text{۲}\lambda_n}\to\text{۰}.$$

بنابراین $d^s(a,b)=\text{۰}$ و از تفکیک‌پذیر بودن $\mathcal{P}$ خواهیم داشت $a=b$.

□

تعریف ۱۵.۲. در مخروط موضعاًمحدب $(\mathcal{P},\mathcal{V})$ عضو $a\in\mathcal{P}$ را کران‌دارگویند، هرگاه به‌ازای هر $v\in\mathcal{V}$ اسکالری مانند $\lambda>\text{۰}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a\leq\lambda v$. به‌ویژه، در مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ عضو $a\in\mathcal{P}$ کران‌دار است اگر و فقط اگر $d(a,\text{۰})<+\infty$.

در مراجع [۳، ۱۳] ، توابع اسکالرساز در فضاهای‌متری مخروطی مورد مطالعه قرارگرفته و با استفاده از متر حاصل از توابع اسکالرساز کاربردهایی از فضاهای‌متری مخروطی آورده شده است. هم‌چنین در [۱، ۲] ، با استفاده از همسایگی‌ها، مفهوم توابع اسکالرساز از فضاهای‌متری مخروطی به مخروطهای موضعاًمحدب توسیع داده شده و مورد بحث قرارگرفته است. در ادامه، ابتدا حالتی از قضیه نقطه ثابت (قضیه ۲۹.۲ در [۱۱]) را در توپولوژی متقارن القائی از شبه‌مترهای زیرخطی اثبات نموده و سپس آن را با استفاده شبه‌متر زیرخطی حاصل از توابع اسکالرساز به توپولوژی متقارن اصلی در مخروطهای موضعاًمحدب تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۲. فرض کنیم $(\mathcal{P},\mathcal{V}_d)$ یک مخروط موضعاًمحدب شبه‌متری‌کامل متقارن و تفکیک‌پذیر باشد. هرگاه $T:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ یک تابع انقباض با ثابت $\text{۰}<\alpha<\text{۱}$ باشد، یعنی

$$d(T(a),T(b))\leq\alpha d(a,b),\quad \forall\, a,b\in\mathcal{P},$$

و برای عضوی مانند $a_\circ\in\mathcal{P}$ ، $T(a_\circ)$ کران‌دار باشد، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت منحصر به‌فرد است.

اثبات. قرار می‌دهیم $x_\circ=a_\circ$ ، $x_\text{۱}=T(x_\circ)$ ، $x_n=T(x_{n-\text{۱}})=T^n(x_\circ)$ و نشان می‌دهیم دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کوشی متقارن است. مطابق فرض برای هر $i\geq\text{۲}$ ،

$$d(x_i,x_{i-\text{۱}})=d(T(x_{i-\text{۱}}),T(x_{i-\text{۲}}))\leq\alpha d(x_{i-\text{۱}},x_{i-\text{۲}})\leq\ldots\leq\alpha^{i-\text{۱}}d(x_\text{۱},x_\circ).$$

اگر $m\geq n$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-\text{۱}})+d(x_{m-\text{۱}},x_{m-\text{۲}})+\ldots+d(x_{n+\text{۱}},x_n)\\
&\leq (\alpha^{m-\text{۱}}+\alpha^{m-\text{۲}}+,\ldots+\alpha^n)d(x_\text{۱},x_\circ)\\
&\leq \alpha^n(\frac{\text{۱}-\alpha^{m-n}}{\text{۱}-\alpha})d(x_\text{۱},x_\circ)\\
&\leq \alpha^n(\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\alpha})d(x_\text{۱},x_\circ).
\end{aligned}$$

