مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۲۷۱-۲۸۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38342.1958

طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر قضیه پایداری رازومیخین و نامساوی ماتریسی خطی برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری تاخیری

محمد غمگسار، سیدمهدی میرحسینی عالیزمینی × و محمود دادخواه

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۴/۱۸

چکیده: در این مقاله، از یک کنترل‌کننده مدلغزشی برای سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری تاخیری، استفاده شده است. سیستم تحت مطالعه در حضور اغتشاش و نامعینی است. هدف مقاله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی به‌گونه‌ای است که سیستم غیرخطی پایدار مجانبی شده و متغیرهای سیستم در یک زمان متناهی به سطح لغزش برسند. با استفاده از قضیه رازومیخین برای پایداری سیستم‌های کسری تاخیری و نامساوی ماتریسی خطی، شرایط لازم برای پایداری را به‌دست می‌آوریم. در نهایت، با دو مثال عددی صحت نتایج و کارایی روش پیش‌نهادی را بررسی کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های تاخیری، سیستم‌های مرتبه کسری، مدلغزشی، نامساوی ماتریسی خطی.

رده‌بندی ریاضی: 93D15; 93C10; 34K37.

۱ مقدمه

نظریه حسابان کسری که مشتق و انتگرال مرتبه صحیح را به مرتبه غیرصحیح گسترش می‌دهد، به یکی از جالب‌ترین مباحث در تجزیه و تحلیل رفتارهای دینامیکی سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری، تبدیل شده است [۲۵]. پایداری یک جنبه مهم در سیستم‌های کنترل است و انواع مختلف نتایج پایداری مانند پایداری مجانبی، پایداری زمان محدود، پایداری میتاگ-لفلر توسط محققان بررسی شده‌اند [۹، ۱۳، ۱۴]. درواقع، بسیاری از مسائل فیزیکی را می‌توان به‌عنوان سیستم‌های غیرخطی نشان داد، پایداری این سیستم‌ها در عمل پیچیده است. برای سیستم‌های کنترل غیرکسری پژوهش‌های زیادی صورت گرفته‌اند [۲۰-۲۴]. از سال ۱۹۹۶ که پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی ارائه شد [۱۹]، مسائل مربوط به پایداری و پایدارسازی سیستم‌های کسری نیز مورد توجه زیاد محققین قرار گرفته است. در سال‌های اخیر نتایج مختلفی برای سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری به‌دست آمده‌اند، به‌عنوان مثال، نتایج کنترل‌پذیری در [۱، ۱۷]، هم‌گام‌سازی در [۴] و مسئله پایداری سیستم‌های غیرخطی با تأخیر در [۳۱، ۳۲] بیان شده‌اند. روش مرتبه دوم لیاپانوف-کراسکوفسکی یک رهیافت موثر برای بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی است جای‌گاه این روش در مطالعه سیستم‌های غیرخطی، غیرقابل‌انکار است ولی این روش برای

×سید مهدی میرحسینی عالیزمینی
رایانامه: m_mirhosseini@pnu.ac.ir

سیستم‌های کسری تاخیری چندان کار آمد نیست. اساس این روش بر مبنای تابعکی موسوم به لیاپانوف-کراسوفسکی و مشتق آن است که محاسبه آن‌ها برای سیستم‌های کسری تاخیری، بسیار مشکل است. تلاش‌های زیادی برای رفع این مشکل انجام شده و تاکنون نیز ادامه یافته است. برای برخی از این تحقیق‌ها، نادرستی و یا ناقص بودن آن‌ها ثابت شده است [۱۰، ۲۶، ۳۶]. با توجه به اهمیت و چالشی بودن موضوع، تحقیقات هم‌چنان ادامه دارد. با توجه به دردسترس نبودن رابطه کارا و ساده برای پایداری سیستم‌های کسری تاخیری قضایای مربوط به پایداری سیستم‌های تاخیردار مانند قضایای رازومیخین و لیاپانوف -کراسکوفسکی برای کلاس‌های خاصی از این حالت‌ها توسعه داده شده‌اند. ابزاری که در تحقیق‌های جدید مورد توجه قرار گرفته است، نامساوی ماتریسی خطی یا به‌اختصار LMI است. LMI یک نامساوی ماتریس خطی است که براساس تعدادی متغیر به‌نام متغیرهای تصمیم‌گیری می‌توان مثبت یا منفی معین بودن یک ماتریس را مشخص نمود. اگر چه یک LMI صورت خاصی دارد ولی می‌تواند در بسیاری از نامساوی‌های ماتریسی و قیدهایی که در مسائل کنترلی وجود دارد مورد استفاده قرار گیرد. در [۳] برای یک سیستم کسری تاخیری بدون حضور اغتشاش یک LMI ارائه شده است. تقریبا همه مسئله‌های کنترل با اغتشاش و نامعینی مواجه‌اند. لذا، برای بهبود عمل‌کرد سیستم در برابر اغتشاش و نامعینی ناشناخته در سیستم‌های غیرخطی، تحقیق‌های زیادی صورت گرفته است [۸، ۲۷، ۲۹، ۳۰، ۳۳]. کنترل‌کننده‌های مقاوم در برابر اغتشاش و نامعینی سودمندند در میان کنترل‌کننده‌های مقاوم، مد لغزشی یا SMC به‌عنوان ابزاری موثر برای محاسبه پاسخ گذرا و هم‌چنین دست‌یابی به عمل‌کرد قوی سیستم‌ها کاملاً شناخته شده است. مزیت اصلی تکنیک مد لغزشی، این است که مسیرهای حالت را از حالت اولیه به سمت سطوح لغزش از پیش تعریف‌شده برده و هم‌چنین دست‌رسی در زمان متناهی به این سطح لغزش را در فضای حالت تضمین می‌کند [۶]. علاوه بر این، از دیگر ویژگی‌های جذاب مد لغزشی، می‌توان به کاهش مرتبه سیستم، پیاده سازی آسان، پاسخ گذرای قابل قبول، عدم حساسیت به پارامترهای مختلف و امکان پایدار کردن سیستم های غیرخطی، اشاره نمود. در این میان هدف اصلی مد لغزشی مرتبه اول رساندن مسیرهای سیستم به سطح لغزش است، که برای کنترل عدم قطعیت‌ها و آشفتگی‌ها مفید خواهد بود. هدف از مد لغزشی مرتبه دوم نه تنها کاهش سطح لغرش به صفر، بلکه صفر شدن مشتق مرتبه اول آن است [۷]. در مورد مد لغزشی مرتبه r، ازمشتق مرتبه $(r-۱)$ سطح لغزش استفاده می‌شود. اخیراً کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های مختلف مانند سیستم‌های فازی، سیستم‌های آشوب‌ناک، و سیستم‌های تصادفی مطرح شده است [۱۵، ۱۸، ۲۸]. در [۳۵]، بدون استفاده از LMI ، یک کنترل‌کننده مد لغزشی مستقل از تاخیر برای یک کلاس از سیستم‌های کسری ارائه گردیده است. از تمام بحث‌های فوق و با توجه به کارهای موجود، هنوز توجه کمی به مسئله طراحی مد لغزشی برای سیستم‌های غیرخطی و مرتبه کسری شده است و طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر LMI که در آن برخی قیدها مانند بهینه کردن عمل‌کرد سیستم وجود دارد، هنوز یک مسئله باز پژوهشی است. در این مقاله، یک استراتژی مبتنی بر کنترل مدلغزشی انتگرال مرتبه کسری ارائه می‌شود، که بر اساس آن می‌توان یک رده از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری تاخیردار شامل اغتشاش و نامعینی را پایدار نمود. برای رسیدن به این هدف یک سطح لغزشی انتگرالی کسری ارائه می‌کنیم و با انتخاب یک قانون کنترل گسسته تضمین می‌نماییم که متغیرهای حالت پس از رسیدن به سطح لغزش برروی آن باقی خواهند ماند. برای اثبات این موضوع قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه با استفاده از قضیه پایداری رازومیخین برای سیستم‌های تاخیردار و نامساوی خطی ماتریسی، قضیه‌ای برای محاسبه پارامتر موثر در محاسبه سطح لغزش، بیان می‌کنیم. دو مثال عددی برای نشان‌دادن قابلیت و کارا بودن نتایج شبیه‌سازی شده است. در نهایت، این مقاله را با نتیجه گیری به پایان می‌رسانیم.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱.۲. ([۱۲]). انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α ، تابع $x(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_t^\alpha x(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_۰}^{t} (t-s)^{\alpha-۱} x(s) ds, \qquad (۱.۲)$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است.

