مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۳۲۳-۳۳۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.37327.1928

پیرامون Γ-نیم‌اَبَرگروه‌های مرتب و شبه‌مرتب

سهراب استادهادی دهکردی [۱] [×]، بیژن دواز [۲]، نوره رخش خورشید [۳]

[(۱،۳)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران
[(۲)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

دبیر مسئول: محمد شهریاری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۲۹

چکیده: Γ- اَبَرساختارهای جبری، تعمیم اَبَرساختارهای جبری و ساختارهای جبری کلاسیک‌اند. یکی از این Γ- اَبَرساختارهای جبری، Γ- نیم‌اَبَرگروه است که تعمیمی از Γ- نیم‌گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها است. در این مقاله مفهوم Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و مرتب به‌عنوان تعمیمی از نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و مرتب بیان و بررسی شده و با استفاده از رابطه‌ی شبه‌مرتب، Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب مشخصه‌سازی می‌شوند. هم‌چنین بخش کامل و رابطه‌ی اساسی روی Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب معرفی و بررسی می‌شوند. در نهایت با استفاده از Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و مرتب، ساختار نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب و مرتب معرفی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: رابطه‌ی اساسی، بخش کامل، بستار انتقالی، رابطه‌ی منظم و منظم قوی، مجموعه‌ی نرم ناهموار.

رده‌بندی ریاضی: 68W25; 20N20

۱ مقدمه

مفهوم اَبَرساختارهای جبری [†] در سال ۱۹۳۴ در کنگره‌ی ریاضی‌دانان اسکاندیناوی توسط مارتی معرفی شد [۱]. وی به انتشار مطالبی در مورد اَبَرگروه‌ها [‡] در رابطه با توابع جبری و گروه‌های غیر آبلی پرداخت. در واقع اَبَرگروه‌ها تعمیم مناسبی از گروه‌هایند که برای تعریف آن از مفهوم اَبَرعمل [§] استفاده می‌شود و می‌توان به اَبَرگروه از نوع مارتی، اَبَرگروه‌های منظم، اَبَرگروه‌های منظم برگشت‌پذیر، اَبَرگروه‌های کانونی، اَبَرگروه‌های دوری و پلی‌گروه‌ها اشاره کرد [۲، ۳]. لازم به‌ذکر است که با توجه به ویژگی‌های اَبَرعمل، انواع گوناگون اَبَرگروه وجود دارد. در زمینه کاربردهای اَبَرساختارهای جبری می‌توان به کتاب [۳] اشاره کرد که در آن به کاربردهایی در زمینه اَبَرگراف‌ها، روابط دوتایی، هندسه

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: Ostadhadi@hormozgan.ac.ir (S. Ostadhadi-dehkordi), davvaz@yazd.ac.ir (B. Davvaz)
n.rakhshkhorshid.phd@hormozgan.ac.ir (N. Rakhsh-khorshid)

[†] Hyperstructures
[‡] Hypergroups
[§] Hyperoperation

و نظریه احتمال، کدگذاری و مجموعه‌های ناهموار اشاره شده است. در ادامه مفهوم Γ- اَبَرساختارهای جبری و Γ- اَبَرساختارهای جبری n-تایی به‌عنوان تعمیمی از اَبَرساختارهای جبری و ساختارهای جبری کلاسیک با معرفی n- نیم‌اَبَرگروه‌ها، n- گروه‌ها، گروه‌های n- تایی معرفی شد [۴، ۸]. در این اَبَرساختارهای جبری برخلاف نیم‌اَبَرگروه‌ها و اَبَرگروه‌ها مجموعه‌ای از اَبَرعمل‌ها با ضابطه‌های گوناگون داریم که با هم در ارتباط‌اند. هم‌چنین مفاهیم Γ- نیم‌اَبَرحلقه‌ها، Γ- اَبَرحلقه‌ها و Γ- اَبَرمدول‌ها از دیگر Γ- اَبَرساختارهای جبریند که معرفی و مطالعه شده‌اند [۸].

