مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۳۱۶-۳۲۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.36884.1907

مدول‌هایی که در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کنند

مریم داودیان ×، مهرداد نامداری

گروه ریاضی، دانشکده علوم کامپیوتر و ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۲۹

چکیده:
در این مقاله، مدول‌هایی را که در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کنند، بررسی می‌کنیم و به اختصار آن‌ها را $ns-DICC$ مدول می‌نامیم. با استفاده از این مفهوم برخی از نتایج اصلی $DICC$ مدول‌ها را به $ns-DICC$ مدول‌ها تعمیم می‌دهیم. نشان می‌دهیم اگر R –مدول M در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند، آن‌گاه M دارای بعد کرول غیرکوچک است. به‌علاوه، مشاهده می‌کنیم که R –مدول M یک $ns-DICC$ مدول است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمدول غیرکوچک A از M یا A در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند، و یا $\frac{M}{A}$ نوتری باشد.

واژه‌های کلیدی: مدول‌های غیرکوچک، بعد کرول، $DICC$ –مدول، $ns-DICC$ مدول.

رده‌بندی ریاضی: 16P40 :16P20 ;16P60

۱ مقدمه

مدول M را آرتینی می‌گوییم، هرگاه در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های خود صدق کند. بعد کرول، که اندازه‌ی انحراف از آرتینی بودن را نشان می‌دهد برای نخستین بار در سال ۱۹۷۶ توسط جی–رنتسلر و گابریل برای اعداد ترتیبی متناهی تعریف شده، سپس توسط جی–کراس به اعداد ترتیبی دلخواه تعمیم داده شده است، بعد کرول R –مدول M با نماد $\text{k-dim}\, M$ نشان داده می‌شود، برای جزئیات بیش‌تر به [۱۱، ۱۴] مراجعه شود . دوگان این بعد که اندازه‌ی انحراف از نوتری بودن را نشان می‌دهد، نخستین بار توسط لمونیه در [۱۵] معرفی شد، سپس کرمزاده در [۱۲] به مطالعه‌ی این بعد پرداخت و آن را بعد نوتری نامید. این بعد در [۶–۸، ۱۲، ۱۳] بعد نوتری نامیده شده است. برخی نویسندگان این بعد را دوگان بعد کرول نامیده‌اند، به [۱، ۲] مراجعه شود. بعد نوتری R –مدول M را با نماد $\text{n-dim}\, M$ نشان می‌دهیم. شرط زنجیر دوگانه نخستین بار توسط کونتسا برای مدول‌ها روی حلقه‌های جابه‌جایی ($DICC$ –مدول‌ها) معرفی شد، به [۴، ۵] مراجعه شود. کرمزاده و معتمدی در [۱۳] مدول‌های $\alpha-DICC$ را مطالعه کرده‌اند . سپس داودیان در [۱۰] به بررسی مدول‌هایی که در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرمتناهی‌مولد خود صدق می‌کنند، پرداخت. می‌گوییم K زیرمدول کوچک مدول M است و

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: m.davoudian@scu.ac.ir (M. Davoudian) namdari@scu.ac.ir (M. Namdari)

با نماد $M >> A$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر زیرمدول L از M، چنان‌چه از $K + L = M$ نتیجه شود $L = M$؛ اگر K زیرمدول کوچک M نباشد، آن‌را غیرکوچک می‌نامیم. در [۳] مدول‌هایی که در شرط زنجیر صعودی و نزولی روی زیرمدول‌های کوچک (غیرکوچک) خود صدق کنند، مطالعه شده‌اند. مفهوم زیرمدول کوچک (غیرکوچک) دوگان مفهوم زیرمدول اساسی (غیراساسی) است. اسمیت و ودادی در [۱۷] شرط زنجیر صعودی و نزولی روی زیرمدول‌های غیر اساسی را مطالعه کردند. سپس داودیان در [۹] به‌معرفی و بررسی بعد نوتری غیر اساسی و بعد کرول غیر اساسی پرداخت. اخیرا داودیان در [۸] مفاهیم بعد کرول غیرکوچک و بعد نوتری غیرکوچک R –مدول M را معرفی و بررسی کرده است. بعد کرول غیرکوچک و بعد نوتری غیرکوچک R –مدول M را به‌ترتیب با نمادهای nsk-dim M و nsn-dim M نشان می‌دهیم. این بعدها اعداد ترتیبی‌اند و به رفتار زنجیرهای صعودی و نزولی از زیرمدول‌های غیرکوچک، می‌پردازند، برای اطلاعات بیش‌تر به [۸] مراجعه شود.