تعریف ۲.۲. ([۱۲]). مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$ تابع $x(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{t_۰}^{C}D_t^\alpha x(t) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_۰}^{t} (t-s)^{n-\alpha-۱} x^{(n)}(s) ds, \quad t \geq t_۰ \geq ۰, \qquad (۲.۲)$$

که n یک عدد صحیح است به‌قسمی که $n-۱ < \alpha < n$. در حالت خاص، برای $۰ < \alpha < ۱$، داریم:

$$ {}_{t_۰}^{C}D_t^\alpha x(t) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)} \int_{t_۰}^{t} \frac{x'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad t > t_۰ \geq ۰. \qquad (۳.۲)$$

به‌ویژه خواهیم داشت ${}_{t_۰}^{C}D_t^۰ x(t) = x(t)$ و ${}_{t_۰}^{C}D_t^۱ x(t) = x'(t)$.

لم ۳.۲. ([۵]). برای تابع برداری پیوسته و مشتق‌پذیر $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و برای تابع برداری پیوسته و مشتق‌پذیر $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$، داریم:

$$D^{\alpha}(x^T(t)Px(t)) \leq 2x^T(t)PD^{\alpha}x(t), \forall\alpha \in (0,1), \forall t \geq 0. \quad (۴.۲)$$

لم ۴.۲. (نامساوی شور) ([۳]). برای ماتریس‌های ثابت و با ابعاد سازگار A_1، B_1 و C_1 که $A_1 = A_1^T$ و $B_1 = B_1^T > 0$ داریم:

$$A_1 + C_1^T B_1^{-1} C_1 < 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & C_1^T \\ C_1 & -B_1 \end{bmatrix} < 0.$$

لم ۵.۲. (نامساوی کوشی) ([۶]). برای ماتریس های X و Y با ابعاد سازگار و برای ثابت $\delta > 0$ و بردارهای $x, y \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$2x^T XYy \leq \delta^{-1}x^T X^T Xx + \delta y^T Y^T Yy.$$

لم ۶.۲. ([۱۱]). برای ماتریس‌های X و Y با ابعاد سازگار و برای ثابت $\delta > 0$ و ماتریس $F(t)$ با شرط $F(t)F^T(t) \leq I$، داریم:

$$XF(t)Y + [XF(t)Y]^T \leq \delta^{-1}XX^T + \delta Y^T Y.$$

لم ۷.۲. ([۳۴]). مشتق مرتبه کسری α $(0 < \alpha < 1)$ تابع $\upsilon(x,t) = x^T x$ به‌شکل زیر است:

$$D_t^{\alpha}\upsilon(t) = \left(D_t^{\alpha}x\right)^T x + x^T\left(D_t^{\alpha}x\right) + 2\Psi, \quad (۵.۲)$$

که در آن:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)\left(D_t^k x\right)^T\left(D_t^{\alpha-k}x\right)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k+\alpha)}. \quad (۶.۲)$$

و یک عدد مثبت B^* وجود دارد به‌نحوی که $|\Psi| \leq B^* x^T x$.

قضیه ۸.۲. (پایداری رازومیخین برای سیستم‌های مرتبه کسری تاخیر دار) ([۳۲]). فرض کنیم $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ توابعی غیر کاهشی و پیوسته باشند، علاوه بر این υ_1, υ_2 برای $s > 0$ مثبت و $\upsilon_1(0) = \upsilon_2(0) = 0$ و υ_2 تابعی اکیدا صعوی باشد. در این صورت اگر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر V به‌شکل $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ موجود باشد که

$$\upsilon_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \upsilon_2(\|x\|), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n,$$

و هم‌چنین هر زمانی که

$$V(t+\theta, x(t+\theta)) \leq q^* V(t, x(t)), \quad q^* > 1, \forall\theta \in [-\tau, 0], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

رابطه زیر بر قرار باشد:

$$D_t^{\alpha}V(t, x(t)) \leq -\upsilon_3(\|x\|), \quad 0 < \alpha < 1,$$

در آن صورت سیستم $D_t^{\alpha}x(t) = f(t, x_t)$ به‌طور مجانبی پایدار است.

۳ معرفی سیستم مورد مطالعه

سیستم غیرخطی مرتبه کسری تاخیری به‌شکل زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + A_{\tau}x(t-\tau) + Bu(t) + f\left(t, x(t)\right), \quad t \geq t_0, \\ x(t) &= \Phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$، بردار حالت سیستم و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل‌اند. $0 < \alpha < 1$ نشان‌دهنده مرتبه کسری سیستم و ماتریس‌های A, B, A_τ ثابت و سازگار از نظر ابعادند. بردار $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی برداری غیرخطی است که در شرط لیپ‌شیتس صدق می‌کند، یعنی

$$\exists \lambda > 0, \|f(x(t))\| \leq \lambda \|x(t)\|, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq t_0.$$

تابع شرایط آغازی $\Phi(t) \in C\left([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n\right)$، نیز پیوسته است. تاخیر زمانی $\tau > 0$ ثابت است. در ادامه برای سیستم (۱.۳) اثر عدم قطعیت را بررسی می‌کنیم و یک قانون کنترلی بر مبنای مدلغزشی برای پایدارسازی آن در حضور اغتشاش طراحی می‌کنیم. عدم قطعیت در یک سیستم واقعی می‌تواند از منابع مختلفی ناشی شود. چندین روش برای در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در یک سیستم غیرخطی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، درنظر گرفتن آن به‌عنوان یک اغتشاش با نرم کران‌دار و متغیر با زمان است [۱۶] یعنی جملات شامل عدم‌قطعیت را به‌شکل زیر قرار می‌دهیم:

$$g\left(t\ , x(t), x(t-\tau)\right) = \Delta A(t)x(t) + \Delta A_\tau(t)x(t-\tau), \tag{۲.۳}$$

که در آن داریم:

$$\Delta A(t) = G_1 F_1(t) H_1, \quad \Delta A_\tau(t) = G_2 F_2(t) H_2, \tag{۳.۳}$$

و همچنین

$$F_i(t) F_i^T(t) \leq I_n, \quad i = 1, 2. \tag{۴.۳}$$

که در آن I_n نشان‌دهنده ماتریس همانی از مرتبه n است. لذا سیستم مورد مطالعه در این مقاله را که شامل اغتشاش و عدم‌قطعیت است، را می‌توان به‌شکل زیر بیان نمود:

$${}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t} x(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + \left(A_\tau + \Delta A_\tau(t)\right)x(t-\tau) + Bu(t) + f\left(t, x(t)\right), \quad t \geq t_0. \tag{۵.۳}$$

در ادامه، نخست با پیش‌نهاد یک سطح لغزشی که از جمع دو قسمت انتگرال مرتبه کسری از متغیرهای حالت و جبران‌کننده لغزشی تشکیل شده‌اند یک قانون کنترلی مد لغزشی طراحی می‌گردد که متغیرهای حالت سیستم در یک زمان محدود به این سطح لغزشی برسند و برای زمان‌های بعدی روی آن باقی بمانند. سپس با استفاده از قضیه پایداری رازومیخین شرایط لازم برای پایداری سیستم حلقه بسته را بر حسب نامساوی ماتریسی خطی بیان می‌کنیم.