چون $\alpha^n \to 0$ و

$$d(x_1, x_0) \leq d(x_1, 0) + d(0, x_0) = d(T(a_0), 0) + d(0, a_0) < +\infty,$$

دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کوشی متقارن است، لذا عضوی مانند $x \in \mathcal{P}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_n \to x$. چون $x_n = T(x_{n-1})$، بنا به فرض به‌ازای هر $a \in \mathcal{P}$ داریم $d(T(a), x_n) \leq \alpha d(a, x_{n-1})$ که نتیجه می‌دهد:

$$d(T(a), x) \leq \alpha d(a, x), \quad \forall a \in \mathcal{P}.$$

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $\lambda_n = (\frac{1}{\alpha})^n$. در این‌صورت $\lambda_n \to \infty$ و $(v^s_{\lambda_n d}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله نزولی از همسایگی‌های متقارن x در $\mathcal{P}$ است. از طرف دیگر، هرگاه $a \in v^s_{\lambda_n d}(x)$ دلخواه باشد، آن‌گاه

$$d^s(T(a), x) \leq \alpha d^s(a,\, x) \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}},$$

یعنی $T(a) \in v^s_{\lambda_{n+1} d}(x)$. بنابراین $T(v^s_{\lambda_n d}(x)) \subseteq v^s_{\lambda_{n+1} d}(x)$ و لذا خواهیم داشت:

$$T(\bigcap_{n=1}^{\infty} v^s_{\lambda_n d}(x)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} T(v^s_{\lambda_n d}(x)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} v^s_{\lambda_{n+1} d}(x).$$

چون $\mathcal{P}$ تفکیک‌پذیر است، بنا به نتیجه ۱۴.۲ داریم:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} v^s_{\lambda_n d}(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} v^s_{\lambda_{n+1} d}(x) = \{x\}.$$

درنتیجه $T(x) = x$، یعنی x یک نقطه ثابت است. اگر T دارای نقطه ثابت دیگری مانند y باشد، آن‌گاه

$$d^s(x, y) = d^s(T(x), T(y) \leq \alpha d^s(x, y),$$

که نتیجه می‌دهد $d^s(x, y) = 0$ و چون $\mathcal{P}$ تفکیک‌پذیر است خواهیم داشت $x = y$.

□

تعریف ۱۷.۲. برای هر $v \in \mathcal{V}$ و $b \in \mathcal{P}$، تابع اسکالرساز $\varphi_{v,b} : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_{v,b}(a) = \inf\{t > 0 \ : \ a \leq b + tv\}, \quad \forall\, a \in \mathcal{P}.$$

همچنین برای هر $v \in \mathcal{V}$ و $b \in \mathcal{P}$ تابع اسکالرساز متقارن $\varphi^s_{v,b} : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi^s_{v,b}(a) = \max\{\varphi_{v,b}(a), \varphi_{v,a}(b)\}, \quad \forall\, a \in \mathcal{P}.$$

واضح است که برای $a, b \in \mathcal{P}$، $\varphi^s_{v,b}(a) = \varphi^s_{v,a}(b)$.

نتیجه ۱۸.۲. [۱] مخروط موضعاً‌محدب $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر $\varphi^s_{v,b}(a) = 0$، $v \in \mathcal{V}$ ایجاب کند $a = b$.

ملاحظه ۱۹.۲. هرگاه برای هر $v \in \mathcal{V}$ و $(a, b) \in \mathcal{P}^2$، تعریف کنیم $\varphi_v(a, b) = \varphi_{v,b}(a)$، آن‌گاه مطابق ملاحظه ۵.۲، φ_v یک شبه‌متر زیرخطی بوده و $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_{\varphi_v})$ یک مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری است.

قضیه ۲۰.۲. فرض کنیم $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ یک مخروط موضعاً‌محدب بوده، برای هر $v \in \mathcal{V}$، $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_v)$ کامل متقارن و تفکیک‌پذیر باشد. هرگاه برای $0 < \alpha < 1$، تابع $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ در شرط انقباض زیر صدق کند:

$$\varphi_v(T(a), T(b)) \leq \alpha \varphi_v(a, b), \quad \forall a, b \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{V}$$

و برای عضوی مانند $a_0 \in \mathcal{P}$، $T(a_0)$ کران‌دار باشد، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت منحصر به‌فرد است.