در این مقاله به معرفی و بررسی Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های مرتب خواهیم پرداخت. با استفاده از رابطه‌ی هم‌ارزی مشخصی، ساختار نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب و نیم‌اَبَرگروه مرتب مشتق شده از Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های مرتب معرفی می‌شود که مطالعه‌ی آن منجر به ایجاد درک بهتری از این Γ- اَبَرساختار جبری خواهد شد. برای ایجاد ارتباط بین این Γ- اَبَرساختار جبری و ساختار جبری کلاسیک گروه‌ها، یک رابطه‌ی اساسی روی نیم‌اَبَرگروه‌ها به‌عنوان رابطه‌ی منظم قوی معرفی می‌شود و ثابت می‌شود که این رابطه هم‌ارزی است. به‌عبارت دیگر ثابت می‌شود که بستار انتقالی رابطه‌ی اساسی تعریف‌شده برابر با آن رابطه‌ی اساسی است. هم‌چنین بخش کامل نیز در Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های مرتب معرفی شده و ثابت می‌شود که Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب دارای بخش کامل محض نابدیهی نیست. در پایان تعمیمی از Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب و مجموعه‌های نرم ناهموار با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی معرفی کرده و مثال‌هایی از این Γ- اَبَرساختار جبری جدید ارائه می‌دهیم.

۲ Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب

در این بخش مفهوم Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب را معرفی می‌کنیم و شرط لازم و کافی برای مرتب بودن یک Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب را به‌دست می‌آوریم.

تعریف **۱.۲.** فرض کنیم H و Γ دو مجموعه‌ی ناتهی‌اند. در این صورت H را Γ- نیم‌اَبَرگروه گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in \Gamma$، اَبَرعمل $\underset{\alpha}{\otimes} : H * H \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد. به‌عبارت دیگر برای هر $\alpha, \beta \in \Gamma$ و $x, y, z \in H$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$(x \underset{\alpha}{\otimes} y) \underset{\beta}{\otimes} z = x \underset{\alpha}{\otimes} (y \underset{\beta}{\otimes} z).$$

Γ- نیم‌اَبَرگروه H دارای اسکالر همانی است، هرگاه برای هر $\alpha \in \Gamma$، عضو $e_\alpha \in H$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in H$،

$$x = e_\alpha \underset{\alpha}{\otimes} x = x \underset{\alpha}{\otimes} e_\alpha.$$

فرض کنیم برای هر $\alpha \in \Gamma$، $e \in H$ اسکالر همانی باشد. در این صورت برای هر $x, y \in H$ خواهیم داشت:

$$x \underset{\alpha}{\otimes} y = x \underset{\alpha}{\otimes} (e \underset{\beta}{\otimes} y) = (x \underset{\alpha}{\otimes} e) \underset{\beta}{\otimes} y = x \underset{\beta}{\otimes} y.$$

به‌عبارت دیگر اَبَرعمل‌های α و β روی H یکسان عمل می‌کنند و در واقع یک نیم‌اَبَرگروه خواهیم داشت.

تعریف **۲.۲.** فرض کنیم H، Γ- نیم‌اَبَرگروه باشد و $\alpha \in \Gamma$. در این صورت H را α- شبه‌مرتب گوییم، هرگاه

۱) برای هر $x \in H$، $x \in x \underset{\alpha}{\otimes} x \underset{\alpha}{\otimes} x \subseteq x \underset{\alpha}{\otimes} x$.

۲) برای هر $x, y \in H$، $x \underset{\alpha}{\otimes} y = (x \underset{\alpha}{\otimes} x) \cup (y \underset{\alpha}{\otimes} y)$.

هم‌چنین Γ- نیم‌اَبَرگروه H را α- مرتب گوییم، هرگاه α- شبه‌مرتب باشد و برای هر $x, y, z \in H$، از این‌که $x \underset{\alpha}{\otimes} x = y \underset{\alpha}{\otimes} y$ نتیجه بگیریم $x = y$. اگر برای هر $\alpha \in \Gamma$، Γ- نیم‌اَبَرگروه H، α- شبه‌مرتب باشد، آن‌گاه H را شبه‌مرتب گوییم و اگر برای هر $\alpha \in \Gamma$، α- مرتب باشد، آن‌گاه آن را α- مرتب گوییم.

مثال **۳.۲.** فرض کنیم X مجموعه‌ی ناتهی و Γ زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن باشد. برای هر $x, y \in H$ و برای هر $\alpha \in \Gamma$، اَبَرعمل را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x \underset{\gamma}{\otimes} z = \{x, \gamma, z\}.$$

در این صورت X، Γ- نیم‌اَبَرگروه مرتب است.