۴ طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی

سطح لغزشی انتگرالی برای سیستم (۱.۳) را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda(t) = CI^{1-\alpha}x(t) - \int_{t_0}^{t} C(A + BK)x(\xi)d\xi, \tag{۱.۴}$$

که $\Lambda(t) \in \mathbb{R}^m$ نشان‌دهنده بردار سطح لغزش و $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ بردار ماتریس بهره کنترل است، که باید محاسبه شوند. ماتریس $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ که در ادامه تعیین می‌شود یک ماتریس ثابت است که به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که CB معکوس‌پذیر باشد. $I^{1-\alpha}$ نشان‌دهنده انتگرال کسری ریمان–لیوویل است. همچنین برای سیستم (۵.۳) سطح لغزشی را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda(t) = CI^{1-\alpha}x(t) - \int_{t_0}^{t} C\left[(A + \Delta(\xi)A + BK)x(\xi) + \Delta A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\right]d\xi. \tag{۲.۴}$$

قضیه ۱.۴. سیستم (۱.۳) را در نظر می‌گیریم، قانون کنترلی زیر هم‌گرایی متغیرهای حالت را به سطح لغزش در زمان محدود، با در نظرگرفتن سطح لغزش به‌شکل (۱.۴) را تضمین می‌کند:

$$u(t) = Kx(t) - (CB)^{-1}\rho(x(t))\,\mathrm{sign}(\Lambda(t)), \tag{۳.۴}$$

به‌طوری که

$$\rho(x(t)) = \beta + (\|CA_\tau\| + \|C\|\lambda)|\sup \|x\|, \tag{۴.۴}$$

و هم‌چنین $\beta > ۰$. در این‌جا تابع $\mathrm{sign}[.] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ تابع علامت است که به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{sign}(\Lambda(t)) = [\mathrm{sign}\,(\Lambda_i(t)]_{m\times ۱}\,,$$

که در آن

$$\mathrm{sign}(\Lambda_i(t)) = \begin{cases} ۱, & \Lambda_i(t) > ۰, \\ ۰, & \Lambda_i(t) = ۰, \quad i = ۱, \cdots, m, \\ -۱, & \Lambda_i(t) < ۰. \end{cases}$$

اثبات. با مشتق‌گیری از $\Lambda(t)$ در رابطه (۱.۴) داریم:

$$\dot{\Lambda}(t) = CD^\alpha x(t) - C[(A+BK)x(t)].$$

با جای‌گذاری از رابطه (۱.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= C(Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + Bu(t) + f(x(t)) - C[(A+BK)x(t)] \\ &= CA_\tau x(t-\tau) + CBu(t) + Cf(x(t)) - CBKx(t), \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

با جای‌گذاری از رابطه (۳.۴) در بالا داریم:

$$\dot{\Lambda}(t) = CA_\tau x(t-\tau) - \rho\,\mathrm{sign}(\Lambda(t)) + Cf(x(t)),$$

برای اثبات نتایج مورد نظر، تابع لیاپانوف را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$V(t) = \frac{۱}{۲}\Lambda^T(t)\Lambda(t).$$

با مشتق‌گیری از V نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \Lambda^T(t)\dot{\Lambda}(t) \\ &= \Lambda^T(t)(CA_\tau x(t-\tau) - \rho\,\mathrm{sign}(\Lambda(t)) + Cf(x(t)) \\ &\leq \|CA_\tau x(t-\tau)\|\|\Lambda(t)\| - \rho\|\Lambda(t)\| + \|Cf\|\|\Lambda(t)\| \\ &\leq (\|CA_\tau x(t-\tau)\| + \|Cf\|)\|\Lambda(t)\| - \rho\|\Lambda(t)\|. \end{aligned}$$

چون $\|x(t-\tau)\| < \sup \|x(t)\|$ و $\|f(x(t))\| < \lambda\|x(t)\|$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (\|CA_\tau x(t-\tau)\| + \|Cf\|)\|\Lambda(t)\| - \rho\|\Lambda(t)\| \\ &\leq (\|CA_\tau\| + \|C\|\lambda)\sup \|x(t)\|\|\Lambda(t)\| - \rho\|\Lambda(t)\| \\ &= (\|CA_\tau\| + \|C\|\lambda)\sup \|x(t)\| - \rho)\|\Lambda(t)\| \\ &\leq -(-\|CA_\tau\| - \|C\|\lambda)\sup \|x(t)\| + \rho)\|\Lambda(t)\|. \end{aligned}$$

با قرار دادن $\rho = \beta + (\|CA_\tau\| + \|C\|\lambda)|\sup \|x\|$ و به خاطر مثبت بودن β داریم:

$$\dot{V}(t) = \Lambda^T(t)\dot{\Lambda}(t) \leq -\beta\|\Lambda(t)\| < ۰. \tag{۶.۴}$$

حال می‌توان ثابت نمود که $\Lambda(t)$ در یک زمان متناهی مانند T^* به صفر می‌رسد و داریم:

$$t_۰ \leq T^* \leq |\frac{\Lambda(t_۰)}{\beta}| + t_۰,$$

که این بدین معنا است که در یک زمان متناهی منحنی‌های حالت به سطح لغزش می‌رسند. برای این کار فرض می‌کنیم $\Lambda(t_\circ) \neq \circ$، لذا می‌توان برای $\Lambda(t_\circ)$ از نظر علامت، دو حالت مثبت و منفی را در نظر گرفت. اگر $\Lambda(t_\circ) < \circ$ ، از رابطه (۶.۴) داریم $\dot{\Lambda}(t) \geq \beta$. لذا

$$\int_{t_\circ}^{t} \dot{\Lambda}(t) d\xi \geq \int_{t_\circ}^{t} \beta d\xi = \beta(t - t_\circ) \Rightarrow \Lambda(t) - \Lambda(t_\circ) \geq \beta(t - t_\circ).$$

حال اگر داشته باشیم $\Lambda(t) = \circ$ ، در این صورت داریم:

$$-\Lambda(t_\circ) \geq \beta(t - t_\circ) \Rightarrow -\Lambda(t_\circ) + \beta t_\circ \geq \beta t \Rightarrow t = T^* \leq (-\frac{\Lambda(t_\circ)}{\beta}) + t_\circ,$$

همچنین اگر $\Lambda(t_\circ) > \circ$ خواهیم داشت $\dot{\Lambda}(t) \leq -\beta$ و

$$\int_{t_\circ}^{t} \dot{\Lambda}(t) d\xi \leq \int_{t_\circ}^{t} -\beta d\xi = -\beta(t - t_\circ) \Rightarrow \Lambda(t) - \Lambda(t_\circ) \leq -\beta(t - t_\circ).$$

لذا با کنار هم قرار دادن نتیجه در دوحالت، هم‌گرایی متغیرها به سطح لغزش در زمان متناهی T^* اثبات می‌گردد. □

قضیه ۲.۴. سیستم (۵.۳) را در نظر می‌گیریم، قانون کنترلی (۳.۴) با شرایط مطرح شده در قضیه ۱.۴، هم‌گرایی متغیرهای حالت را به سطح لغزش در زمان محدود، با در نظرگرفتن سطح لغزش به‌صورت (۲.۴) را تضمین می‌کند.

اثبات. با مشتق‌گیری از $\Lambda(t)$ در رابطه (۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{\Lambda}(t) &= CD^{\alpha}x(t) - C[(A + \Delta A + BK)x(t) + \Delta A_{\tau}x(t - \tau)] \\
&= C((A + \Delta A)x(t) + (A_{\tau} + \Delta A_{\tau})x(t - \tau) + Bu(t) + f(t, x(t)) \\
&- (C[(A + \Delta A + BK)x(t) + \Delta A_{\tau}x(t - \tau)] \\
&= CA_{\tau}x(t - \tau) + CBu(t) + Cg(t, x(t), x(t - \tau)) - CBKx(t),
\end{aligned}$$

با جای‌گذاری u از رابطه (۳.۴) در بالا داریم:

$$\dot{\Lambda}(t) = CA_{\tau}x(t - \tau) - \rho\, \mathrm{sign}(\Lambda(t)) + Cf(x(t)).$$

برای اثبات نتایج مورد نظر برای سیستم (۵.۳)، نیز تابع لیاپانوف را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(t) = \frac{۱}{۲}\Lambda^{T}(t)\Lambda(t). \tag{۷.۴}$$

حال دقیقا با طی روندی مشابه با اثبات قضیه ۱.۴، می‌توان نشان داد هم‌گرایی متغیرهای حالت سیستم (۵.۳) به سطح لغزش در زمان محدود، تضمین می‌شود.