در این مقاله مدول‌هایی را که در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کنند، معرفی و مطالعه کرده و به اختصار آن‌ها را $ns - DICC$ مدول می‌نامیم. نشان می‌دهیم چنان‌چه R –مدول M در شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند، آن‌گاه M دارای بعد کرول غیرکوچک است. به‌علاوه مشاهده می‌کنیم R –مدول M یک $ns - DICC$ مدول است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمدول غیرکوچک A از M، یا A در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند و یا $\frac{M}{A}$ نوتری باشد. رادیکال R –مدول M را با نماد $Rad(M)$ نشان می‌دهیم. اگر M یک $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه مشاهده می‌کنیم که $\frac{M}{Rad(M)}$ دارای بعد کرول است.

۲ بعد کرول غیرکوچک و بعد نوتری غیرکوچک

در این بخش برخی نتایج مفید درباره‌ی بعد کرول غیرکوچک و بعد نوتری غیرکوچک را یادآوری می‌کنیم، به [۸] مراجعه شود.

تعریف **۱.۲**. فرض کنیم A یک R مدول باشد. بعد کرول غیرکوچک A که با نماد nsk-dim A نشان داده می‌شود، با استقراء ترامتناهی و به‌صورت زیر تعریف می‌شود: اگر A زیرمدول غیرکوچک سره نداشته باشد، nsk-dim $A = -۱$. اگر α یک عدد ترتیبی باشد و nsk-dim $A \not< \alpha$، و هم‌چنین A زنجیر نزولی نامتناهی از زیرمدول‌های غیرکوچک مانند $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \dots$ به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳, ..$، nsk-dim $\frac{A_{i-۱}}{A_i} \not< \alpha$ نداشته باشد، آن‌گاه nsk-dim $A = \alpha$. به‌عبارت دیگر nsk-dim $A = \alpha$، اگر nsk-dim $A \not< \alpha$ و به‌ازای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های غیرکوچک A مانند

$$A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq A_۳ \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+۱} \supseteq \dots$$

عدد صحیح t موجود باشد، به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i \geq t$ داشته باشیم nsk-dim $\frac{A_{i-۱}}{A_i} < \alpha$.

یادآوری می‌کنیم که R –مدول M تک زنجیری نامیده می‌شود اگر گردایه‌ی زیرمدول‌های آن با رابطه‌ی شمول یک مجموعه‌ی کاملا مرتب باشد. به‌وضوح اگر M یک مدول کاملا مرتب باشد، آن‌گاه هر زیرمدول سره‌ی M در M کوچک است و بنابراین nsk-dim $M = -۱$ ولی M لزوما بعد کرول ندارد.

لم **۲.۲**. اگر R –مدول M دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه دارای بعد کرول غیرکوچک است و nsk-dim $M \leq$ k-dim M.

اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد، آن‌گاه تنها زیرمدول کوچک $\mathbb{Z}$ –مدول $\mathbb{Z}$ صفر است و بنابراین k-dim $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} =$ nsk-dim $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} = ۱$.

اکنون نتایج مفید زیر را بیان می‌کنیم، برای دیدن اثبات به مرجع [۸، لم ۳.۲، ۴.۲ و ۵.۲] مراجعه شود.

گزاره **۳.۲**. گیریم R –مدول M بعد کرول غیرکوچک داشته باشد. آن‌گاه هر جمع‌وند مستقیم A از M، دارای بعد کرول غیرکوچک است و nsk-dim $A \leq$ nsk-dim M.

گزاره **۴.۲**. گیریم R –مدول M بعد کرول غیرکوچک داشته باشد. آن‌گاه به‌ازای هر زیر مدول A از M، $\frac{M}{A}$ دارای بعد کرول غیرکوچک است و nsk-dim $\frac{M}{A} \leq$ nsk-dim M.

گزاره **۵.۲**. گیریم هر زیرمدول غیرکوچک M دارای بعد کرول غیرکوچک باشد. در این صورت M دارای بعد کرول غیرکوچک است و

$$\text{nsk-dim}\, M \leq \sup\{\text{nsk-dim}\, A : A \in NS(M)\}$$

که $NS(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های غیرکوچک M است.