مثال **۴.۲.** فرض کنیم $\{A_x\}_{x\in H}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های جدا از هم باشد و H را Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب در نظر می‌گیریم. در این صورت $G=\bigcup_{x\in H} A_x$ نیز با اَبَرعمل زیر یک Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است:

$$a \underset{\alpha}{\oplus} b = \bigcup_{t\in x_1 \underset{\alpha}{\otimes} x_2} A_t,$$

که در آن $a\in A_{x_1}$ و $b\in A_{x_2}$.

مثال **۵.۲.** فرض کنیم

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n=[n,n+1),$$

و $\Gamma=\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$. در این صورت برای هر $x,y\in S$ و $\alpha_n\in\Gamma$ اَبَرعمل $x\underset{\alpha_n}{\oplus} y = A_{n_1 n n_2}$ را روی S در نظر می‌گیریم که $x\in A_{n_1}$ و $y\in A_{n_2}$. لذا S با این اَبَرعمل Γ- نیم‌اَبَرگروه است که شبه‌مرتب نیست.

مثال **۶.۲.** فرض کنیم $H=\{a,b\}$ و $\Gamma=\{\alpha,\beta\}$ باشد. در این صورت H با اَبَرعمل‌های تعریف‌شده به‌صورت زیر Γ- اَبَرگروه مرتب است:

α	a	b
a	a	H
b	H	H

β	a	b
a	H	H
b	H	b

مثال **۷.۲.** فرض کنیم $H=\{a,b,c\}$ و $\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ است به‌طوری که

α	a	b	c
a	a	H	H
b	H	H	H
c	H	H	H

β	a	b	c
a	H	H	H
b	H	b	H
c	H	H	H

γ	a	b	c
a	H	H	H
b	H	H	H
c	H	H	c

در این صورت H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است.

قضیه **۸.۲.** فرض کنیم H، Γ- نیم‌اَبَرگروه باشد. در این صورت H ، α- (شبه) مرتب است اگر و تنها اگر رابطه‌ی شبه‌مرتب ρ_α موجود باشد که برای هر $x,y\in H$، داشته باشیم:

$$x\underset{\alpha}{\otimes} y=[x]_{\rho_\alpha}\cup[y]_{\rho_\alpha}.$$

اثبات. فرض کنیم H، Γ- نیم‌اَبَرگروه α- شبه مرتب باشد. برای هر $x,y\in H$ رابطه‌ی دوتایی ρ_α را به‌صورت

$$x\rho_\alpha y :\Longleftrightarrow y\in x\underset{\alpha}{\otimes} x.$$

تعریف می‌کنیم. با توجه به این‌که $x\in x\underset{\alpha}{\otimes} x\underset{\alpha}{\otimes} x\subseteq x\underset{\alpha}{\otimes} x$، نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی ρ_α بازتابی است. فرض کنیم $x\rho_\alpha y$ و $y\rho_\alpha z$. بنابراین $y\in x\underset{\alpha}{\otimes} x$ و $z\in y\underset{\alpha}{\otimes} y$. در نتیجه

$$z\in (x\underset{\alpha}{\otimes} x)\underset{\alpha}{\otimes}(x\underset{\alpha}{\otimes} x)=(x\underset{\alpha}{\otimes} x\underset{\alpha}{\otimes} x)\underset{\alpha}{\otimes} x\subseteq x\underset{\alpha}{\otimes} x\underset{\alpha}{\otimes} x\subseteq x\underset{\alpha}{\otimes} x.$$

لذا رابطه‌ی ρ_α انتقالی است و α- شبه‌مرتب است. هم‌چنین طبق تعریف رابطه‌ی دوتایی ρ_α نتیجه می‌گیریم که

$$x\underset{\alpha}{\otimes} y=(x\underset{\alpha}{\otimes} x)\cup(y\underset{\alpha}{\otimes} y)=[x]_{\rho_\alpha}\cup[y]_{\rho_\alpha}.$$

فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه α- مرتب باشد، $x\rho_\alpha y$ و $y\rho_\alpha x$. طبق تعریف $y\in x\underset{\alpha}{\otimes} x$ و $x\in y\underset{\alpha}{\otimes} y$. از طرفی

$$x\underset{\alpha}{\otimes} x\subseteq (y\underset{\alpha}{\otimes} y)\underset{\alpha}{\otimes}(y\underset{\alpha}{\otimes} y)\subseteq y\underset{\alpha}{\otimes} y,$$

$$y \underset{\alpha}{\otimes} y \subseteq (x \underset{\alpha}{\otimes} x) \underset{\alpha}{\otimes} (x \underset{\alpha}{\otimes} x) \subseteq x \underset{\alpha}{\otimes} x.$$

چون H، Γ- نیم‌اَبَرگروه α- مرتب و $x \underset{\alpha}{\otimes} x = y \underset{\alpha}{\otimes} y$، نتیجه می‌گیریم که $x = y$. بنابراین رابطه‌ی ρ_α رابطه‌ی ترتیب است.
به‌عکس، به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر رابطه‌ی شبه‌مرتب (ترتیب) ρ_α موجود باشد که اَبَرعمل $\underset{\alpha}{\otimes} : H * H \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ به‌صورت

$$x \underset{\alpha}{\otimes} y = [x]_{\rho_\alpha} \cup [y]_{\rho_\alpha}$$

تعریف کنیم، آن‌گاه H با این اَبَرعمل (شبه) مرتب است. $\square$

ایجاد ارتباط بین Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های (شبه) مرتب و نیم‌اَبَرگروه‌های (شبه) مرتب موجب درک بهتری از Γ- نیم‌اَبَرگروه (شبه) مرتب خواهد شد. لذا به‌منظور برقراری این ارتباط ابتدا گزاره‌ی زیر را مطرح می‌کنیم:

گزاره ۹.۲. فرض کنیم H، Γ- نیم‌اَبَرگروه باشد و

$$\widehat{H} = \{(x, \alpha) : x \in H, \alpha \in \Gamma\}.$$

رابطه Θ روی $\widehat{H}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, \alpha)\Theta(y, \beta) \Longleftrightarrow \forall z \in H, x \underset{\alpha}{\otimes} z = y \underset{\beta}{\otimes} z.$$

در این صورت مجموعه‌ی همه کلاس‌های هم‌ارزی $\widehat{H} = \{[(x, \alpha)]_\Theta : x \in H, \alpha \in \Gamma\}$ با اَبَرعمل زیر نیم‌اَبَرگروه است:

$$[(x, \alpha)]_\Theta \circ [(y, \beta)]_\Theta = \{[(z, \gamma)]_\Theta : z \in x \underset{\alpha}{\otimes} y\}.$$

اثبات. به‌راحتی می‌توان خوش‌تعریفی و شرکت‌پذیری این اَبَرعمل را بررسی کرد. $\square$

ملاحظه ۱۰.۲. فرض کنیم H، Γ- نیم‌اَبَرگروه با اسکالر همانی باشد. در این صورت اَبَرگروه $(\widehat{H}, \circ)$ نیز یک‌دار خواهد بود. به‌عبارت دیگر $[(e_\alpha, \alpha)]_\Theta$ اسکالر همانی $(\widehat{H}, \circ)$ خواهد بود.

در مثال بعد نشان می‌دهیم که از شبه‌مرتب بودن Γ- نیم‌اَبَرگروه H لزوماً نمی‌توان شبه‌مرتب بودن نیم‌اَبَرگروه متناظر آن یعنی $\widehat{H}$ را نتیجه گرفت.

مثال ۱۱.۲. مثال ۶.۲ را در نظر می‌گیریم که در آن H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد. در این صورت

$$\widehat{H} = \{[(a, \alpha)]_\rho, [(a, \beta)]_\rho, [(b, \alpha)]_\rho, [(b, \beta)]_\rho\},$$

