مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۳۰۴-۳۱۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.40218.2017

الگوریتمی برای محاسبه ایده‌آل‌های مرتب نقاط و کاربرد آن در مدل‌های زیست‌شناسی

فرزانه امینی خلف بادام [۱] سجاد رحمانی [۲] ×، عبدالعلی بصیری [۳]، مارتین کروتزر [۴]

(۳)،(۲)،(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم کامپیوتر و ریاضی، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران
(۴) گروه ریاضی، دانشکده انفورماتیک و ریاضی، دانشگاه پاسائو، آلمان

دبیر مسئول: امیر هاشمی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۱۵

چکیده: ایده‌آل نقاط، یکی از ابزارهای مفید و کاربردی در مدل‌سازی و علوم محاسباتی است و به‌همین علت الگوریتم‌های محاسبه این نوع ایده‌آل‌ها دارای اهمیت ویژه‌ای‌اند. در این مقاله ابتدا الگوریتمی برای به‌دست آوردن ایده‌آل‌های مرتب متناظر با ایده‌آل نقاط ارائه می‌دهیم و سپس با استفاده از آن روشی برای حل مساله مهندسی معکوس شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن در زیست‌شناسی پیش‌نهاد خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: پایه مرزی، پایه گربنر، ایده‌آل نقاط، ایده‌آل مرتب، شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن

رده‌بندی ریاضی: 68W30, 92B99, 13P10

۱ مقدمه

ابزارهای جبر محاسباتی در مدل‌سازی بسیاری از مسائل در علوم مختلف از جمله آمار، زیست‌شناسی، رمزنگاری و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. در اکثر اوقات این مدل‌ها، منجر به یک دستگاه چندجمله‌ای می‌شوند که باید جوابی برای آن به‌دست آوریم. از این رو مطالعه ایده‌آل‌های چندجمله‌ای به یک موضوع مهم در ریاضیات تبدیل شده است.
پایه گربنر به‌عنوان یکی از تکنیک‌های محاسباتی برای مطالعه ایده‌آل‌های چندجمله‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای اولین بار بوخبرگر در سال ۱۹۶۵ الگوریتمی برای محاسبه پایه گربنر در [۲] ارائه داد. پس از آن دانشمندان دیگری از جمله مولر و مورا به تحقیق در این زمینه

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه:
(S. Rahmany), rahmani@du.ac.ir (F. Amini), farzane.amini@gmail.com
(M. Kreuzer) Martin.Kreuzer@uni-passau.de (A. Basiri) basiri@du.ac.ir

پرداختند. و الگوریتم‌های کارآمدتری ارائه دادند[۱۸] . فوژر در سال ۱۹۹۹ الگوریتم $F_۴$ را در [۵] و در سال ۲۰۰۲ الگوریتم $F_۵$ را در [۶] که الگوریتم‌هایی بهینه‌تر برای محاسبه پایه گربنرند، ارائه داد.
با این که پایه گربنر نقش به‌سزایی در حل دستگاه‌های چندجمله‌ای دارد اما دارای نقاط ضعفی نیز است. از جمله این که پایه گربنر برای حل دستگاه‌های چندجمله‌ای با ضرایب اعشاری از پایداری لازم برخوردار نیست. به‌همین منظور مفهوم جدیدی به‌نام پایه مرزی توسط مورین و همکارانش در [۱۷] معرفی شد که از پایداری بهتری نسبت به پایه گربنر برخوردار است. این پایه دارای ویژگی‌هایی مشابه با پایه گربنر است و در واقع توسیعی از آن است. مطالعه پایه مرزی برای ایده‌آل‌های چندجمله‌ای صفربعدی و غیر صفربعدی در طیف گسترده‌ای تابه‌حال صورت گرفته است [۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۲۱] . کهراین و کروتزر در سال ۲۰۰۶ الگوریتمی برای محاسبه پایه مرزی در [۸] ارائه دادند و پس از آن به تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه پرداختند که تابه‌امروز ادامه دارد.
عنصر اصلی مورد مطالعه در پایه مرزی، مجموعه تک‌جمله‌ای‌هایی موسوم به ایده‌آل مرتب است که تشکیل یک پایه برای فضای برداری حاصل از حلقه خارج‌قسمتی می‌دهد. بنابراین مطالعه آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هاشمی و همکاران در [۱] با استفاده از این مفهوم به محاسبه‌ی مدل‌های مختلف بر مبنای داده‌های واقعی و توضیح کارایی این مدل‌های آماری پرداختند.
ایده‌آل نقاط نیز در مسائل مربوط به مدل‌سازی از اهمیت بالایی برخوردار است. بوخبرگر و مولر در سال ۱۹۸۲ در [۱۹] اولین الگوریتم محاسبه‌ی ایده‌آل نقاط را ارائه دادند. بعد از آن چندین الگوریتم توسیع‌یافته معرفی شد، به‌عنوان مثال، برای حالتی که نقاط دارای چندگانگی بودند لاکشمن در سال ۱۹۹۱ توسیعی از محاسبه ایده‌آل نقاط را در [۱۳] ارائه کرد. سال ۲۰۰۶، فار و گائو در [۴] الگوریتمی برای محاسبه پایه گربنر ایده‌آل نقاط مطرح نمودند اما این الگوریتم نسبت به الگوریتم بوخبرگر–مولر برای تعداد زیادی نقطه کارآمد نیست. در سال ۲۰۱۱، کروتزر در [۱۱] حالت دیگری از الگوریتم بوخبرگر–مولر را برای محاسبه‌ی پایه مرزی ایده‌آل نقاط ارائه داد. یکی از کاربردهای ایده‌آل نقاط یافتن مدل‌هایی در شبکه‌های تنظیم‌ساز ژنی بر پایه داده‌های زمانی است. با دردست‌داشتن یک مجموعه متناهی از نقاط سری‌های زمانی بیان ژن می‌توان مدل مناسب برای شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن را پیدا کرد. در سال ۲۰۰۴، لوبنباخر و همکارانش در [۱۴] یک روش برای مهندسی معکوس شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن با استفاده از اطلاعات تجربی به‌دست‌آمده، ارائه دادند. آن‌ها به محاسبه شکل نرمال یک سیستم چندجمله‌ای نسبت به ایده‌آل نقاط سری‌های زمانی ژن‌ها نیاز داشتند و بدین منظور از ابزار جبر محاسباتی استفاده کردند. آن‌ها با یافتن پایه گربنر ایده‌آل نقاط و محاسبه شکل نرمال نسبت به این پایه گربنر، یک مدل مناسب را که بر پایه یک محک ازپیش‌تعیین‌شده بود، به‌دست آوردند. در سال ۲۰۱۰، لوندکویست چندین ساختار پایه‌ی فضای برداری اختصاص‌یافته به ایده‌آل صفرکننده‌ی نقاط را مورد بررسی قرار داد و همچنین نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از پایه‌های فضای برداری شکل نرمال یک چندجمله‌ای را به‌دست آورد [۱۵].
با توجه به مطالب بالا آشکار است که محاسبه ایده‌آل‌های مرتب به‌عنوان پایه‌ای برای فضای برداری دارای اهمیت است، به‌همین منظور در مطالعه حاضر روش و الگوریتم جدیدی برای محاسبه این پایه مبتنی بر مفاهیم جبر خطی ارائه خواهد شد. در حقیقت در این رویکرد نسبت به هر ترتیب تک‌جمله‌ای یک پایه‌ی فضای برداری محاسبه می‌شود و با استفاده از آن یک مدل مناسب برای شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن ارائه می‌گردد.
ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم مفاهیم و تعاریف اولیه را معرفی می‌کنیم. این بخش شامل دو قسمت است، قسمت اول مربوط به پایه گربنر و ایده‌آل نقاط و قسمت دوم مربوط به پایه مرزی است. در بخش سوم الگوریتمی برای محاسبه ایده‌آل‌های مرتب ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم نیز به کاربرد ایده‌آل‌های مرتب در مدل‌سازی شبکه‌های تنظیم‌ساز ژنی با استفاده از روش مهندسی معکوس می‌پردازیم و در پایان نتیجه کار خود را بیان می‌کنیم.