□

۵ پایداری سیستم حلقه بسته

در این بخش، روش طراحی مناسب ماتریس K برای تضمین پایداری مجانبی معادله حرکت روی سطح لغزش تعریف‌شده توسط رابطه‌های (۱.۴) و (۲.۴) ارائه می‌شود. با جای‌گذاری

$$u(t) = Kx(t) - (CB)^{-۱}\rho(x(t))\, \mathrm{sign}(\Lambda(t)),$$

در معادله سیستم (۱.۳)، داریم:

$${}_{\circ}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = (A + BK)x(t) + A_{\tau}x(t - \tau) - B(CB)^{-۱}\rho(x(t))\, \mathrm{sign}(\Lambda(t)) + f\left(t, x(t)\right). \tag{۱.۵}$$

حال با توجه به قضیه ۱.۴ متغیرهای حالت در زمان متناهی به سطح لغزش می‌رسند. لذا برروی سطح لغزش به‌ازای $t > T^*$ داریم $\Lambda(t) = \circ$ درنتیجه به سیستم حلقه بسته زیر می‌رسیم:

$$ {}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = (A + BK)x(t) + A_\tau x(t-\tau) + f\left(t, x(t)\right). \qquad (۲.۵)$$

همچنین برای سیستم (۵.۳)، نیز سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$ {}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = (A + BK + \Delta A)x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau)x(t-\tau) + f\left(t, x(t)\right). \qquad (۳.۵)$$

قضیه ۱.۵. سیستم (۱.۳) با مدلغزشی تعریف‌شده توسط رابطه (۱.۴)، پایدار است اگر ماتریس متقارن و مثبت معین P و ماتریس Y و اعداد مثبت $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$، موجود باشند به‌قسمی که

$$\begin{bmatrix} M_۱ & \lambda P & I \\ \lambda P & -\delta_۳ I & \circ \\ I & \circ & -\delta_۱ I \end{bmatrix} < \circ, \qquad (۴.۵)$$

که $M_۱ = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \delta_۲ P + \delta_۳ I$. همچنین فرض می‌کنیم $\delta_۱ \|A_\tau\|^۲ P < \delta_۲ I$. در آن صورت ماتریس بهره کنترل K در (۳.۴) برابر می‌شود با $K = YP^{-۱}$، که در نتیجه پایداری سیستم حلقه بسته تضمین می‌شود.

اثبات. با استفاده از قضیه پایداری رازومیخین برای سیستم‌های مرتبه کسری همراه با تاخیر، نتایج بالا را اثبات می‌کنیم. برای این کار قرار می‌دهیم:

$$V(t) = x^T P^{-۱} x(t).$$

چون ماتریس P مثبت معین است، لذا از جبرخطی می‌دانیم:

$$\lambda_{min}(P^{-۱}) x^T(t)x(t) \leq x^T(t) P^{-۱} x(t) \leq \lambda_{max}(P^{-۱}) x^T(t)x(t).$$

لذا، با انتخاب توابع $v_۱(x)$، $v_۲(x)$، به‌شکل زیر، شرط قضیه رازومیخین برای توابع $v_۱(x)$، $v_۲(x)$، و $V(t)$، برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} v_۱(x) &= \lambda_{min}(P^{-۱})\|x\|^۲, \\ v_۲(x) &= \lambda_{max}(P^{-۱})\|x\|^۲. \end{aligned}$$

برای تحقق شرط دیگر قضیه رازومیخین، از رابطه (۲.۵) می‌دانیم که سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر است:

$$ {}_{t_\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = (A + BK)x(t) + A_\tau x(t-\tau) + f\left(t, x(t)\right).$$

حال با استفاده از لم ۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &\leq ۲x^T P^{-۱} D^\alpha x(t) \\ &\leq ۲x^T P^{-۱}\left[(A+BK)x(t) + A_\tau x(t-\tau) + f\left(t, x(t)\right)\right] \\ &\leq ۲x^T P^{-۱}(A+BK)x(t) + ۲x^T P^{-۱} A_\tau x(t-\tau) + ۲x^T P^{-۱} f(t, x(t)). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن رابطه بالا به‌صورت مجموع سه جمله، برای جمله اول داریم:

$$۲x^T P^{-۱}(A+BK)x = x^T[P^{-۱}A + A^T P^{-۱} + P^{-۱}BK + K^T B^T P^{-۱}]x.$$

برای جمله دوم از لم ۵.۲ (نامساوی کوشی) داریم:

$$۲x^T P^{-۱} A_\tau x(t-\tau) \leq \delta_۱ x^T(t-\tau) A_\tau^T A_\tau x(t-\tau) + \delta_۱^{-۱} x^T P^{-۱} P^{-۱} x.$$

برای جمله سوم، از لم ۵.۲ و این‌که f در شرط لیپ‌شیتس صدق می‌کند، داریم:

$$۲x^TP^{-۱}f \leq \delta_۳ x^TP^{-۱}P^{-۱}x + \delta_۳^{-۱}\lambda^۲ x^Tx.$$

با تر کیب این سه رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) \leq x^T \quad [\quad & P^{-۱}A + A^TP^{-۱} + P^{-۱}BK + K^TB^TP^{-۱} + \delta_۳ P^{-۱}P^{-۱} + \delta_۳^{-۱}\lambda^۲ I \\ + \quad & \delta_۱^{-۱}P^{-۱}P^{-۱}]x + \delta_۱ x^T(t-\tau)A_\tau^T A_\tau x(t-\tau). \end{aligned}$$

حال برای استفاده از شرط قضیه رازومیخین، قرار می‌دهیم:

$$q^* = \delta + ۱ > ۱,\ \delta > ۰,$$

لذا اگر داشته باشیم:

$$V(t+s, x(t+s)) = x^T(t+s)P^{-۱}x(t+s) < q^*x^TP^{-۱}x,\ s \in [-\tau, ۰].$$

در این صورت با جای‌گذاری $s = -\tau$ در رابطه بالا داریم :

$$x^T(t-\tau)P^{-۱}x(t-\tau) < q^*x^TP^{-۱}x.$$

هم‌چنین طبق شرط قضیه، می‌توان قرار داد:

$$\delta_۱\|A_\tau\|^۲P < \delta_۲ I.$$

در نتیجه داریم:

$$\delta_۱ x^T(t-\tau)A_\tau^T A_\tau x(t-\tau) < \delta_۲ x^T(t-\tau)P^{-۱}x(t-\tau) < \delta_۲ q^* x^TP^{-۱}x.$$

لذا خواهیم داشت:

$$D^\alpha V(t) \leq x^TM^*x + \delta_۲ q^* x^TP^{-۱}x. \tag{۵.۵}$$

که $q^* = \delta + ۱$ و

$$M^* = P^{-۱}A + A^TP^{-۱} + P^{-۱}BK + K^TB^TP^{-۱} + \delta_۲ P^{-۱}P^{-۱} + \delta_۳^{-۱}\lambda^۲ I + \delta_۱^{-۱}P^{-۱}P^{-۱}.$$

چون δ یک پارامتر دلخواه است، و سمت چپ رابطه (۵.۵) به آن بستگی ندارد. پس با قرار دادن حد δ به سمت صفر، خواهیم داشت:

$$D^\alpha V(t) \leq x^TMx. \tag{۶.۵}$$

که در آن

$$M = P^{-۱}A + A^TP^{-۱} + P^{-۱}BK + K^TB^TP^{-۱} + \delta_۲ P^{-۱}P^{-۱} + \delta_۳^{-۱}\lambda^۲ I + \delta_۱^{-۱}P^{-۱}P^{-۱} + \delta_۲ P^{-۱}.$$