اثبات. چون $T(a_\circ)$ کران‌دار است، به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$، اسکالری مانند $\lambda > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $T(a_\circ) \leq \lambda v$، لذا $\varphi_v(T(a_\circ), \circ) = d_v(T(a_\circ), \circ) < +\infty$؛ یعنی $T(a_\circ)$ نسبت به $\mathcal{V}_{\varphi_v}$ نیز کران‌دار است. چون $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_v)$ کامل متقارن و تفکیک‌پذیر است، بنا به ملاحظه‌های ۵.۲ و ۱۱.۲، $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_{\varphi_v})$ نیز کامل متقارن و تفکیک‌پذیر است، لذا طبق قضیه ۱۶.۲، به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$، تابع T نسبت به دستگاه صفر همسایگی $\mathcal{V}_{\varphi_v}$، دارای نقطه ثابت منحصر به‌فردی مانند x_v است. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{P}$ نسبت به دستگاه صفر همسایگی $\mathcal{V}$ نیز نقطه ثابت منحصر به‌فرد دارد. هرگاه $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$، آن‌گاه به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$،

$$\varphi_v^s(x_{v_1}, x_{v_2}) = \varphi_v^s(T(x_{v_1}), T(x_{v_2})) \leq \alpha \varphi_v^s(x_{v_1}, x_{v_2}),$$

که نتیجه می‌دهد برای هر $v \in \mathcal{V}$، $\varphi_v^s(x_{v_1}, x_{v_2}) = \circ$، لذا از نتیجه ۱۸.۲ خواهیم داشت $x_{v_1} = x_{v_2}$. $\square$

قضیه ۲۱.۲. هرگاه $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ کامل متقارن باشد، آن‌گاه همسایگی‌های متقارن $v_{\lambda d}^s(a)$، $a \in \mathcal{P}$، $\lambda > \circ$ نسبت به توپولوژی متقارن $\mathcal{P}$ از رسته دوم‌اند.

اثبات. کافی است گزاره را برای $\lambda = 1$ ثابت کنیم. اگر همسایگی متقارن $v_d^s(a)$ از رسته دوم نباشد، آن‌گاه $v_d^s(a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، A_n نسبت به توپولوژی متقارن بسته نبوده و $\mathrm{int}^s(A_n) = \emptyset$؛ یعنی به‌ازای هر $\lambda > \circ$ و $n \in \mathbb{N}$، $v_{\lambda d}^s(a) \not\subseteq A_n$. چون A_1 نسبت به توپولوژی متقارن بسته نیست، عضوی مانند $x_1 \in v_{2\lambda d}^s(a) \setminus A_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $v_{\lambda d}^s(x_1) \not\subseteq A_1$. بدون این‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $\lambda \geq 2$. اگر $b \in v_{2\lambda d}^s(x_1)$، آن‌گاه

$$d^s(a, b) \leq d^s(a, x_1) + d^s(x_1, b) \leq 1/2 + 1/2 = 1,$$

لذا $v_{2\lambda d}^s(x_1) \subseteq v_d^s(a)$ و درنتیجه $v_{2\lambda d}^s(x_1) \subseteq v_d^s(a) \setminus A_1$.
چون برای هر $\lambda > \circ$، A_2 شامل $v_{\lambda d}^s(a)$ نیست، $v_{2^2 d}^s(x_1) \not\subseteq A_2$، لذا عضوی مانند $x_2 \in v_{2^2 d}^s(x_1) \setminus A_2$ وجود دارد به‌طوری‌که $v_{2^2 d}^s(x_2) \subseteq v_d^s(a) \setminus A_2$. بنابراین $v_{2^2 d}^s(x_2) \subseteq v_{2d}^s(x_1)$. با ادامه این روند، دنباله $(v_{2^n d}^s(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ حاصل می‌شود به‌طوری‌که

$$v_{2^{n+1} d}^s(x_{n+1}) \subseteq v_{2^n d}^s(x_n) \subseteq v_d^s(a) \setminus A_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