۲ مفاهیم اولیه

۱.۲ پایه گربنر و ایده‌آل نقاط

در این قسمت به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه جهت معرفی پایه گربنر و ایده‌آل نقاط می‌پردازیم. عمده‌ی مطالب این بخش از مرجع [۳] است که خواننده می‌تواند برای مطالعه جزئیات بیش‌تر به آن مراجعه کند.

فرض کنیم $R=\mathbb{K}[x_۱,\dots,x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها بر حسب متغیرهای $x_۱,\dots,x_n$ با ضرایب در میدان $\mathbb{K}$ و $\mathbb{T}^n=\{x_۱^{\alpha_۱}\dots x_n^{\alpha_n}\mid \alpha_i\geqslant ۰, ۱\leq i\leq n\}$ مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌های R باشد. برای معرفی پایه گربنر نیاز به مفهوم ترتیب تک‌جمله‌ای‌ها، تک‌جمله‌ای پیش‌رو، ضریب پیش‌رو و جمله‌ی پیش‌رو داریم که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۲. یک ترتیب تک‌جمله‌ای $\prec$ روی حلقه R، یک رابطه $\prec$ روی $\mathbb{Z}^n_{\geq ۰}$ و یا به‌طور هم ارز یک رابطه روی مجموعه $\mathbb{T}^n$ است هرگاه:

۱. $\prec$ یک ترتیب کلی روی $\mathbb{Z}^n_{\geqslant ۰}$ باشد.

۲. اگر $\alpha\prec\beta$ و $\gamma\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant ۰}$ آن‌گاه $\alpha+\gamma\prec\beta+\gamma$.

۳. $\prec$ روی $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ خوش‌ترتیب باشد. به این معنا که هر زیرمجموعه غیر تهی از $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$، تحت $\prec$ دارای کوچک‌ترین عضو باشد.

از یک ترتیب تک‌جمله‌ای می‌توان برای مقایسه تک‌جمله‌ای‌ها استفاده کرد. با توجه به این مقایسه تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف **۲.۲**. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی حلقه R باشد. چندجمله‌ای $f = a_\alpha x^\alpha + \cdots + a_\gamma x^\gamma$ را که $x^\alpha \succ \cdots \succ x^\gamma$ و $a_\alpha \neq 0$ در نظر می‌گیریم. با توجه به ساختار f، بزرگ‌ترین تک‌جمله‌ای f نسبت به ترتیب $\prec$ یعنی x^α را با نماد $\mathrm{LT}(f)$ نمایش داده و تک‌جمله‌ای پیش‌رو f می‌نامیم. ضریب پیش‌رو و جمله پیش‌رو f را به‌ترتیب با نمادهای $\mathrm{LC}(f)$ و $\mathrm{LT}(f)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{LC}(f) = a_\alpha$$

و

$$\mathrm{LT}(f) = a_\alpha x^\alpha.$$

در ادامه یک نمونه‌ی معروف از ترتیب تک‌جمله‌ای را که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد معرفی می‌کنیم.

تعریف **۳.۲**. فرض کنیم $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ دو n-تایی در $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ باشند. می‌گوییم $\alpha \prec_{lex} \beta$ هرگاه اولین مولفه غیر صفر سمت چپ $\beta - \alpha$ مثبت باشد. در این صورت می‌نویسیم $x^\alpha \prec_{lex} x^\beta$ اگر $\alpha \prec_{lex} \beta$.

مثال **۴.۲**. چندجمله‌ای $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in \mathbb{K}[x, y, z]$ و ترتیب $z \prec_{lex} y \prec_{lex} x$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم، $\mathrm{LM}(f) = x^3$ ، $\mathrm{LC}(f) = -5$ و $\mathrm{LT}(f) = -5x^3$.

حال به معرفی پایه گربنر می‌پردازیم.

تعریف **۵.۲**. ترتیب تک‌جمله‌ای $\prec$ را روی حلقه چندجمله‌ای‌های R در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه متناهی $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ از ایده‌آل $I \subseteq R$ را یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب $\prec$ می‌گوییم هرگاه:

$$\langle \mathrm{LT}\ (g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t)\rangle = \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$$

که در آن $\mathrm{LT}\ (I) = \{\mathrm{LT}\ (f) | f \in I\}$. هم‌چنین پایه گربنر G را نسبت به $\prec$ کاهش‌یافته گوییم هرگاه برای هر $g \in G$

۱) $\mathrm{LC}(g) = 1$.

۲) هیچ جمله‌ای از g متعلق به ایده‌آل تولید شده توسط $\mathrm{LT}(G \setminus \{g\})$ نباشد.

یکی از ویژگی‌های پایه گربنر را در گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره **۶.۲**. فرض کنیم $I \subseteq R$ یک ایده‌آل و $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ یک پایه گربنر برای I باشد. برای چندجمله‌ای $f \in R$، یک چندجمله‌ای $r \in R$ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

۱) هیچ یک از جملات r توسط هیچ یک از $\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t)$ قابل تقسیم نیست.

۲) عضو $g \in I$ وجود دارد به‌طوریکه $f = g + r$.

چندجمله‌ای منحصربه‌فرد r را شکل نرمال f نسبت به G می‌نامیم. هم‌چنین در این تقسیم ترتیب قرار گرفتن عضوهای G اهمیتی ندارد.