یادآوری می‌کنیم که اگر M یک R–مدول و $K \subseteq N \subseteq M$ ، آن‌گاه N زیرمدول غیرکوچک M است اگر و تنها اگر $\frac{N}{K}$ زیرمدول غیرکوچک $\frac{M}{K}$، و یا K زیرمدول غیرکوچک M باشد، به [۱۶، لم ۱.۱.۱] مراجعه شود.
بنابر یادآوری بالا نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم، به [۸، لم ۶.۲] مراجعه شود.

لم ۶.۲. گیریم R–مدول M دارای بعد کرول غیرکوچک باشد. در این صورت به‌ازای هر زیرمدول غیرکوچک A از M، $\frac{M}{A}$ دارای بعد کرول است و $\text{k-dim}\,\frac{M}{A} = \text{nsk-dim}\,\frac{M}{A} \leq \text{nsk-dim}\,M$.

نتیجه ۷.۲. گیریم R–مدول M دارای بعد کرول غیرکوچک باشد. اگر A جمعوند مستقیم M باشد، آن‌گاه

$$\sup\{\text{nsk-dim}\,A, \text{k-dim}\,\frac{M}{A}\} \leq \text{nsk-dim}\,M.$$

یادآوری می‌کنیم که مدول ناصفر M میان‌تهی نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول سره‌ی N از M در M کوچک باشد. بنابراین اگر M یک مدول میان‌تهی باشد $\text{nsk-dim}\,M = -۱$.
در ادامه نتیجه‌ی زیر را از مرجع [۸، گزاره‌ی ۱۰.۲] بیان می‌کنیم.

گزاره ۸.۲. گیریم M یک R–مدول تجزیه‌پذیر باشد. در این صورت $\text{k-dim}\,M = \alpha$ اگر و تنها اگر $\text{nsk-dim}\,M = \alpha$.

در اینجا تعریف بعد نوتری غیرکوچک را بیان می‌کنیم.

تعریف ۹.۲. فرض کنیم A یک R–مدول باشد. بعد نوتری غیرکوچک A که با نماد $\text{nsn-dim}\,A$ نشان داده می‌شود، با استقراء ترامتناهی و به‌صورت زیر تعریف می‌شود: اگر A زیرمدول غیرکوچک سره نداشته باشد، $\text{nsn-dim}\,A = -۱$. اگر α یک عدد ترتیبی باشد و $\text{nsn-dim}\,A \not< \alpha$، و همچنین A زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های غیرکوچک مانند $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \dots$ به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i = ۱, ۲, ۳, \dots$، $\text{nsn-dim}\,\frac{A_{i-۱}}{A_i} \not< \alpha$ نداشته باشد، آن‌گاه $\text{nsn-dim}\,A = \alpha$. به‌عبارت دیگر $\text{nsn-dim}\,A = \alpha$، اگر $\text{nsn-dim}\,A \not< \alpha$ و به‌ازای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های غیرکوچک A مانند

$$A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq A_۳ \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+۱} \subseteq \dots$$

عدد صحیح t موجود باشد، به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i \geq t$ داشته باشیم $\text{nsn-dim}\,\frac{A_{i-۱}}{A_i} < \alpha$.

روشن است که اگر R–مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه دارای بعد نوتری غیرکوچک است و $\text{nsn-dim}\,M \leq \text{n-dim}\,M$. همچنین روشن است که اگر هر زیرمدول سره‌ی M در M کوچک باشد، آن‌گاه $\text{nsn-dim}\,M = -۱$. اکنون نتیجه‌ی زیر را از مرجع [۸، ۴.۳] یادآوری می‌کنیم.

نتیجه ۱۰.۲. گیریم M یک R–مدول ناصفر باشد. دراین صورت $\text{nsn-dim}\,M \leq ۰$ اگر و تنها اگر M در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند.

در ادامه نتایج مفید زیر را که دوگان گزاره‌های ۳.۲ و ۴.۲ اند، را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۱.۲. گیریم R–مدول M بعد نوتری غیرکوچک داشته باشد. آن‌گاه هر جمعوند مستقیم A از M، دارای بعد نوتری غیرکوچک است و $\text{nsn-dim}\,A \leq \text{nsn-dim}\,M$.