بنابراین بنابه قضیه ۱۳.۲ خواهیم داشت $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} v_{2^n d}^s(x_n) \neq \emptyset$.
از طرف دیگر، فرض کنیم $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} v_{2^n d}^s(x_n)$. در این‌صورت به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $y \notin A_n$؛ یعنی $y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ و درنتیجه $y \notin v_d^s(a)$، که تناقض است؛ زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$، $d^s(a, y) \leq d^s(a, x_n) + d^s(x_n, y) \leq 1 + 1/2^n$. $\square$

نتیجه ۲۲.۲. مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ بئر متقارن است اگر و فقط اگر در توپولوژی متقارن اشتراک هر گردایه از زیر مجموعه‌های باز چگال، چگال باشد.

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{P}$ بئر متقارن بوده و $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز غیرتهی در توپولوژی متقارن $\mathcal{P}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathrm{cl}^s(A_n) = \mathcal{P}$. بنا به ملاحظه ۹.۲ (الف)، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\emptyset = \mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^s(A_n) = \mathrm{int}^s(\mathcal{P} \setminus A_n),$$

لذا $\mathcal{P} \setminus A_n$ در توپولوژی متقارن هیچ‌جا چگال است؛ زیرا در توپولوژی متقارن بسته است. حال اگر $\mathrm{cl}^s(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \mathcal{P}$، آن‌گاه

$$\mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^s(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subseteq \mathcal{P} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{P} \setminus A_n),$$

یعنی $\mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^s(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ یک مجموعه باز غیرتهی و از رسته اول در توپولوژی متقارن $\mathcal{P}$ است که موجب تناقض می‌شود.
به‌عکس، اگر $\mathcal{P}$ بئر متقارن نباشد آن‌گاه شامل یک مجموعه باز غیرتهی و از رسته اول در توپولوژی متقارن مانند A خواهد بود، لذا گردایه شمارا از زیرمجموعه‌های هیچ‌جا چگال A_n در $\mathcal{P}$ وجود دارند به‌طوری‌که $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. درنتیجه بنا به قسمت (ب) در ملاحظه ۹.۲، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathrm{cl}^l(\mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^l(A_n)) = \mathcal{P}$، لذا خواهیم داشت:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^l(A_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P} \setminus A_n \subseteq \mathcal{P} \setminus A,$$

یعنی اشتراک $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P} \setminus \mathrm{cl}^l(A_n)$ در توپولوژی متقارن چگال نیست که تناقض است. $\square$

نتیجه **۲۳.۲.** هر مخروط موضعاً‌محدب شبه‌متری کامل متقارن، بئر متقارن است.

اثبات. فرض کنیم $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ کامل متقارن باشد. در این‌صورت اگر $A \subseteq \mathcal{P}$ یک مجموعه باز غیرتهی و از رسته اول در توپولوژی متقارن باشد، آن‌گاه عضوی مانند $a \in A$ و اسکالر $\lambda > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که $A \supseteq v^s_{\lambda d}(a)$ و درنتیجه $v^s_{\lambda d}(a)$ نیز در توپولوژی متقارن از رسته اول است که قضیه ۲۱.۲ را نقض می‌کند. □

مثال **۲۴.۲.** هرگاه $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کوشی متقارن در $Conv(\overline{\mathbb{R}})$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $\lambda > 0$، $n_\lambda \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m, n \geq n_\lambda$، $D^s(A_m, A_n) \leq \lambda$. اگر قرار دهیم

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf A_n, \quad b = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup A_n,$$

آن‌گاه $[a, b] \in Conv(\overline{\mathbb{R}})$ و

$$D^s([a, b], A_n) \leq D^s(A_m, A_n) \leq \lambda,$$

یعنی $A_n \to [a, b]$ و لذا $(Conv(\overline{\mathbb{R}}), \mathcal{V}_D)$ کامل متقارن است. به‌طور مشابه، زیرمخروط‌های $Conv(\mathbb{R})$ و $Conv(\mathbb{R}_+)$ نیز کامل متقارن می‌باشند.