اثبات. گزاره ۱۰۶۰۲ از مرجع [۳] دیده شود. $\square$

همان‌طور که در مقدمه نیز اشاره کردیم، بوخبرگر برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ الگوریتمی برای محاسبه پایه گربنر ارائه داد. پس از آن به علت کارایی این تکنیک محاسباتی، محققان به مطالعه در این زمینه علاقه‌مند شدند و الگوریتم‌های توسعه یافته‌تری برای محاسبه‌ی پایه گربنر طراحی کردند. این الگوریتم‌ها در بسیاری از نرم‌افزارهای ریاضی از جمله میپل اجرا شده است. در ادامه با ارائه یک مثال به یکی از کاربردهای مهم پایه گربنر یعنی حل دستگاه‌های چندجمله‌ای می‌پردازیم.

مثال **۷.۲**. دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۶ \\ x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} - xyz = -۴ \\ xy + xz + yz = -۳. \end{cases}$$

فرض کنیم I ایده‌آل تولیدشده به‌صورت زیر باشد:

$$I = \langle x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۶, x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} - xyz + ۴, xy + xz + yz + ۳\rangle$$

در این صورت پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب $\prec_{lex}$ با چندجمله‌ای‌های زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} g_{۱}(z) = z^{۶} - ۶z^{۴} + ۴z^{۳} + ۹z^{۲} - ۱۲z + ۴ = (z-۱)^{۴}(z+۲)^{۲} \\ g_{۲}(y,z) = ۴۹y^{۲} + ۱۲yz^{۵} - ۱۶yz^{۴} - ۱۸yz^{۳} + ۷۲yz^{۲} - ۳۷yz + \\ \qquad ۳۶y - ۱۶z^{۵} + ۵۴z^{۴} + ۲۴z^{۳} - ۱۴۵z^{۲} + ۱۸۰z - ۱۹۵ \\ g_{۳}(x,y,z) = ۴۹x + ۴۹y + ۱۲z^{۵} - ۱۶z^{۴} - ۱۸z^{۳} + ۷۲z^{۲} - ۳۷z + ۳۶. \end{cases}$$

نکته قابل توجه این است که جواب‌های این دستگاه معادل دستگاه اولیه است ولی مزیت دستگاه بالا این است که $g_{۱}(z)$ یک چندجمله‌ای تک متغیره بر حسب z است که با حل آن مقدار $z = ۱$، $z = -۲$ به‌دست می‌آید. با قرار دادن این مقادیر z در $g_{۲}(y,z) = ۰$ ریشه‌های $y = ۱$ و $y = -۲$ به‌دست می‌آیند. در پایان با جای‌گزین کردن تمامی این مقادیر در معادله‌ی $g_{۳}(x,y,z) = ۰$ به مجموعه جواب‌های زیر خواهیم رسید:

$$S = \{(۱,۱,-۲),(۱,-۲,۱),(-۲,۱,۱)\}.$$

هم‌چنان که در مثال فوق مشاهده گردید مجموعه جواب‌های ایده‌آل I متناهی است، با توجه به این موضوع تعریف زیر را ارائه خواهیم داد.

تعریف **۸.۲**. فرض کنیم I ایده‌آلی در R باشد، اگر دستگاه متناظر با ایده‌آل I دارای تعداد متناهی جواب در میدان بسته جبری شامل $\mathbb{K}$ باشد آن‌گاه I را یک ایده‌آل صفربعدی گوییم.

قضیه‌ی زیر محک مناسبی برای تشخیص ایده‌آل‌های صفربعدی است.

قضیه **۹.۲**. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{K}[x_{۱},\dots,x_n]$ یک ایده‌آل باشد، یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathbb{K}[x_{۱},\dots,x_n]$ در نظر می‌گیریم. در این صورت موارد زیر معادل‌اند:

۱) برای هر i، $۱ \leq i \leq n$، یک $m_i \geq ۰$ وجود دارد به‌طوری که $x_i^{m_i} \in \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$.

۲) فرض کنیم G یک پایه‌ی گربنر برای I باشد. در این صورت برای هر i، $۱ \leq i \leq n$، یک m_i وجود دارد به‌طوری که برای $g \in G$، $x_i^{m_i} = \mathrm{LM}(g)$.

۳) مجموعه $\{x^\alpha \mid x^\alpha \notin \langle \mathrm{LT}\,(I)\rangle\}$ متناهی است.

۴) $\mathbb{K}$-فضای برداری R/I دارای بعد متناهی است.

و اگر میدان بسته جبری باشد موارد فوق معادل با این‌اند که دستگاه متناظر با ایده‌آل I دارای تعداد متناهی جواب است.

اثبات. قضیه ۶ ۰ ۳ ۰ ۵ از مرجع [۳] دیده شود. □

در ادامه یکی از کاربردی‌ترین مفاهیم جبر محاسباتی را که در یافتن مدل‌های آماری برای داده‌های واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بررسی خواهیم کرد. در عمل برای یک مجموعه متناهی از نقاط داده‌شده باید ایده‌آلی از چندجمله‌ای‌هایی را که مقادیر آن‌ها روی نقاط برابر با صفر می‌گردد بیابیم، به این ایده‌آل‌ها ایده‌آل صفرساز نقاط می‌گویند که تعریف دقیق آن به‌شکل زیر است.

تعریف **۱۰.۲**. فرض کنیم $X = \{p_{۱},\dots,p_s\}$ یک مجموعه متناهی از نقاط در $\mathbb{K}^n$ باشد. ایده‌آل صفرساز X یا ایده‌آل نقاط X را با $I(X)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(X) = \{f \in R \mid f(p_i) = ۰ \quad \forall p_i \in X\}.$$

مثال **۱۱.۲.** فرض کنیم $X = \{p\}$ به‌طوری که $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. در این صورت $I(X) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ ایده‌آل صفرساز X است.

برخی از ویژگی‌های اساسی ایده‌آل نقاط در ادامه بیان می‌شوند.

گزاره **۱۲.۲.** فرض کنیم $X = \{p_1, \ldots, p_s\}$ یک مجموعه متناهی از نقاط دوبه‌دو متمایز باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱. $I(X) = I(p_1) \bigcap \ldots \bigcap I(p_s)$.

۲. برای هر ترتیب تک‌جمله‌ای $\prec$ روی $\mathbb{T}^n$ مجموعه $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_{\prec}\{I(X)\}$ شامل sجمله است.

۳. ایده‌آل $I(X)$ یک ایده‌آل صفربعدی است و $\dfrac{R}{I(X)} \cong \mathbb{K}^s$.

اثبات. گزاره ۳ ۰ ۳ ۰ ۶ از مرجع [۱۲] دیده شود. □

۲.۲ پایه مرزی

همان‌طور که گفته شد پایه مرزی توسیعی از پایه گربنر است که دارای ویژگی‌هایی مشابه با آن است. در این قسمت، مفاهیم اساسی پایه مرزی و رابطه آن را با پایه گربنر، بیان می‌کنیم. عمده‌ی مطالب این بخش از [۱۲] است.