حال M را از چپ و راست در P ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $K = YP^{-۱}$، در نتیجه رابطه (۶.۵) تبدیل می‌شود به:

$$D^\alpha V(t) \leq x^T[AP + PA^T + BY + Y^TB^T + \delta_۱^{-۱}I + \delta_۲ P + \delta_۳ I + \delta_۳^{-۱}\lambda^۲ PP]x.$$

در نتیجه طبق لم ۴.۲ (نامساوی شور) $D^\alpha V(t) \leq ۰$ اگر داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} M_۱ & \lambda P & I \\ \lambda P & -\delta_۳ I & ۰ \\ I & ۰ & -\delta_۱ I \end{bmatrix} < ۰,$$

که $M_۱ = AP + PA^T + BY + Y^TB^T + \delta_۲ P + \delta_۳ I$. در نهایت چون رابطه

$$V(t+\theta, x(t+\theta)) \leq q^*V(t, x(t)),\ q^* > ۱, \theta \in [-\tau, ۰],$$

نتیجه می‌دهد $D^\alpha V(t) \leq ۰$ پس قضیه رازومیخین، پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند و اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۲.۵. سیستم (۵.۳) با مد لغزشی تعریف‌شده (۲.۴) روی سطح لغزش پایدار است اگر ماتریس متقارن و مثبت معین P و ماتریس Y و اعداد مثبت $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$،$\delta_۴$،$\delta_۵$ موجود باشند به‌قسمی که

$$\begin{bmatrix} N_۲ & PH_۱^T & G_۲ & P\sqrt{۲}\beta^* & \lambda P & I \\ * & -\delta_۳ I & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ * & * & -\delta_۴ I & ۰ & ۰ & ۰ \\ * & ۰ & ۰ & -\beta^* I & ۰ & ۰ \\ * & ۰ & ۰ & ۰ & -\delta_۵ I & ۰ \\ * & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -\delta_۱ I \end{bmatrix} < ۰, \qquad (۷.۵)$$

که $N_۲ = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \delta_۲ P + \delta_۵ I + \delta_۳ G_۱ G_۱^T$. همچنین فرض می‌کنیم $\delta_۱ \|A_\tau\|^۲ P + \delta_۴ H_۲ H_۲^T P < \delta_۲ I$. در آن صورت ماتریس بهره کنترل K در رابطه (۳.۴) برابر خواهد بود با $K = YP^{-۱}$، که در این صورت پایداری سیستم حلقه بسته تضمین می‌شود.

اثبات. با استفاده از قضیه پایداری رازومیخین برای سیستم‌های مرتبه کسری همراه با تاخیر، پایداری سیستم بالا را اثبات می‌کنیم. برای این کار قرار می‌دهیم:

$$V(t) = x^T P^{-۱} x(t).$$

از قضیه ۱.۵ می‌دانیم که شرط اول و دوم قضیه رازومیخین برای V بر قرار است. برای شرط سوم با استفاده از لم ۷.۲ از $V(t)$ مشتق می‌گیریم:

$$D^\alpha V(t) = \left(D^\alpha x\right)^T P^{-۱} x + x^T P^{-۱}\left(D^\alpha x\right) + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\Gamma(۱+\alpha)\left(D^k x\right)^T P^{-۱}\left(D^{\alpha-k} x\right)}{\Gamma(۱+k)\Gamma(۱-k+\alpha)},$$

با جای‌گذاری برای سیستم حلقه بسته از رابطه (۳.۵)، داریم:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t) &= [A_{eq} x(t) + A_\tau x(t-\tau) + g(t, x(t), x_\tau(t) + f(t, x(t)]^T P^{-۱} x \\ &+ x^T P\,[A_{eq} x(t) + A_\tau x(t-\tau) + g(t, x(t), x_\tau(t)) + f(t, x(t)] + ۲\Psi^*, \end{aligned} \qquad (۸.۵)$$

که در آن

$$g(t, x(t), x(t-\tau)) = \Delta A x(t) + \Delta_\tau x(t-\tau),$$

و

$$A_{eq} = A + BK,$$

و $\Psi^* = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\Gamma(۱+\alpha)\left(D_t^k x\right)^T P^{-۱}\left(D_t^{\alpha-k} x\right)}{\Gamma(۱+k)\Gamma(۱-k+\alpha)}$، می‌دانیم این سری نامتناهی از مشتق‌های مرتبه کسری، کران‌دار است و به‌ازای یک عدد ثابت و مثبت β^* داریم [۷، ۳۴]:

$$|\Psi^*| \leq \beta^* x^T x(t).$$

حال با در نظر گرفتن رابطه (۸.۵) برای $D^\alpha V(t)$، به‌صورت مجموع چهار جمله، برای جمله اول داریم:

$$x^T[A_{eq}^T P^{-۱} + P^{-۱} A_{eq}]x = x^T[P^{-۱} A + A^T P^{-۱} + P^{-۱} BK + K^T B^T P^{-۱}]x,$$

همچنین برای جمله دوم از لم ۵.۲ (نامساوی کوشی) داریم:

$$۲x^T P^{-۱} A_\tau x(t-\tau) \leq \delta_۱ x^T(t-\tau) A_\tau^T A_\tau x(t-\tau) + \delta_۱^{-۱} x^T P^{-۱} P^{-۱} x,$$

برای جمله سوم، از لم ۶.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
۲x^TP^{-۱}(\Delta Ax(t)+\Delta_\tau x(t-\tau)) &= ۲x^TP^{-۱}(G_۱F_۱(t)H_۱x(t)+G_۲F_۲(t)H_۲x(t-\tau))\\
&\leq \delta_۳x^TP^{-۱}G_۱G_۱^TP^{-۱}x+\delta_۳^{-۱}x^TH_۱^TH_۱x(t)\\
&\quad +\delta_۴^{-۱}x^TP^{-۱}G_۲G_۲^TP^{-۱}x+\delta_۴x^T(t-\tau)H_۲^TH_۲x(t-\tau),
\end{aligned}$$

همچنین

$$۲x^TP^{-۱}f(t,x(t))\leq \delta_۵x^TP^{-۱}P^{-۱}x+\delta_۵^{-۱}f(t,x(t))f^T(t,x(t)).$$

پس خواهیم داشت:

$$۲x^TP^{-۱}f(t,x(t))\leq \delta_۵x^TP^{-۱}P^{-۱}x+\delta_۵^{-۱}\lambda^۲x^Tx.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
D^\alpha V(t)\leq x^T\ &[\ P^{-۱}A+A^TP^{-۱}+P^{-۱}BK+K^TB^TP^{-۱}+\delta_۱^{-۱}P^{-۱}P^{-۱}+\delta_۳P^{-۱}G_۱G_۱^TP^{-۱}\\
&+\ \delta_۳^{-۱}H_۱^TH_۱+\delta_۴^{-۱}P^{-۱}G_۲G_۲^TP^{-۱}+\delta_۵P^{-۱}P^{-۱}+\delta_۵^{-۱}\lambda^۲I+۲\beta^*I]x\\
&+\ x^T(t-\tau)[\delta_۱A_\tau^TA_\tau+\delta_۴H_۲^TH_۲]x(t-\tau).
\end{aligned}$$

طبق فرض قضیه داریم:

$$[\delta_۱A_\tau^TA_\tau+\delta_۴H_۲^TH_۲]<\delta_۲P^{-۱}.$$

لذا

$$D^\alpha V(t)\leq x^TN^*x+\delta_۲x^T(t-\tau)P^{-۱}x(t-\tau),$$

که در آن

$$\begin{aligned}
N^*=\ &[\ P^{-۱}A+A^TP^{-۱}+P^{-۱}BK+K^TB^TP^{-۱}+\delta_۱^{-۱}P^{-۱}P^{-۱}+\delta_۳P^{-۱}G_۱G_۱^TP^{-۱}\\
&+\ \delta_۳^{-۱}H_۱^TH_۱+\delta_۴^{-۱}P^{-۱}G_۲G_۲^TP^{-۱}+\delta_۵P^{-۱}P^{-۱}+\delta_۵^{-۱}\lambda^۲I+۲\beta^*I].
\end{aligned}$$