در حالت خاص، اگر $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای کوشی متقارن در $\overline{\mathbb{R}}$ باشد، آن‌گاه $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ و $x_n \to a$، لذا $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{V}_d)$ کامل متقارن است. به‌ویژه، زیرمخروط‌های $\overline{\mathbb{R}}_+$ و $\mathbb{R}_+$ نسبت به توپولوژی متقارن القائی از شبه‌متر زیرخطی d کامل متقارن‌اند.

ملاحظه **۲۵.۲.** هرگاه $(\mathcal{P}, \mathcal{V}_d)$ کامل متقارن باشد، آن‌گاه طبق نتیجه ۲۳.۲، مخروط $\mathcal{P}$ در توپولوژی متقارن از رسته دوم است. لذا مطابق مثال ۲۴.۲، مخروط‌های $Conv(\overline{\mathbb{R}})$، $Conv(\mathbb{R})$ و $Conv(\mathbb{R}_+)$ در توپولوژی متقارن القائی از شبه‌متر زیرخطی D از رسته دوم‌اند. به‌ویژه، $\overline{\mathbb{R}}$، $\overline{\mathbb{R}}_+$ و $\mathbb{R}_+$ نیز در توپولوژی متقارن از رسته دوم‌اند.

فهرست منابع

[1] Azizi Mayvan A. and Motallebi M.R., *Ekeland's type variational principle for locally convex cone-valued functions*, J. Fixed Point Theory Appl., 23(4) (2021). https://doi.org/10.1007/s11784-021-00902-z.

[2] Azizi Mayvan A. and Motallebi M.R., *Pointwise well-posedness and scalarization of optimization problems for locally convex cone-valued functions,* Filomat, 34(5) (2020), 1571–1579.

[3] Farajzadeh A.P., *On the scalarization method in cone metric spaces,* Positivity, 18(4) (2014), 703-708.

[4] Keimel K. and Roth W., *Ordered cones and approximation,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1517, Springer Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1992.

[5] Megginson R.E., *An introduction to Banach space theory,* Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] Motallebi M.R., *Completeness on locally convex cones*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 352(10) (2014), 785-789.

[7] Motallebi M.R., *On weak completeness of products and direct sums in locally convex cones,* Period. Math. Hung., 75(2) (2017), 322-329.

[8] Motallebi M.R., *Weak compactness of direct sums in locally convex cones,* Stud. Sci. Math. Hung., 55(4) (2018), 487-497.

[9] Motallebi M.R. and Saiflu H., *Products and direct sums in locally convex cones,* Can. Math. Bull., 55(4) (2012), 783-798.

[10] Rudin W., *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Inc., New York, 1974.

[11] Tavakoli M, Farajzadeh A.P, Abdeljawad T. and Suantai S., *Some notes on cone metric spaces,* Thai J. Math., 16(1)(2018), 229-242.

[12] Yousefi Z. and Motallebi M.R., *On sublinear quasi-metrics and neighborhoods in locally convex cones,* Filomat, 36(3) (2022), 721-728.

[13] Zangenehmehr P, Farajzadeh A.P. and Vaezpour S.M., *On fixed point theory for generalized contractions in cone metric spaces via scalarizing,* Chiang Mai J. Sci., 42(4) (2015), 1038-1043.

Baire category theorem for the symmetric topology of sublinear quasi-metrics in locally convex cones

Z. Yousefi , M.R. Motallebi †

Department of Mathematics and Applications, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2022/3/1 Accepted: 2022/5/17

Abstract: In this paper, we investigate the completeness of cones in the symmetric topology induced by the sublinear quasi-metrics and prove that the symmetric neighborhoods are of the second category in the symmetric complete cone. Then we present an extension of the Baire category theorem for the symmetric topology of locally convex quasi-metric cones.

Keywords: Sublinear quasi-metric, symmetric complete cone, Baire category theorem.

†Corresponding author.

E-mail addresses: yousefi@uma.ac.ir (Z. Yousefi), motallebi@uma.ac.ir (M.R. Motallebi).