تعریف **۱۳.۲.** فرض کنیم $\mathbb{T}^n_d$ مجموعه تک‌جمله‌ای‌های از درجه d باشد.

۱. زیرمجموعه متناهی و غیرتهی $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}^n$ را یک ایده‌آل مرتب می‌گوییم هرگاه تحت مقسوم‌علیه بسته باشد، یعنی اگر $t \in \mathcal{O}$ و $t' \mid t$ آن‌گاه $t' \in \mathcal{O}$.

۲. فرض کنیم $\mathcal{O}$ یک ایده‌آل مرتب باشد. مجموعه

$$\partial\mathcal{O} = \mathbb{T}^n_1 \cdot \mathcal{O} \setminus \mathcal{O} = (x_1\mathcal{O} \cup \ldots \cup x_n\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}$$

را مرز $\mathcal{O}$ می‌نامیم.

۳. برای هر $k \geq 1$، $\partial^k\mathcal{O} = \mathbb{T}^n_k \cdot \mathcal{O} \setminus \mathbb{T}^n_{<k} \cdot \mathcal{O}$.

۴. برای هر $t \in \mathbb{T}^n$، اندیس t نسبت به $\mathcal{O}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ind_{\mathcal{O}}(t) = \min\{k \geqslant 0 \mid t \in \cup_{i=0}^{k} \partial^i\mathcal{O}\}.$$

مثال **۱۴.۲.** مجموعه $\mathcal{O} = \{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y\} \subset \mathbb{T}^2$ را در نظر می‌گیریم. $\mathcal{O}$ یک ایده‌آل مرتب است، مرز و دومین مرز آن به‌ترتیب $\partial\mathcal{O} = \{x^3, y^3, xy^2, x^2y^2\}$ و $\partial^2\mathcal{O} = \{x^4, x^3y, x^3y^2, y^4, xy^3, x^2y^3, x^3y\}$ اند.

گزاره **۱۵.۲.** فرض کنیم $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}^n$ یک ایده‌آل مرتب باشد.

۱. $\mathbb{T}^n = \bigcup_{i=0}^{\infty} \partial^i\mathcal{O}$.

۲. تک‌جمله‌ای $t \in \mathbb{T}^n$ توسط یک جمله در $\partial\mathcal{O}$ تقسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر $t \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{O}$.

اثبات. گزاره ۶ ۰ ۴ ۰ ۶ از مرجع [۱۲] دیده شود. □

ازاین قسمت به بعد، $\mathcal{O} = \{t_1, \ldots, t_\mu\}$ را یک ایده‌آل مرتب در $\mathbb{T}^n$ و $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \ldots, b_\nu\}$ را مرز آن در نظر می‌گیریم. برای یک ایده‌آل صفربعدی I، کلاس باقی‌مانده عناصر $\mathcal{O}$ یک پایه برای فضای برداری R/I است. ساختار مولدهای این ایده‌آل صفربعدی در تعریف زیر نشان داده می‌شود.

تعریف **۱۶.۲.** مجموعه چندجمله‌ای‌های $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ یک $\mathcal{O}$-پیش‌پایه مرزی نامیده می‌شود اگر عناصر آن به‌صورت $g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i$ باشند که $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنیم $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ یک $\mathcal{O}$-پیش‌پایه مرزی و $I \subseteq R$ یک ایده‌آل شامل G باشد. مجموعه G را یک $\mathcal{O}$-پایه مرزی برای ایده‌آل I می‌نامیم هرگاه G، I را تولید کند و $R = I \bigoplus \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathbb{K}}$. این جمع مستقیم معادل با این است که، کلاس‌های باقی‌مانده جملات در $\mathcal{O}$ تشکیل یک پایه برای $\mathbb{K}$-فضای برداری R/I بدهند.

مشابه الگوریتم تقسیم در حلقه چندجمله‌ای‌های چندمتغیره، درنظریه پایه مرزی الگوریتم تقسیمی ([۱۲] دیده شود) موجود است که برای هر چندجمله‌ای f در R و $\mathcal{O}$-پیش‌پایه مرزی $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$، عناصر $c_1, \ldots, c_\mu$ در $\mathbb{K}$ چنان موجودند که $f = \sum_{j=1}^{\nu} f_j g_j + \sum_{i=1}^{\mu} c_i t_i$. بر اساس این الگوریتم ترتیب چندجمله‌ای‌ها در پیش‌پایه مرزی روی خروجی الگوریتم اثر دارد. بنابراین پیش‌پایه مرزی لزوما یک پایه مرزی نیست.
نقش جملات پیش‌رو در نظریه‌ی پایه گربنر را فرم‌های مرزی در نظریه‌ی پایه مرزی بازی می‌کنند که در زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱۸.۲. چندجمله‌ای $f = a_1 t_1 + \cdots + a_s t_s \in R$ را که $a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ و $t_i \in \mathbb{T}^n$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $ind_{\mathcal{O}}(t_1) \geq \ldots \geq ind_{\mathcal{O}}(t_s)$. در این صورت $ind_{\mathcal{O}}(f) = ind_{\mathcal{O}}(t_1)$ و چندجمله‌ای

$$BF_{\mathcal{O}}(f) = \sum_{\{i | ind(t_i) = ind(f)\}} a_i t_i$$

فرم مرزی f نسبت به $\mathcal{O}$ نامیده می‌شود.

حال به بیان رابطه بین پایه گربنر و پایه مرزی می‌پردازیم. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای باشد، در این صورت $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_{\prec}(I)$ یک ایده‌آل مرتب است که آن را ایده‌آل مرتب اختصاص‌یافته به $\prec$ و I می‌گوییم و با $\mathcal{O}_{\prec}(I)$ نشان داده می‌شود. کلاس‌های باقی‌مانده عناصر این ایده‌آل مرتب یک پایه برای $\mathbb{K}$-فضای برداری R/I است. گزاره‌ی زیر رابطه بین پایه مرزی و پایه گربنر را بیان می‌کند.

گزاره ۱۹.۲. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب روی $\mathbb{T}^n$ و $\mathcal{O}_{\prec}(I)$ ایده‌آل مرتب به‌صورت $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_{\prec}(I)$ باشد. در این صورت یک $\mathcal{O}_{\prec}(I)$-پایه مرزی منحصربه‌فرد G برای I وجود دارد به‌طوری که یک پایه گربنر کاهش‌یافته برای I را در بر دارد.