به‌طوری که

$\circ$	$[(a,\alpha)]_\rho$	$[(a,\beta)]_\rho$	$[(b,\alpha)]_\rho$	$[(b,\beta)]_\rho$
$[(a,\alpha)]_\rho$	$[(a,\alpha)]_\rho$	$[(a,\beta)]_\rho$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\beta)]_\rho, [(a,\beta)]_\rho\}$
$[(a,\beta)]_\rho$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\beta)]_\rho, [(a,\beta)]_\rho\}$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\beta)]_\rho, [(a,\beta)]_\rho\}$
$[(b,\alpha)]_\rho$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\beta)]_\rho, [(a,\beta)]_\rho\}$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$
$[(b,\beta)]_\rho$	$\{[(b,\alpha)]_\rho, [(a,\alpha)]_\rho\}$	$\{[(b,\beta)]_\rho, [(a,\beta)]_\rho\}$	$[(b,\alpha)]_\rho$	$[(b,\beta)]_\rho.$

نشان می‌دهیم که $(\widehat{H}, \circ)$ شبه‌مرتب نیست. طبق تعریف اَبَرعمل $\circ$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$[(a, \alpha)]_\rho \circ [(a, \beta)]_\rho = \{[(a, \beta)]_\rho\},$$

و از طرفی

$$[(a, \alpha)]_\rho \circ [(a, \alpha)]_\rho \cup [(a, \beta)]_\rho \circ [(a, \beta)]_\rho = \{[(a, \alpha)]_\rho, [(a, \beta)]_\rho, [(b, \beta)]_\rho\}.$$

بنابراین

$$[(a, \alpha)]_\rho \circ [(a, \beta)]_\rho \neq [(a, \alpha)]_\rho \circ [(a, \alpha)]_\rho \cup [(a, \beta)]_\rho \circ [(a, \beta)]_\rho.$$

پس H شبه‌مرتب است ولی $\widehat{H}$ لزوماً شبه‌مرتب نیست.

به‌علاوه، در ادامه با استفاده از یک مثال نشان می‌دهیم که از شبه‌مرتب بودن نیم‌اَبَرگروه $(\widehat{H},\circ)$ نمی‌توان نتیجه گرفت که Γ–نیم‌اَبَرگروه H شبه‌مرتب است.

مثال **۱۲.۲.** فرض کنیم $(S,\leq)$ مجموعه‌ی کاملاًمرتب و Γ زیرمجموعه‌ای ناتهی از S باشد. برای هر $x,y\in S$ و $\alpha\in\Gamma$ اَبَرعمل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x\underset{\alpha}{\otimes}y=\{z\in S : z\geq max\{x,\alpha,y\}\}.$$

با در نظر گرفتن $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\Gamma=\{۵\}$، نتیجه می‌گیریم که

$$S*\Gamma=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵)\}.$$

در این صورت برای هر $x\in S$ نتیجه می‌گیریم که $S*\Gamma=[(x,۵)]_\Theta$]. بنابراین $(\widehat{H},\circ)$ یک اَبَرگروه کاملاً مرتب است. نتیجه می‌گیریم این اَبَرگروه شبه‌مرتب است ولی Γ– نیم‌اَبَرگروه S شبه‌مرتب نیست.

قضیه **۱۳.۲.** فرض کنیم H، Γ– نیم‌اَبَرگروه با اسکالر همانی و $(\widehat{H},\circ)$ نیم‌اَبَرگروه (شبه) مرتب باشد. در این صورت H نیز Γ–نیم‌اَبَرگروه (شبه) مرتب است.

اثبات. فرض کنیم $x\in H$ و $\alpha\in\Gamma$. بنابراین

$$[(x,\alpha)]_\Theta\in[(x,\alpha)]_\Theta\circ[(x,\alpha)]_\Theta\circ[(x,\alpha)]_\Theta.$$

طبق تعریف ابرعمل معرفی‌شده در $\widehat{H}$ نتیجه می‌گیریم که $t\in x\underset{\alpha}{\otimes}x\underset{\alpha}{\otimes}x$ موجود است که $[(x,\alpha)]_\Theta=[(t,\alpha)]_\Theta$. پس برای هر $z\in H$، $x\underset{\alpha}{\otimes}z=t\underset{\alpha}{\otimes}z$. با توجه به این‌که H دارای اسکالر همانی است نتیجه می‌گیریم که $x=t\in x\underset{\alpha}{\otimes}x\underset{\alpha}{\otimes}x$. هم‌چنین

$$[(x,\alpha)]_\Theta\circ[(y,\alpha)]_\Theta=[(x,\alpha)]_\Theta\circ[(x,\alpha)]_\Theta\cup[(y,\alpha)]_\Theta\circ[(y,\alpha)]_\Theta.$$