حال برای استفاده از قضیه رازومیخین، قرار می‌دهیم:

$$q^*=\delta+۱>۱,\ \delta>۰,$$

لذا اگر داشته باشیم:

$$x^T(t+s)P^{-۱}x(t+s)<q^*x^TP^{-۱}x,\ ,s\in[-\tau,۰],$$

با جای‌گذاری $s=-\tau$ داریم:

$$x^T(t-\tau)P^{-۱}x(t-\tau)<q^*x^TP^{-۱}x,$$

در آن صورت

$$D^\alpha V(t)\leq x^TN^*x+\delta_۲x^T(t-\tau)P^{-۱}x(t-\tau)\leq x^TN^*x+\delta_۲q^*x^TP^{-۱}x,$$

که $q^*=\delta+۱$ و در این‌جا قرار می‌دهیم $\delta\longrightarrow ۰$، درنتیجه خواهیم داشت:

$$D^\alpha V(t)\leq x^TN^*x+\delta_۲x^TP^{-۱}x=x^T(N^*+\delta_۲P^{-۱})x. \qquad (۹.۵)$$

حال $N_۱^* = N^* + \delta_۲ P^{-۱}$ را از چپ و راست در P ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $K = YP^{-۱}$ درنتیجه رابطه (۹.۵) تبدیل می‌شود به:

$$D^{\alpha}V(t) \leq x^T N_۱ x.$$

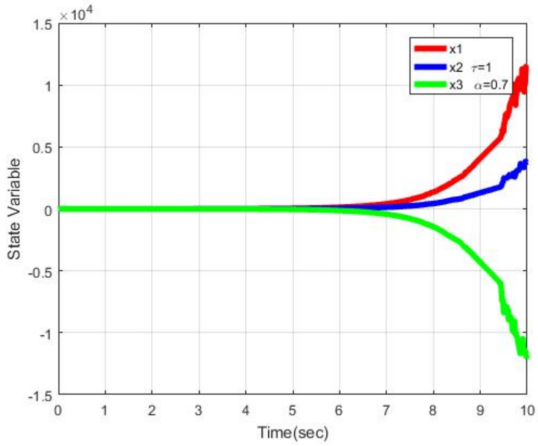
که در آن داریم:

$$\begin{aligned} N_۱ = \quad [& \quad AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \delta_۱^{-۱} I + \delta_۳ G_۱ G_۱^T \\ + & \quad \delta_۳^{-۱} P H_۱^T H_۱ P + \delta_۴^{-۱} G_۲ G_۲^T + \delta_۵ I + \delta_۵^{-۱} \lambda^۲ PP + ۲\beta^* PP + \delta_۲ P]. \end{aligned}$$

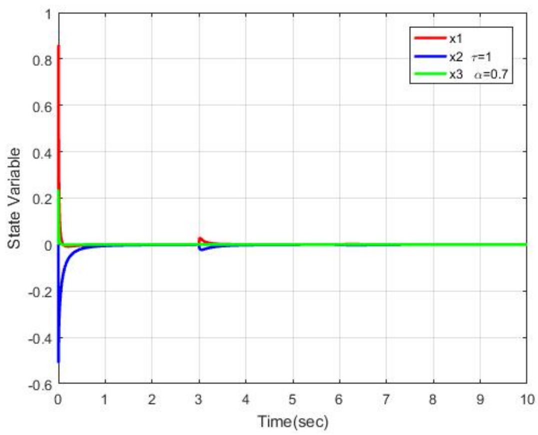
حال با قرار دادن $N_۲$ به‌شکل زیر، و استفاده از لم ۴.۲ اثبات کامل می‌شود :

$$N_۲ = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \delta_۲ P + \delta_۵ I + \delta_۳ G_۱ G_۱^T.$$

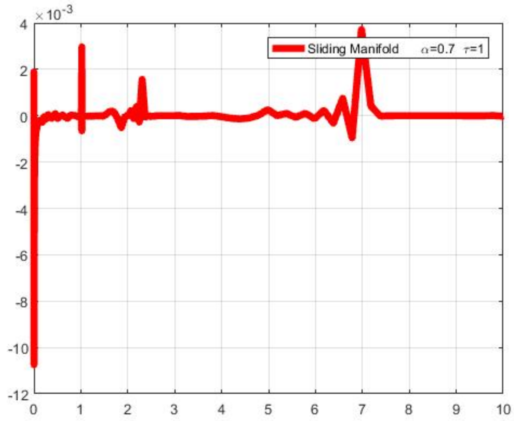
□



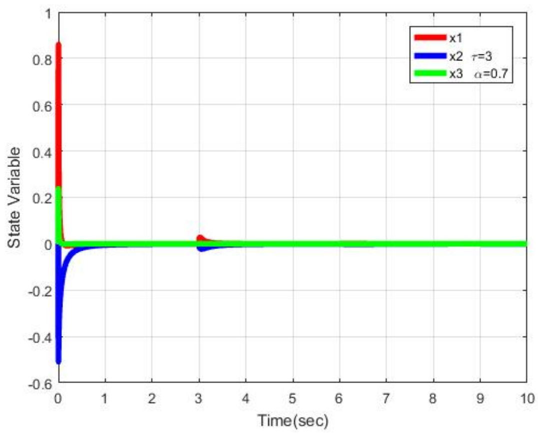
شکل ۱: سیستم حلقه باز به‌ازای $\alpha = ۰/۷$.



شکل ۲: وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته به‌ازای $\tau = ۱$.



شکل ۳: نمودار سطح لغزش به‌ازای $\alpha = ۰/۷$.



شکل ۴: وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته $\tau = ۳$.

۶ مثال عددی

در این بخش، با ارائه چند مثال عددی و شبیه سازی در Matalb قابلیت و کارایی روش پیش‌نهادی را برای پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری تاخیری، ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۶. سیستمی به‌صورت (۱.۳) با $\alpha = ۰/۷$ و با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ {}^{C}_{\circ}D^{\alpha}_{t}x(t) = \begin{bmatrix} -۹ & ۵ & -۸ \\ -۴ & -۳ & ۵ \\ -۴ & ۹ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰/۴ & -۱/۲ & ۱/۹ \\ ۰/۲ & -۰/۹ & ۰/۱ \\ -۰/۱ & -۰/۵ & ۲/۷ \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۱۲ \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} ۰/۸\sin(x_۱^۲(t)) \\ ۰/۸\sin(x_۲^۲(t)) \\ ۰/۸\sin(x_۳^۲(t)) \end{bmatrix}. $$

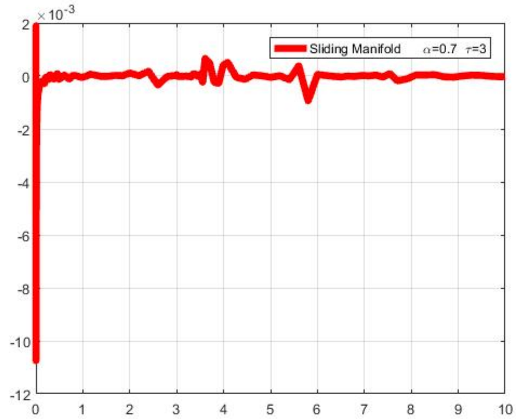
این سیستم به‌ازای $u = ۰$ همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، ناپایدار است. تابع $f(t, x(t))$ لیپ‌شیتس با ثابت $\lambda = ۰/۸$ است. با استفاده از قضیه ۱.۵ شرط LMI (۴.۵) بر قرار است اگر قرار دهیم:

$$ P = \begin{bmatrix} ۰/۲۴۹۹ & ۰/۰۸۳۵ & ۰/۰۱۶۴ \\ ۰/۰۸۳۵ & ۰/۶۴۳۰ & ۰/۰۲۷۰ \\ ۰/۰۱۶۴ & ۰/۰۲۷۰ & ۰/۰۱۶۷ \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -۰/۱۴۸۹ & -۰/۳۹۱۲ & -۰/۷۷۷۷۲ \end{bmatrix}, $$