اثبات. گزاره ۶۰۴۰۱۸ از مرجع [۱۲] دیده شود. □

ایده‌آل‌های مرتبی وجود دارند که به‌رغم این که کلاس‌های باقی‌مانده عناصر آن‌ها یک پایه برای فضای برداری R/I است، ولی به صورت $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}(I)$ نیستند. در مثال زیر این موضوع را نشان می‌دهیم. این مثال از [۱۲] گرفته شده است و در ادامه، الگوریتم ارائه‌شده را روی آن اجرا خواهیم کرد.

مثال ۲۰.۲. فرض کنیم I ایده‌آل صفرساز نقاط $\{(0,0), (1,1), (0,-1), (-1,1), (1,0)\}$ در $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$ باشد. در این صورت $\{1, x, y, x^2, y^2\}$ یک پایه برای R/I است ولی به‌صورت $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_{\prec}(I)$ نیست. زیرا یکی از عضوهای پایه مرزی متناظر با این ایده‌آل مرتب، $g_1 = xy - 1/2y - 1/2y^2 - x + x^2$ است و نسبت به هر ترتیب تک‌جمله‌ای، x^2 یا y^2 جمله پیش‌رویند و $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}(I)$ فاقد این یکی از این جملات است.

۳ محاسبه ایده‌آل‌های مرتب نقاط

در این بخش روش جدیدی برای محاسبه‌ی تمام ایده‌آل‌های مرتب وابسته به مجموعه متناهی نقاط با استفاده از مفهوم طرح تمام که یکی از شاخه‌های مهم علم آمار است، ارائه می‌دهیم. در واقع با ارائه این روش ارتباط بین جبر محاسباتی با علوم دیگر از جمله علم آمار را نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. مجموعه متناهی نقاط $X := \{p_1, \ldots, p_s\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه $E_i = \{p_{1i}, \ldots, p_{si}\}$، مجموعه i-امین مختصات p_jها است به‌طوری که $j = 1, \ldots, s$ و $i = 1, \ldots, n$. در این صورت:

۱. ضرب دکارتی $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \subset \mathbb{K}^n$ یک مجموعه متناهی از نقاط است که طرح تمام نامیده شده و با D نمایش داده می‌شود. هم‌چنین مجموعه X زیر مجموعه D است.
واضح است که اگر $l_i = \#E_i$، در این صورت D شامل $\prod_{i=1}^{n} l_i$ نقطه است.

۲. مجموعه تک‌جمله‌ای‌های اختصاص‌یافته به D به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{O}(D) = \{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} \mid 0 \leq a_j \leq l_j - 1 \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

الگوریتم ۱ AllOrderIdeal

ورودی: $X = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{K}^n$ یک مجموعه متناهی نقاط.
خروجی: تمام ایده‌آل‌های مرتب نظیر $I(X)$.
۱: مجموعه $E_i = \{p_{1i}, \ldots, p_{si}\}$ محاسبه می‌شود.
۲: مجموعه $\mathcal{O}(D) = \{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} | 0 \leq a_i \leq l_i - 1\}$ محاسبه می‌شود.
۳: تمام زیرمجموعه‌های sعضوی $\mathcal{O}(D)$، $\mathcal{O}_i$، به‌طوری که برای هر $t \in \mathcal{O}_i$ تمام مقسوم‌علیه‌های t در $\mathcal{O}_i$ قرار داشته باشند، محاسبه می‌شود.
۴: $M_{\mathcal{O}_i}(X)$ محاسبه می‌شود و $\mathcal{O}_i$ هایی که $\det(M_{\mathcal{O}_i}(X)) = 0$، حذف می‌شوند.

مثال **۲.۳**. فرض کنیم $X = \{(0,0), (0,-1), (1,0), (-1,1), (1,1)\}$ یک مجموعه متناهی از نقاط باشد، در این‌صورت $E_1 = E_2 = \{-1, 0, 1\}$ و $l_1 = l_2 = 3$. بنابراین $\mathcal{O}(D) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$.

گزاره **۳.۳**. فرض کنیم D طرح تمام به‌دست آمده از $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \subset \mathbb{K}^n$ باشد. ایده‌آل صفرساز $I(D)$ در $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ تولیدشده توسط $f_j = (x_j - E_{j_1}) \cdots (x_j - E_{jl})$ است به‌طوری که $l_j = \# E_j$ و $j = 1, \ldots, n$.

اثبات. گزاره ۶۰۳۰۸ از مرجع [۱۲] دیده شود. □

پایه گربنر G نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای σ را برای $I(X)$ در نظر می‌گیریم. مجموعه استاندارد تک‌جمله‌ای‌های متناظر با آن، مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌هایی است که توسط هیچ یک از جملات پیش‌رو عناصر G قابل تقسیم نیستند و آن را با $\mathcal{O}_\sigma(X)$ نمایش می‌دهیم.
از آن‌جایی که جملات پیش‌روی مولدهای ایده‌آل $I(D)$ دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند بنابر محک بوخبرگر $\{f_1, \ldots, f_n\}$ نسبت به هر ترتیبی یک پایه گربنر برای $I(D)$ است، در نتیجه مجموعه استاندارد متناظر با آن، $\mathcal{O}(D)$، منحصربه‌فرد است.
قبل از ارائه الگوریتم، تعریف و لم زیر را برای اثبات الگوریتم بیان می‌کنیم.

تعریف **۴.۳**. فرض کنیم $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ یک مجموعه متناهی از چندجمله‌ای‌ها و $X = \{p_1, \ldots, p_s\}$ یک مجموعه متناهی از نقاط باشد. ماتریس $M_G(X) = (g_i(p_i))_{k \times s}$، ماتریس ارزیابی G وابسته به X نامیده می‌شود.

لم **۵.۳**. فرض کنیم $X = \{p_1, \ldots, p_s\}$ یک مجموعه متناهی از نقاط، D طرح تمام نظیر X و $\mathcal{O}(D)$ مجموعه تک‌جمله‌ای‌های اختصاص‌یافته به D باشد. هر زیرمجموعه $\mathcal{O} = \{t_1, \ldots, t_\nu\}$ از $\mathcal{O}(D)$ که دارای ویژگی‌های زیر باشد یک پایه برای فضای برداری $R/I(X)$ است:

۱) $\nu = s$،

۲) ایده‌آل مرتب باشد،

۳) $\det(M_{\mathcal{O}}(X)) \neq 0$.