بنابراین

$$\{[(t,\alpha)]_\Theta : t\in x\underset{\alpha}{\otimes}y\}=\{[(t_۱,\alpha)]_\Theta : t_۱\in x\underset{\alpha}{\otimes}x\}\cup\{[(t_۲,\alpha)]_\Theta : t_۲\in y\underset{\alpha}{\otimes}y\}.$$

فرض کنیم $t\in x\underset{\alpha}{\otimes}y$. بنابراین برای $t_۱\in x\underset{\alpha}{\otimes}x$ یا $t_۲\in y\underset{\alpha}{\otimes}y$ نتیجه می‌شود: $[(t,\alpha)]_\Theta=[(t_۱,\alpha)]_\Theta$ یا $[(t,\alpha)]_\Theta=[(t_۲,\alpha)]_\Theta$. با توجه به این‌که H دارای اسکالر همانی است، نتیجه می‌گیریم که

$$x\underset{\alpha}{\otimes}y\subseteq x\underset{\alpha}{\otimes}x\cup y\underset{\alpha}{\otimes}y.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $x\underset{\alpha}{\otimes}x\cup y\underset{\alpha}{\otimes}y\subseteq x\underset{\alpha}{\otimes}y$. فرض کنیم $x\underset{\alpha}{\otimes}x=y\underset{\alpha}{\otimes}y$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$[(x,\alpha)]_\Theta\circ[(x,\alpha)]_\Theta=[(y,\alpha)]_\Theta\circ[(y,\alpha)]_\Theta.$$

با توجه به این‌که $\widehat{H}$ نیم‌اَبَرگروه مرتب است، داریم $[(x,\alpha)]_\Theta=[(y,\alpha)]_\Theta$. پس برای هر $z\in H$ نتیجه می‌گیریم که

$$x\underset{\alpha}{\otimes}z=y\underset{\alpha}{\otimes}z.$$

بنابراین $x=y$ و H، Γ– نیم‌اَبَرگروه مرتب است. □

نتیجه **۱۴.۲.** فرض کنیم H، Γ– نیم‌اَبَرگروه α– شبه‌مرتب باشد و $x_۱,x_۲,\cdots,x_n\in H$. در این صورت اعداد طبیعی $k_۱,k_۲,\cdots,k_n\in\mathbb{N}$ موجودند که

$$\begin{aligned}\prod_{i=۱}^{n-۱}x_i\underset{\alpha}{\otimes}x_{i+۱}&=\prod_{i=۱}^{k_۱}x_۱\underset{\alpha}{\otimes}x_۱\cup\prod_{i=۱}^{k_۲}x_۲\underset{\alpha}{\otimes}x_۲\cup\cdots\cup\prod_{i=۱}^{k_n}x_n\underset{\alpha}{\otimes}x_n\\&\subseteq(x_۱\underset{\alpha}{\otimes}x_۱)\cup(x_۲\underset{\alpha}{\otimes}x_۲)\cup\cdots\cup(x_n\underset{\alpha}{\otimes}x_n).\end{aligned}$$

هم‌چنین با توجه به قضیه ۸.۲،

$$\prod_{i=۱}^{n-۱}x_i\underset{\alpha}{\otimes}x_{i+۱}=\bigcup_{i=۱}^{n}[x_i]_{\rho_\alpha}.$$

تعریف ۱۵.۲. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه و ρ رابطه‌ی هم‌ارزی روی آن باشد. برای زیر مجموعه‌های ناتهی A و B از H تعریف می‌کنیم:

$$A\overline{\rho}B \Longleftrightarrow \forall a\in A, \exists b\in B : a\rho b,\\ \forall b\in B, \exists a\in A : a\rho b.$$

و

$$A\overline{\overline{\rho}}B \Longleftrightarrow \forall a\in A, b\in B : a\rho b.$$

تعریف ۱۶.۲. رابطه هم‌ارزی ρ روی Γ- نیم‌اَبَرگروه H را منظم از راست گوییم، هرگاه برای هر $a,b,c\in H$ و $\alpha\in\Gamma$ داشته باشیم:

$$a\rho b \Longrightarrow (a\underset{\alpha}{\otimes} c)\overline{\rho}(b\underset{\alpha}{\otimes} c).$$

به‌همین ترتیب رابطه‌ی منظم از چپ نیز قابل تعریف است.
رابطه‌ی هم‌ارزی ρ را منظم قوی از راست گوییم، هرگاه برای هر $a,b,c\in H$ و $\alpha\in\Gamma$ ، داشته باشیم:

$$a\rho b \Longrightarrow (a\underset{\alpha}{\otimes} c)\overline{\overline{\rho}}(b\underset{\alpha}{\otimes} c).$$

به‌همین ترتیب رابطه‌ی منظم قوی از چپ نیز قابل تعریف است.