گزاره ۱۲.۲. گیریم R–مدول M بعد نوتری غیرکوچک داشته باشد. آن‌گاه به‌ازای هر زیر مدول A از M، $\frac{M}{A}$ دارای بعد نوتری غیرکوچک است و $\text{nsn-dim}\,\frac{M}{A} \leq \text{nsn-dim}\,M$.

گزاره ۱۳.۲. فرض کنیم R–مدول M دارای بعد نوتری غیرکوچک باشد. آن‌گاه به‌ازای هر زیرمدول غیرکوچک N از M، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نوتری است و $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} = \text{nsn-dim}\,\frac{M}{N} \leq \text{nsn-dim}\,M$.

اثبات. به [۸، لم ۸.۳] مراجعه شود. □

۳ شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک

شرط زنجیر دوگانه نخستین بار توسط کونتسا برای مدول‌ها روی حلقه‌های جابه‌جایی ($DICC$ –مدول‌ها) معرفی شد، به [۴، ۵] مراجعه شود. کرمزاده و معتمدی در [۱۳] مدول‌های $DICC - \alpha$ را مطالعه کرده‌اند. در این بخش به‌معرفی و بررسی شرط زنجیر دوگانه روی زیرمدول‌های غیرکوچک یک مدول می‌پردازیم. نخست به‌تعریف مدول‌های $ns - DICC$ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. R- مدول M را $ns - DICC$ مدول می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر زنجیر دوگانه

$$\dots \subseteq M_{-2} \subseteq M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

از زیرمدول‌های غیرکوچک M عدد صحیح k وجود داشته باشد، به‌طوری که به‌ازای هر $i \geq k$ داشته باشیم $M_i = M_{i+1}$ و یا به‌ازای هر $i \leq k$ داشته باشیم $M_i = M_{i+1}$.

به‌وضوح، $DICC$ –مدول‌ها، $ns - DICC$ مدول‌اند، اما عکس این مطلب درست نیست؛ به‌عنوان مثال اگر M یک مدول تک زنجیری باشد که بعد کرول ندارد، آن‌گاه M یک $ns - DICC$ مدول است که $DICC$ مدول نیست، به [۱۳، نتیجه ۱.۱] مراجعه شود. همچنین لازم به‌ذکر است که مدول $DICC - \alpha$ نیز وجود دارد که $ns - DICC$ مدول نیست. به‌عنوان مثال $\mathbb{Z}$ –مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p^\infty$ یک $DICC - 1$ مدول است، ولی زنجیر

$$\dots \subset 8\mathbb{Z} \oplus 0 \subset 4\mathbb{Z} \oplus 0 \subset 2\mathbb{Z} \oplus 0 \subset 2\mathbb{Z} \oplus G_1 \subset 2\mathbb{Z} \oplus G_2 \subset \dots$$

که $G_i =< \frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} >$ ، نشان می‌دهد که $ns - DICC$ مدول نیست، به [۱۳] مراجعه شود.

فرض کنیم M یک R –مدول و $K \subseteq N \subseteq M$. اگر N یک جمعوند مستقیم M باشد، آن‌گاه K زیرمدول غیرکوچک M است اگر و تنها اگر K زیرمدول غیرکوچک N باشد، به [۱۶، لم ۱.۱.۱] مراجعه شود . اکنون بنابر یادآوری که بعد از گزاره‌ی ۵.۲ بیان شده است، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

لم ۲.۳. اگر M یک مدول $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم M نیز $ns - DICC$ است.

لم ۳.۳. گیریم M یک R –مدول و H زیرمدولی از آن باشد. اگر M یک $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه $\frac{M}{H}$ نیز چنین است.

اثبات گزاره‌ی بعد برای راحتی کار خواننده آورده شده است.

گزاره ۴.۳. اگر M یک $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه به‌ازای هر زنجیر نزولی $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$ از زیرمدول‌های غیرکوچک M یا به‌ازای هر i، مدول $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کند و یا عدد صحیح k به‌گونه‌ای وجود دارد که به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $N_{i+1} = N_i$.