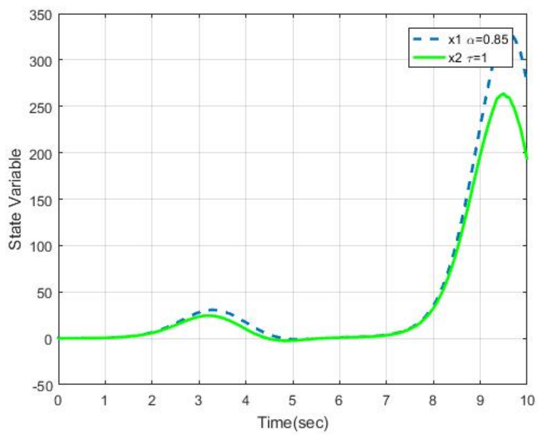
و $\delta_۱ = ۱/۳۱۰۴$، $\delta_۲ = ۱/۹۱۵۵$ و $\delta_۳ = ۰/۵۱۱۰$. حال پارامترهای کنترل‌کننده مد لغزشی را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$ K = YP^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲/۳۲۹۹ & ۱/۲۲۴۷ & -۵۰/۸۵۳۷ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -۰/۱ & ۰/۱ & -۰/۱ \end{bmatrix}, $$

و $\beta = 1$. پارامترهای β و C به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شرایط قضیه ۱.۴ مبنی بر مثبت بودن β و وارون‌پذیر بودن C برقرار باشند. شکل‌های ۲ و ۳ به‌ترتیب ، وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته و سطع لغزش را به‌ازای $\tau = 1$ نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود وضعیت هم‌گرایی متغیرهای حالت، مطلوب است. قانون دست‌یابی در زمان متناهی نیز برای سطح لغزش تعریف‌شده برقرار است. هم‌چنین شکل‌های ۴ و ۵ نیز به ترتیب، وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته و سطح لغزش را به‌ازای $\tau = 3$ نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود پایداری سیستم حلقه بسته و رفع اثر اغتشاش با انتخاب کنترل‌کننده مد لغزشی با پارامترهایی به‌صورت بالا، تضمین می‌شود. برای حذف پدیده چترینگ از تابع $\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t)+0.04}$ به‌جای تابع $\operatorname{sign}(\Lambda(t))$ در رابطه (۳.۴) استفاده شده است.



شکل ۵: نمودار سطح لغزش به‌ازای $\tau = 3$.



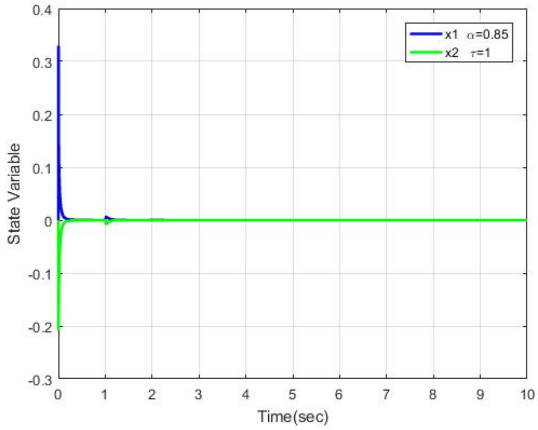
شکل ۶: سیستم حلقه باز به‌ازای $\alpha = 0.85$.

مثال ۲.۶. سیستمی به‌صورت (۵.۳) با $\alpha = 0.85$ و در حضور اغتشاش و نامعینی با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم:

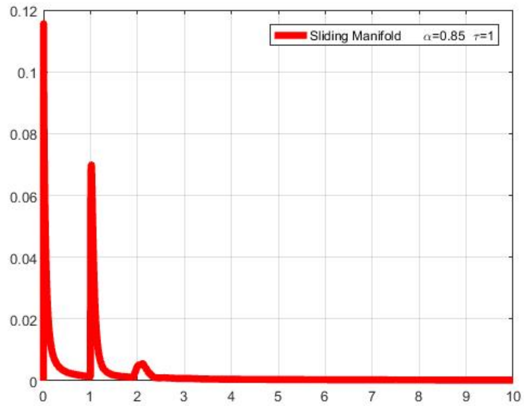
$$ {}_{0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = \begin{bmatrix} -4 & 5.5 \\ 8.5 & 10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} 12 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.8\sin(x_1^2(t)) \\ 0.8\sin(x_2^2(t)) \end{bmatrix} + g(t, x(t), x(t-\tau)). $$

که در آن، جملات مربوط به عدم‌قطعیت به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$ g(t, x(t), x(t-\tau)) = \Delta A x(t) + \Delta A_\tau x(t-\tau), $$



شکل ۷: وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته $\tau = ۱$.



شکل ۸: نمودار سطح لغزش به‌ازای $\alpha = ۰/۸۵$.

$$\Delta A = G_۱ F_۱(t) H_۱,\ \Delta A_\tau = G_۲ F_۲(t) H_۲,$$

$$G_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}, \quad F_۱ = \sin(t), \quad H۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad G_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲/۳ \end{bmatrix}, \quad F_۲ = \sin(t), \quad H_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

این سیستم به‌ازای $u = ۰$ همانطور که در شکل ۶ دیده می‌شود، ناپایدار است. تابع $f(t, x(t))$ لیپ‌شیتس با ثابت $\lambda = ۰/۸$ است. با استفاده از قضیه ۲.۵ شرط LMI (۷.۵) بر قرار است اگر قرار دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} ۱/۰۹۴۹ & -۰/۱۰۳۷ \\ -۰/۱۰۳۷ & ۰/۱۶۸۹ \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -۲۵/۵۳۹۹ & -۱/۲۵۳۷ \end{bmatrix},$$

و $\delta_۱ = ۲۸/۰۶۷۱$، $\delta_۲ = ۲/۸۶۴۵$، $\delta_۳ = ۰/۳۴۱۲$، $\delta_۴ = ۱۳/۸۴۹۵$ و $\delta_۵ = ۰/۳۶۶۶$. حال پارامترهای کنترل‌کننده مدلغزشی را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$K = YP^{-۱} = \begin{bmatrix} -۲۵/۵۳۹۹ & -۱/۲۵۳۷ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

و $\beta = ۰/۰۰۰۱$. پارامترهای β و C به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شرایط قضیه ۲.۴ مبنی بر مثبت بودن β و وارون‌پذیر بودن C برقرار باشند. شکل‌های ۷ و ۸ به‌ترتیب، وضعیت متغیرهای سیستم حلقه بسته و سطع لغزش را به ازای $\tau = ۱$ نشان می‌دهند. همان‌طور که

مشاهده می‌شود سطح لغزش وجود داشته و متغیرهای سیستم بعد از زمان متناهی به آن می‌رسند. تحلیل سیستم نشان می‌دهد که کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده، هم‌گرایی سریع متغیرهای حالت را تضمین کرده و باعث می‌شود سیستم عمل‌کرد مطلوبی در برابر اغتشاش و نامعینی از خود نشان دهد. برای حذف پدیده چترینگ از تابع $\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t)+۰/۰۴}$ به‌جای تابع $\mathrm{sign}(\Lambda(t))$ در رابطه (۳.۴) استفاده شده است.

۷ نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله، ما مسئله پایداری مجانبی رده‌ای از سیستم‌های کسری تاخیری غیرخطی در حضور اغتشاش و عدم قطعیت را با استفاده از کنترل‌کننده مدلغزشی و قضیه پایداری رازومیخین و با استفاده از نابرابری ماتریسی خطی مورد مطالعه قرار داده‌ایم. برای این کار یک سطح لغزش و کنترل‌کننده مدلغزشی کسری جدید ارائه کرده‌ایم. نخست شرایط مربوط به وجود سطح لغزش انتگرالی کسری را مورد بررسی قرار داده و سپس قانون کنترل مستقل از تاخیر را برای دو حالت به‌دست آورده و نتایج به‌صورت قضیه ارائه شده‌اند. شرایط لازم برای محاسبه پارامترهای سطح لغزش را در قالب نابرابری ماتریسی خطی، پیش‌نهاد کرده‌ایم. مستقل از تاخیر بودن کنترل‌کننده طراحی‌شده از مزیت‌های آن است. دو مثال عددی برای نشان دادن کارایی نتایج اصلی، برای رفع اثر اغتشاش و نامعینی با استفاده از کنترل‌کننده مد لغزشی، آورده شده است. با در نظر گرفتن سیستم به‌همراه یک معیار بهینه‌سازی می‌توان نتایج به‌دست‌آمده را توسعه داد.