اثبات. فرض کنیم $R/I(X)$ حلقه مختصات آفین حاصل از مجموعه متناهی X از نقاط باشد، در این صورت یک یکریختی بین $\mathbb{K}$–فضای برداری $R/I(X)$ با $\mathbb{K}^s$ چنان موجود است که هر عضو مانند $g + I(X)$ را با $(g(p_1), \ldots, g(p_s))$ متناظر می‌کند. تصویر عناصر موجود در $\mathcal{O}$ برای $i = 1, \ldots, \nu$ به‌صورت $(t_i(p_1), \ldots, t_i(p_s))$ اند که تشکیل یک پایه برای $\mathbb{K}^s$ می‌دهند اگر و تنها اگر $\nu = s$ و $\det(M_{\mathcal{O}}(X)) \neq 0$. □

برای محاسبه‌ی ایده‌آل‌های مرتب اختصاص‌یافته به یک مجموعه متناهی از نقاط ابتدا $\mathcal{O}(D)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس تمام زیر مجموعه‌های $\mathcal{O}(D)$ با ویژگی‌های گفته‌شده را می‌یابیم. بردارهای حاصل از مقدار عددی عناصر این زیرمجموعه‌ها روی نقاط باید مستقل خطی باشند. در الگوریتم زیر اگر یک مجموعه متناهی نقطه به‌عنوان ورودی داشته باشیم، با این روش می‌توانیم ایده‌آل‌های مرتب اختصاص‌یافته به این نقاط را به‌دست آوریم.

قضیه **۶.۳**. الگوریتم $AllOrderIdeals$ پایان‌پذیر است و تمام ایده‌آل‌های مرتب اختصاص‌یافته به مجموعه متناهی X را به‌دست می‌آورد.

الگوریتم ۲ Reverse-engineering

ورودی: نقاط سری زمانی $s_۱, \dots, s_m \in S^n$.

خروجی: چندجمله‌ای‌های $f_i \in S[x_۱, \dots, x_n]$ برای هر $i = ۱, \dots, n$، به‌طوری که برای هر $j = ۱, \dots, m-۱$، $f_i(s_j) = s_{j+۱,i}$ با این ویژگی که روی سری‌های زمانی صفر نشوند.

۱: چندجمله‌ای اولیه‌ی f_i° برای هر گره $i = ۱, \dots n$ محاسبه می‌شود.

۲: مجموعه I را محاسبه می‌کنیم جایی که I ایده‌آل صفرساز نقاط سری زمانی است.

۳: صورت نرمال f_i° نسبت به I، که همان f_iها است، محاسبه می‌شود.

اثبات. ابتدا به پایان‌پذیر بودن الگوریتم می‌پردازیم. از آن‌جایی که مجموعه نقاط متناهی است پس E_iها نیز مجموعه‌های متناهی‌اند و در نتیجه مجموعه $\mathcal{O}(D)$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی است، بنابراین مرحله‌ی ۱ و ۳ پس از تعداد متناهی اجرا، خاتمه می‌یابد.
حال به درستی الگوریتم می‌پردازیم. در مرحله‌ی ۳، تمام زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{O}(D)$ را پیدا می‌کنیم که ویژگی لازم را دارند و در مرحله‌ی ۴ با محاسبه‌ی ماتریس ارزیابی $M_{\mathcal{O}_i}(X)$، $\mathcal{O}_i$هایی را که $\det(M_{\mathcal{O}_i}(X)) = ۰$ حذف می‌کنیم. با توجه به لم ۵.۳ هریک از $\mathcal{O}_i$های باقی‌مانده پایه‌ای برای فضای برداری $R/I(X)$اند. این $\mathcal{O}_i$ها تمام ایده‌آل‌های مرتب نظیر $I(X)$اند. □

مثال ۷.۳. نقاط داده‌شده در مثال ۲۰.۲ را در نظر می‌گیریم. تمام ایده‌آل‌های مرتب این نقاط به‌صورت زیرند:

$$\mathcal{O}_۱ = \{۱, x, y, x^۲, xy\}, \mathcal{O}_۲ = \{۱, x, y, y^۲, xy\}, \mathcal{O}_۳ = \{۱, x, y, x^۲, y^۲\}, \mathcal{O}_۴ = \{۱, x, x^۲, x^۳, x^۴\},$$
$$\mathcal{O}_۵ = \{۱, x, x^۲, x^۳, y\}, \mathcal{O}_۶ = \{۱, y, y^۲, y^۳, y^۴\}, \mathcal{O}_۷ = \{۱, x, y, y^۲, y^۳\}.$$

از بین این مجموعه‌ها فقط مجموعه‌های $\mathcal{O}_۱$، $\mathcal{O}_۲$ و $\mathcal{O}_۳$ به‌عنوان پایه $R/I(X)$ توسط الگوریتم محاسبه می‌شوند و بقیه حذف خواهند شد.

۴ کاربرد ایده‌آل مرتب در مدل‌های زیست شناسی

همان‌طور که در مقدمه نیز اشاره شد، ساختار ایده‌آل‌های مرتب به‌عنوان پایه فضای برداری می‌تواند در مدل سازی شبکه‌های تنظیم‌ساز ژن کاربرد داشته باشد. یکی از اهداف مهم سیستم‌های زیست‌شناسی بررسی ارتباط بین این شبکه‌ها و سازوکاری است که بر پویایی آن‌ها حاکم است. برای مدل‌سازی شبکه‌های تنظیم‌ساز ژنی تاکنون روش‌های متعددی پیش‌نهاد شده است. یکی از این روش‌ها، روش مهندسی معکوس است که لوبنباخر و همکاران در [۱۴] به آن پرداخته‌اند. چهارچوب مدل‌سازی مورد استفاده توسط لوبنباخر، سیستم‌های دینامیکی قطعی زمان-گسسته با مجموعه‌ای متناهی از حالت‌ها برای هر متغیر است. یک مثال برای این چنین مدل‌هایی، شبکه‌های دودویی است که در آن‌ها متغیرها تنها دو حالت ممکن دارند. الگوریتم روش مهندسی معکوس بر پایه‌ی ابزارهای موجود در جبر محاسباتی معرفی شده‌اند که در ادامه جزئیات آن را از دیدگاه جبری بیان می‌کنیم.
روش مهندسی معکوس با یک شبکه روی n گره شروع می‌شود که در شبکه‌های تنظیم‌ساز ژنی، هر گره بیانگر یک ژن است. فرض کنیم S مجموعه حالت‌های ممکن هر گره از شبکه باشد که تعداد عضوهای آن توانی از یک عدد اول p است.
فرض کنیم $F : S^n \longrightarrow S^n$ یک سیستم دینامیکی زمان-گسسته با بعد متناهی n باشد که با توابع مختصاتی $f_i : S^n \longrightarrow S$ به‌صورت $F(\mathrm{s}) = (f_۱(\mathrm{s}), \dots, f_n(\mathrm{s}))$ توصیف می‌شود که در آن $\mathrm{s} = (s_۱, \dots, s_n) \in S^n$.
سری‌های زمانی حالت ژن $\mathrm{s}_۱ = (s_{۱۱}, \dots, s_{۱n}), \dots, \mathrm{s}_m = (s_{m۱}, \dots, s_{mn})$ را در نظر می‌گیریم. هدف، یافتن تمام چندجمله‌ای‌های $f_i \in S[x_۱, \dots, x_n]$ است به‌طوری که $f_i(\mathrm{s}_j) = s_{j+۱,i}$ برای هر $i = ۱, \dots, n$ و $j = ۱, \dots, m-۱$.
این f_i ها باید به‌گونه‌ای باشند که برای هر i، هیچ چندجمله‌ای غیرصفر $g, h \in S[x_۱, \dots, x_n]$ وجود نداشته باشد به‌طوری که $f_i = h + g$ و g روی سری‌های زمانی برابر با صفر شود. به‌عبارت دیگر، مقدار f_iها روی این نقاط نباید صفر شود. الگوریتم ۲ که در [۱۴] ارائه شده است روش مهندسی معکوس برای یافتن f_iها است.