اثبات. فرض کنیم r به‌گونه‌ای وجود داشته باشد، که $\frac{N_r}{N_{r+1}}$ در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق نکند. در این صورت زنجیر صعودی نامتناهی $\dots \subseteq N_{r+2} \subseteq N_{r+1} \subset N'_1 \subset N'_2 \subset \dots$ یک زنجیر دوگانه از زیرمدول‌های غیرکوچک M است. بنابراین عدد صحیح $k > r$ به‌گونه‌ای وجود دارد که به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $N_i = N_{i+1}$.
□

اثبات گزاره‌ی بعد شبیه اثبات گزاره‌ی ۴.۳ است و بنابراین از آن صرف نظر شده است.

گزاره ۵.۳. اگر M یک $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه به‌ازای هر زنجیر صعودی $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ از زیرمدول‌های غیرکوچک M یا به‌ازای هر i، مدول $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کند و یا عدد صحیح k به‌گونه‌ای وجود دارد که به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $M_{i+1} = M_i$.

بنابر نتیجه‌ی جالبی از لمونیه می‌دانیم که R –مدول M دارای بعد کرول (بعد کرول کوچک) است اگر و تنها اگر دارای بعد نوتری (بعد نوتری کوچک) باشد، به [۱۵، نتیجه ۶] مراجعه شود. با توجه به این حقیقت و بنابر گزاره‌ی ۴.۳، گزاره‌ی زیر را داریم.

گزاره ۶.۳. اگر M یک مدول $ns - DICC$ باشد، آن‌گاه M دارای بعد کرول غیرکوچک است.

اثبات. گیریم $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$ یک زنجیر نزولی نامتناهی از زیرمدول‌های غیرکوچک M باشد. اگر این زنجیر ایستا نباشد، آن‌گاه بنابر گزاره‌ی ۴.۳، به‌ازای هر i، $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ در شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق می‌کند؛ بنابراین به‌ازای هر i داریم $\text{nsn-dim}\, \frac{N_{i+1}}{N_i} = 0$، به‌نتیجه‌ی ۱۰.۲، مراجعه شود. حال بنابر توضیحی که قبل از این گزاره آورده شده، به‌ازای هر $k \geq i$، $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ دارای بعد کرول غیرکوچک است و حکم برقرار است.
□

اگر M یک R -مدول باشد، رادیکال M را با نماد $Rad(M)$ نشان می‌دهیم. در [۸، گزاره‌ی ۱۳.۲] نشان داده‌ایم که اگر nsk-dim $M = \alpha$، آن‌گاه k-dim $\frac{M}{Rad(M)} \leq \alpha$.
اکنون از گزاره‌ی ۶.۳ نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۷.۳. اگر M یک $ns - DICC$ مدول باشد، آن‌گاه $\frac{M}{RadM}$ دارای بعد کرول است.

فرض کنیم M یک R -مدول و $K \subseteq N \subseteq M$. اگر K زیرمدول غیرکوچک M باشد، آن‌گاه K زیرمدول غیرکوچک N است، به [۱۶، لم ۱.۱.۱] مراجعه شود.

گزاره ۸.۳. R- مدول M یک $ns - DICC$ مدول است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمدول غیرکوچک N از M یا N در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند و یا $\frac{M}{N}$ نوتری باشد.

اثبات. گیریم $N_۱ \supset N_۲ \supset N_۳ \supset \dots$ زنجیری از زیرمدول‌های غیرکوچک N باشد. نشان می‌دهیم $\frac{M}{N}$ نوتری است. گیریم $\dots \subseteq \frac{A_۳}{N} \subseteq \frac{A_۲}{N} \subseteq \frac{A_۱}{N}$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های $\frac{M}{N}$ باشد. بنابر توضیحی که بعد از گزاره‌ی ۵.۲ آمده است، A_i یک زیرمدول‌های غیرکوچک M است. بنابراین $\dots \subseteq A_۲ \subseteq A_۱ \subset N_۱ \subset N_۲ \subset N_۳ \dots$ یک زنجیر دوگانه از زیرمدول‌های غیرکوچک M است. بنابراین عدد صحیح k به‌گونه‌ای وجود دارد که به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $A_i = A_{i+۱}$ و از این‌رو به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $\frac{A_i}{N} = \frac{A_{i+۱}}{N}$ و حکم برقرار است. به‌عکس، فرض کنیم

$$\dots N_{-۲} \subseteq N_{-۱} \subseteq N_۰ \subseteq N_۱ \subseteq N_۲ \subseteq \dots$$