فهرست منابع

[1] Balachandran K., Park J.Y. and Trujillo J.J., *Controllability of nonlinear fractional dynamical systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **75** (2012) 1919–1926.

[2] Boyd S., Ghaoui L.E.l., Feron E. and Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and ControlTheory*, SIAM, Philadelphia (1994).

[3] Chen L., Wu R., Cheng Y. and Chen Y., *Delay dependent and order dependent stability and stabilization of fractional order linear systems with time varying delay*, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, (2019).

[4] Doye I.N., Voos H. and Darouach M., *Observer-based approach for fractional-order chaotic synchronization and secure communication*, IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, **3** (2013) 442–450.

[5] Duarte-Mermoud M.A., Aguila-Camacho N., Gallegos J.A. and Castro-Linares R., *Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **22** (2015) 650–659.

[6] Efe M.O., *Fractional order sliding mode control with reaching law approach*, Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, **18** (2010) 731–747.

[7] Eker I., *Second-order sliding mode control with experimental application*, ISA Trans, **49** (2010) 394–405 .

[8] Han Y., Kao Y. , Gao C., Zhao J. and Wang C., *H∞ sliding mode control of discrete switched systems with time-varying delays*, ISA Trans, **89** (2019) 12–19.

[9] He S. and Song J., *Finite-time Sliding Mode Control Design for a Class of Uncertain Conic Nonlinear Systems*,Journal of Automatic Sinica, **4** (2017) 809-816.

[10] Hu J. B., Lu G. P., Zhang S. B. and Zhao L. D., *Lyapunov stability theorem about fractional system without and with delay*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **20** (3) (2015) 905-913.

[11] Khargonekar P., Petersen I. and Zhou k., *Robust stabilization of uncertain linear systems:quadratic stabilization and H1 control theory*,IEEE Transactions on Automatic Control, **35** (1990) 356-361.

[12] Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J., *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, New York (2006).

[13] Li M. and Wang J., *Exploring delayed mittaglefer type matrix functions to study finite time stability of fractional delay differential equations*. Applied Mathematics and Computation, **324** (2018) 254-265.

[14] Li M. and Wang J., *Finite time stability of fractional delay differential equations*, Applied Mathematics Letters, **64** (2017) 170-176.

[15] Jiang B., Gao C. and Xie J., *Passivity based sliding mode control of uncertain singular Markovian jump systems with time-varying delay and nonlinear perturbations*, Applied Mathematics and Computation, **271** (2015) 187–200.

[16] Ji Y., Du M. and Guo Y., *Stabilization of non-linear fractional-order uncertain systems*, Asian Journal of Control, **20** (2018) 669–677.

[17] Joice Nirmala R. , Balachandran K. and Rodriguez- Germa L. and Trujillo J.J. , *Controllability of nonlinear fractional delay dynamical systems*, Reports on Mathematical Physics, **77** (2016) 87–104.

[18] Li H., Wang J., Lam H.K., Zhou Q. and Du H., *Adaptive sliding mode control for interval type-2 fuzzy systems*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, **46** (2016) 1654–1663.

[19] Matignon D., *Stability results on fractional differential equations to control processing*, Proceedings Computational Engineering in Systems and Application multiconference, (1996) 963-968.

[20] Mirhosseini-Alizamani S. M., Effati S., and Heydari A., *An iterative method for suboptimal control of a class of nonlinear time-delayed systems*, International Journal of Control, **92** (2019)) 2869-2885.

[21] Mirhosseini-Alizamani S. M., Effati S. and Heydari A., *Solution of linear time-varying multi-delay systems via variational iteration method*. Journal of Mathematics and Computer Science, **16** (2016) 282-297.

[22] Mirhosseini-Alizamini S. M. , Effati S. and Heydari A., *Solution of linear time-varying multi-delay systems via variational iteration method*, J. Math. Comput. Sci., **16** (2016) 282-297.

[23] Mirhosseini-Alizamini S. M., *Numerical Solution of the Controlled Harmonic Oscillator by Homotopy Perturbation Method*, Control Optim. Appl. Math., **2(1)** (2017) 77-91.

[24] Mirhosseini-Alizamini S. M., *Solving linear optimal control problems of the time-delayed systems by Adomian decomposition method*, Iranian J. Num. Anal. Optim., **9(2)** (2019) 165-183.

[25] Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D. and Feliu V., *Fractional-order systems and controls*, Springer, Newyork, 2010.

[26] Naifar O., Makhlouf A. B. and Hammami M. A., *Comments on 'Lyapunov stability theorem about fractional system without and with delay*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 30 (2016) 360-361.

[27] Saad W., Anissellami A. and Garcia G., *Robust sliding mode- $H\infty$ control approach for a class of nonlinear systems affected by unmatched uncertainties using a poly-quadratic Lyapunov function*, International Journal of Control, Automation and Systems, **14** (2016) 1464–1474.

[28] Sakthivel R., Kaviarasan B., Selvaraj P. and Karimi H.R., *EID based sliding mode investment policy design for fuzzy stochastic jump financial systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, **31** (2018) 100–108 .

[29] Shen H., Li F., Cao J., Wu Z.G. and Lu G., *Fuzzy-model-based output feedback reliable control for network-based semi-Markov jump nonlinear systems subject to redundant channels*, IEEE Transactions on Cybernetics (2019).

[30] Shen H., Men Y., Wu Z.G., Cao J. and Lu G., *Network-based quantized control for fuzzy singularly perturbed semi-Markov jump systems and its application*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, **66** (2019) 1130–1140.

[31] Wang Y. and Li T., *Stability analysis of fractional-order nonlinear systems with delay*, Mathematical Problems in Engineering, 2014 (2014) 1–8.

[32] Wen Y., Zhou X., Zhang Z. and Liu S., *Lyapunov method for nonlinear fractional differential systems with delay*, Nonlinear Dynamics, **82** (2015) 1015–1025.

[33] Xia Y. and Jia Y., *Robust sliding mode control for uncertain time-delay systems: an LMI approach*, IEEE T. Automat. Contr, **48** (2003) 1086–1091.

[34] Yin C., Chen Y. and Zhong S., *LMI based design of a sliding mode controller for a class of uncertain fractional order nonlinear systems*, American Control Conference (ACC), (2013) 6526-6531.

[35] Yousefi M., Binazadeh T., *Delay-independent sliding mode control of time-delay linear fractional order systems* , Transactions of the Institute of Measurement and Control, (2018) 1212-1222.

[36] Zhang H., Ye R., Cao J., Ahmed A., Li X. and Y. Wan., *Lyapunov functional approach to stability analysis of Riemann-Liouville fractional neural networks with time-varying delays*, Asian Journal of Control, **20** (2018) 1938-1951.

Design of sliding mode control based on Razumikhin approach and linear matrix inequality for nonlinear fractional time-varying delay systems

Mohammad Ghamgosar, Seyed Mehdi Mirhosseini-Alizamini † **and Mahmood Dadkhah**

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 2021/8/24 Accepted: 2022/7/9

Abstract: In this paper, a sliding mode control for systems that are nonlinear, having fractional order, and involve delay is used. The aim of this paper is to design a sliding mode controller, such that the closed-looped nonlinear system becomes asymptotically stable and its trajectory can be driven onto the sliding surface in finite time. By using the fractional Razumikhin theorem for the stability of fractional-order systems including delay and a linear matrix inequality, necessary conditions on asymptotic stabilization are obtained. Some numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed results.

Keywords: Delay Systems, Fractional order systems, Sliding mode control, Linear Matrix Inequality.

Mathematics Subject Classification (2010): 93D15, 93C10, 34K37.

† Corresponding author.

E-mail addresses: m_mirhosseini@pnu.ac.ir (S. M. Mirhosseini-Alizamani).