قضیه ۱.۴. الگوریتم ۲ پایان‌پذیر است و به‌ازای یک مجموعه متناهی نقاط سری زمانی و برای هر گره $i = ۱, \dots, n$ چندجمله‌ای $f_i \in S[x_۱, \dots, x_n]$ را که روی نقاط سری زمانی صفر نیست به‌عنوان یک مدل مناسب محاسبه می‌کند.

اثبات. اولین مرحله از الگوریتم، محاسبه‌ی چندجمله‌ای f_i° است. چندین روش مختلف برای محاسبه این چندجمله‌ای وجود دارد، از جمله روش درون‌یابی لاگرانژ. در مقاله [۱۴] با استفاده از قضیه‌ی مانده چینی چندجمله‌ای f_i° به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_i^\circ(x) = \sum_{j=۱}^{m-۱} s_{j+۱,i} r_j(x),$$

که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$. برای هر $1 \leqslant j \neq k < m$، اولین مختصات l را که در آن $s_j \neq s_k$ پیدا می‌کنیم و چندجمله‌ای $b_{jk}(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_{jk}(x) = (s_{j,l} - s_{k,l})^{p-2}(x_l - s_{k,l}),$$

که در آن p یک عدد اول است که تعداد عضوهای مجموعه S توانی از آن است. سپس چندجمله‌ای $r_j(x)$ به‌صورت زیر است:

$$r_j(x) = \prod_{k=1}^{m-1} b_{jk}(x).$$

با توجه به ساختار $r_j(x)$ توجه می‌کنیم که $r_j(s_j) = 1$ و در غیر این‌صورت $r_j(x) = 0$. در قسمت دوم مجموعه تمام چندجمله‌ای‌هایی که روی نقاط سری‌های زمانی صفر می‌شوند، یعنی ایده‌آل صفرساز نقاط، محاسبه می‌شود که از الگوریتم‌های موجود برای محاسبه‌ی نقاط می‌توان استفاده کرد. در آخر نیز با محاسبه‌ی پایه گربنر ایده‌آل به‌دست‌آمده از مرحله‌ی قبل می‌توان صورت نرمال f_i°ها را به‌دست آورد. $\square$

در قسمت سوم الگوریتم ۲، برای محاسبه‌ی صورت نرمال f_i° از پایه گربنر استفاده می‌شود. لوندکویست در [۱۵] با اشاره به این که فرایند به‌دست آوردن صورت نرمال با استفاده از پایه گربنر می‌تواند زمان‌بر باشد، از تکنیک‌های جبر خطی برای به‌دست آوردن صورت نرمال استفاده کرده است.

لم ۲.۴. فرض کنیم $X = \{p_1, \ldots, p_m\}$ مجموعه متناهی از نقاط باشد. مجموعه $B = \{[e_1], \ldots, [e_m]\}$ را به‌عنوان پایه برای فضای برداری $R/I(X)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر $f \in R$ شکل نرمال f نسبت به ایده‌آل $I(X)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Nf(f, B) = ([e_1], \ldots, [e_m])(B(X)^{-1})^t (f(p_1), \ldots, f(p_m))^t$$

اثبات. لم ۲۰۳ از مرجع [۱۵] دیده شود. $\square$

با توجه به لم فوق، برای مجموعه نقاط سری زمانی $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ با داشتن یک پایه برای فضای برداری $R/I(S)$ می‌توان مدل مناسب را محاسبه کرد. بنابراین مساله‌ی یافتن یک مدل مناسب به مساله‌ی محاسبه‌ی پایه فضای برداری تبدیل می‌شود.
همان‌طور که در بخش قبل گفته شد برای یک مجموعه متناهی نقاط X، ایده‌آل مرتب اختصاص‌یافته به $I(X)$ پایه‌ای برای فضای خارج قسمتی $R/I(X)$ است. ما با استفاده از الگوریتم ۱ تمام ایده‌آل‌های مرتب ایده‌آل نقاط را محاسبه می‌کنیم. در واقع با استفاده از این روش تمام پایه‌های فضای برداری $R/I(X)$ نسبت به هر ترتیب تک‌جمله‌ای را به‌دست می‌آوریم. در مثال زیر برای مجموعه متناهی نقاط سری زمانی S که در مقاله‌ی [۱۴] آمده است، ابتدا با استفاده از این الگوریتم پایه‌ی فضای برداری $R/I(S)$ را محاسبه می‌کنیم و با استفاده از لم ۲.۴ مدل مناسب را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۳.۴. مجموعه متناهی نقاط سری های زمانی حالت‌های یک شبکه ژنی

$$S = \{(-1,-1,-1), (1,0,-1), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,1)\}$$

را در $\mathbb{Z}_3^3$ در نظر می‌گیریم. این نقاط را به‌عنوان ورودی به الگوریتم ۱ می‌دهیم:

(مرحله ۱) $E_1 = E_2 = E_3 = \{-1, 0, 1\}$ بنابراین $l_1 = l_2 = l_3 = 3$.

(مرحله ۲) مجموعه

$$\begin{gathered}\mathcal{O}(D) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, yx, yx^2, yz, yz^2, y^2x,\\ y^2x^2, y^2z, y^2z^2, zx, zx^2, z^2x, z^2x^2, yzx, yzx^2, yz^2x,\\ yz^2x^2, y^2zx, y^2zx^2, y^2z^2x, y^2z^2x^2\}\end{gathered}$$

را محاسبه می‌کنیم.