زنجیری دوگانه از زیرمدول‌های غیرکوچک M باشد. بنابر توضیحی که قبل از این گزاره آمده است، $\dots \supseteq N_{-۲} \supseteq N_{-۱} \supseteq N_۰$ زنجیری از زیرمدول‌های غیرکوچک $N_۰$ است. اگر $N_۰$ در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های غیرکوچک صدق کند، این زنجیر ایستا است. در غیر این صورت، $\dots \subseteq \frac{N_۲}{N_۰} \subseteq \frac{N_۱}{N_۰}$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های $\frac{M}{N_۰}$ است، از طرفی بنابر فرض قضیه $\frac{M}{N_۰}$ یک مدول نوتری است و لذا این زنجیر ایستا است؛ یعنی عدد صحیح k وجود دارد، به‌گونه‌ای که به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $\frac{N_i}{N_۰} = \frac{N_k}{N_۰}$ و بنابراین به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $N_i = N_k$ و حکم برقرار است. □

فهرست منابع

[1] T. Albu, S. Rizvi, Chain conditions on quotient finite dimensional modules, Comm. Algebra. **29(5)** (2001) 1909–1928.

[2] T. Albu, P. F. Smith, Dual Krull dimension and duality, Rocky Mountain J. Math. **29** (1999) 1153–1164.

[3] I. Al. khazzi, P. F. Smith, Modules with chain condition on supperfluous submodules, Commun. Algebra. **19 (8)** (1991) 2332-2351.

[4] M. Contessa, On modules with DICC, J Algebra. **107** (1987) 75–81.

[5] M. Contessa, On DICC rings, J Algebra. **105** (1987) 429–436.

[6] M. Davoudian, Modules with chain condition on non-finitely generated submodules, Mediterr. J. Math. **15(1)**(2018). https://doi.org/10.1007/s00009-017-1047-y

[7] M. Davoudian, Dimension of non-finitely generated submodules, Vietnam J. Math. **44** (2016) 817–827.

[8] M. Davoudian, Dimension on non-small submodules, Bull. Iran. Math. Soc. **45** (2019) 1758–1793.

[9] M. Davoudian, Dimension on non-essential submodules, J. Algebra Appl. **18(5)** (2019). https://doi.org/10.1142/S0219498819500890

[10] M. Davoudian, Modules satisfying double chain condition on non-finitely generated submodules have Krull dimension, Turk. J. Math. **41** (2017) 1570–1578.

[11] R. Gordon, J. C. Robson, Krull dimension, Mem. Amer. Math. Soc. **133**, 1973.

[12] O. A. S. Karamzadeh, Noetherian-dimension, Ph.D. thesis, Exeter, 1974.

[13] O. A. S. Karamzadeh, M. Motamedi, On α-$Dicc$ modules, Comm. Algebra. **22** (1994) 1933–1944.

[14] G. Krause, Ascending chains of submodules and the Krull dimension of Noetherian modules, J. Pure Appl. Algebra. **3** (1973) 385–397.

[15] B. Lemonnier, Deviation des ensembless et groupes totalement ordonnes, Bull. Sci. Math. **96** (1972) 289–303.

[16] C. Lomp, On dual Goldie dimension, Ph. D. thesis, Dussldorf, 1996.

[17] P. F. Smith, M. R. Vedadi, Modules with chain condition on non-essential submodules, Comm. Algebra. **32(5)** (2004) 1881–1894.

Modules satisfying double chain condition on non-small submodules

Maryam Davoudian † **, Mehrdad Namdari**

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 2021/3/12 Accepted: 2022/8/20

Abstract: In this article, we study modules that satisfy the double infinite chain condition on non-small submodules, briefly called $ns-DICC$ modules. Using this concept we extend some of the basic results of $DICC$ modules to $ns-DICC$ modules. We show that if an R-module M satisfies the double infinite chain conditionn on non-small submodules, then M has non-small Krull dimension. Moreover, we observe that an R-module M is an $ns-DICC$ module if and only if for each non-small submodule A of M either A satisfies the descending chain condition on non-small submodules, or $\frac{M}{A}$ is Noetherian.

Keywords: Non-small modules, Krull dimension, DICC-modules, ns-DICC modules.

†Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Davoudian) m.davoudian@scu.ac.ir, (M. Namdari) namdari@scu.ac.ir .