(مرحله ۳) در این مرحله تمام زیرمجموعه‌های چهار عضوی $\mathcal{O}(D)$ که ایده‌آل مرتب‌اند، محاسبه می‌شوند:

$$\{1,x,y,z\}, \{1,x,y,xy\}, \{1,x,y,x^2\}, \{1,x,z,x^2\}, \{1,x,z,z^2\},$$

$$\{1,y,z,y^2\}, \{1,y,z,yz\}, \{1,x,y,y^2\}, \{1,y,z,z^2\}, \{1,x,z,xz\}$$

(مرحله ۴) در مرحله‌ی آخر پس از حذف مجموعه‌هایی که دترمینان ماتریس ارزیابی آن‌ها صفر است، ایده‌آل‌های مرتب زیر را خواهیم داشت:

$$\{1, x, y, z\}, \{1, x, y, xy\}, \{1, x, z, x^2\}, \{1, x, z, z^2\},$$

$$\{1, y, z, y^2\}, \{1, y, z, yz\}, \{1, y, z, z^2\}, \{1, x, z, xz\}$$

هر یک از ایده‌آل‌های مرتب بالا یک پایه برای فضای برداری $R/I(S)$ است. به‌طور مثال ایده‌آل مرتب $\{1, y, z, z^2\}$ را در نظر می‌گیریم و با استفاده از لم ۲.۴ مدل مناسب برای مجموعه سری‌های زمانی شبکه‌ی ژنی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\{z + 2z^2, 1 + 2z + z^2, 1 + 2z^2 + y\}.$$

۵ نتیجه‌گیری

ما با استفاده از تکنیک جبر خطی الگوریتمی برای محاسبه‌ی به‌طور هم‌زمان تمام ایده‌آل‌های مرتب اختصاص‌یافته به مجموعه متناهی نقاط را که در واقع پایه‌هایی برای فضای برداری $R/I(X)$اند به دست آوردیم، این الگوریتم در نرم‌افزار میپل اجرا شده و در دسترس است [۲۲]. سپس از آن برای به‌دست آوردن یک مدل مناسب برای شبکه های تنظیم ساز ژن استفاده نمودیم.

فهرست منابع

[۱] هاشمی، ا. پورخواجویی، س. و گلی، س، پایه مرزی ایده‌آل نقاط و کاربرد آن در مسئله طرح آزمایش‌ها و رگرسیون، نشریه پژوهش‌های ریاضی مصاحب، دوره ۶، شماره ۴ ، زمستان ۱۳۹۹.

[2] Buchberger B., ”Bruno Buchberger’s phD thesis 1965: *An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*, Translation from the German, J. Symb. Comput., 41 3-4 (2006), 475-511

[3] Cox D., Little J. and Oshea D., *Ideals, Varieties and Algorithm: An Introduction to computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, New York: Springer (1992).

[4] Farr J.B. and Gao S., *Computing Gröbner bases for vanishing ideals of finite sets of points*, In Applied algebra, algebraic algorithms and errorcorrecting cods, 16th international symposium, AAECC-16, Las Vegas, NV, USA, February 20-24, 2006. Proceedings. Berlin: Springer (2006), 118–127.

[5] Faugére J.C., *A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4)*, Journal of pure and applied algebra , 139.1-3 (1999), 61–88.

[6] Faugére J.C., *A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F 5)*, Proceedings of the 2002 international symposium on Symbolic and algebraic computation, (2002).

[7] Kaspar S., *Computing border bases without using a term ordering*, Beitr. Algebra Geom. 54, 1 (2013), 211-223.

[8] Kehrein A. and Kreuzer M., *Computing border bases*, Journal of Pure and Applied Algebra, 205.2 (2006), 279–295.

[9] Kehrein A. and Kreuzer M., *Characterizations of border bases*, Journal of Pure and Applied Algebra 196, 2-3 (2005), 251–270.

[10] Kehrein A., Kreuzer M. and Robbiano L., *An algebraist's view on border bases*, in:I. Emiris, A. Dickenstein(Eds.), Solving polynomial equations, Algorithms and computation in mathematics, vol. 14, Springer, Heidelberg, 2005. pp. 169–202.

[11] Kreuzer M. and Poulisse H., *Subideal border bases* Math. Comput. 80, 274 (2011), 1135–1154

[12] Kreuzer M. and Robbiano L., *Computational commutative algebra 2*. Vol. 2. Springer Science and Business Media (2005).

[13] Lakshman YN., *A single exponential bound on the complexity of computing Gröbner bases of zero dimensional ideals*, In Effective Methods in Algebraic Geometry, Birkhäuser, Boston, MA (1991), 227–234.

[14] Laubenbacher R. and Stigler B., *A computational algebra approach to the reverse engineering of gene regulatory networks* Journal of theoretical biology, 229.4 (2004), 523–537.

[15] Lundqvist S., *Vector space bases associated to vanishing ideals of points*, Journal of Pure and Applied Algebra, 214.4 (2010), 309–321.

[16] Marinari M., Möller H.M. and Mora T., *Gröbner bases of ideal given by dual bases*, In ISSAC '91. Proceedings of the 1991 international symposium on Symbolic and algebraic computation. Bonn, Germany, July 15-17, 1991. New York, NY: ACM Press (1991), 55-63.

[17] Marinari M., Möller H.M. and Mora T., *Gröbner bases of ideals defined by functionals with an application to ideals of projective points.* Appl. Algebra Engrg. comm. comput., (1993), 103-145.

[18] Möller H.M., Mora T. and Traverso C., *Gröbner bases computation using syzygies*, In International symposium on symbolic and algebraic computation 92. ISSAC 92. Berkeley, CA, USA, July 27-29, 1992. Baltimore, MD: ACM Press (1992), 320-328.

[19] Möller HM. and Buchberger B., *The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros*, European Computer Algebra Conference. Springer, Berlin, Heidelberg (1982), 24–31.

[20] Mourrain B., *A new criterion for normal form algorithms*, International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Code, Springer, Berlin, Heidelberg (1999), 430–442.

[21] Mourrain B., *Pythagore's dilemma, symbolic-numeric computation, and the border basis method*, In Symbolic-numeric computation. Invited and contributed presentations given at the international workshop(SNC 2005), Xi'an, China, July 19-21 (2005), Basel: Birkhauser (2007), 223-243.

[22] http://faculty.du.ac.ir/rahmani/

Algorithm for computing all order ideals of ideals of points and its application in biological models

Farzane Amini Khalafbadam[1,] , **Sajjad Rahmany**[2] [†] , **Abdolali Basiri** [3] **Martin Kreuzer** [4]

[(1),(2),(3)] Mathematics Faculty, Damghan University, Damghan, Iran
[(4)] Fakultät für Informatik und Mathematik Universität Passau, Innstr.33, D-94032 Passau, Deutschland

Communicated by: Amir Hashemi

Received: 2022/3/8 Accepted: 2022/8/6

Abstract: Ideals of points are considered as significant and efficient tools in modeling and computing science, which is why algorithms computing these types of ideals are of crucial importance. This paper proposes an algorithm to compute order ideals for ideals of points. Then those order ideals are used for modeling gene regulatory networks.

Keywords: Border basis, Groebner basis, Ideal of points, Order ideal, Gene regulatory networks.

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: farzane.amini@gmail.com (F. Amini Khalafbadam), rahmani@du.ac.ir (S. Rahmany), basiri@du.ac.ir (A. Basiri) Martin.Kreuzer@uni-passau.de (M. Kreuzer) .