گزاره ۱۷.۲. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه و ρ رابطه‌ی منظم (منظم قوی) از راست روی آن باشد. در این صورت

$$[H:\rho]=\{[x]_\rho : x\in H\}$$

با اَبَرعمل زیر Γ- نیم‌اَبَرگروه (گروه) است:

$$[x]_\rho\underset{\alpha}{\otimes}[y]_\rho=\{[t]_\rho : t\in x\underset{\alpha}{\otimes} y\}.$$

اثبات. به‌راحتی خوش‌تعریفی و شرکت‌پذیری اَبَرعمل ذکرشده قابل بررسی است. □

نتیجه ۱۸.۲. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب و رابطه‌ی ρ منظم از راست روی آن باشد. در این صورت $[H:\rho]$ نیز Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است.

۳ بخش کامل و رابطه‌ی اساسی در Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب

در این بخش مفهوم بخش کامل را معرفی می‌کنیم و ارتباط بین بخش کامل در Γ- نیم‌اَبَرگروه H و بخش کامل در نیم‌اَبَرگروه $\widehat{H}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه باشد و A را زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن در نظر می‌گیریم. این مجموعه را یک بخش α-کامل گوییم، هرگاه

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x_i\underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1})\cap A\neq\emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n-1}(x_i\underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1})\subseteq A.$$

اگر برای هر $\alpha\in\Gamma$ ، مجموعه‌ی ناتهی A بخش کامل باشد، آن‌گاه A را بخش کامل می‌گوییم.

نتیجه ۲.۳. با توجه به قضیه ۸.۲، زیر مجموعه ناتهی A بخش α-کامل است، هرگاه

$$(\bigcup_{i=1}^{n}[x_i]_{\rho_\alpha})\cap A\neq\emptyset \Longrightarrow \forall 1\leq i\leq n, [x_i]_{\rho_\alpha}\subseteq A.$$

قضیه **۳.۳.** فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه با اسکالر همانی و A بخش α-کامل از آن باشد. در این صورت

$$\widehat{A_\alpha} = \{[(a,\alpha)]_\Theta : a \in A\}$$

نیز بخش کامل از $\widehat{H}$ است.

اثبات. فرض کنیم

$$\prod_{i=1}^{n-1}([(x_i,\alpha)]_\Theta \circ [(x_{i+1},\alpha)]_\Theta) \cap \widehat{A} \neq \emptyset,$$

که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $[(x_i,\alpha)]_\Theta \in \widehat{H}$. طبق تعریف اَبَرعمل $\circ$ روی $\widehat{H}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\left\{[(t,\alpha)]_\Theta : t \in \prod_{i=1}^{n}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1})\right\} \cap \widehat{A} \neq \emptyset.$$

بنابراین به‌ازای $t \in \prod_{i=1}^{n}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1})$ و $\alpha \in A$ نتیجه می‌گیریم که $[(t,\alpha)]_\Theta = [(a,\alpha)]_\Theta$. با توجه به تعریف رابطه Θ، به‌ازای هر $z \in H$ ، خواهیم داشت $t \underset{\alpha}{\otimes} z = a \underset{\alpha}{\otimes} z$. با در نظر گرفتن $z = e_\alpha$ نتیجه می‌گیریم که

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}) \cap A \neq \emptyset.$$

با توجه به این‌که A یک بخش کامل است، نتیجه می‌گیریم:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}) \subseteq A.$$

بنابراین

$$\prod_{i=1}^{n}([(x_i,\alpha)]_\Theta \circ [(x_{i+1},\alpha)]_\Theta) \subseteq \widehat{A}.$$

پس $\widehat{A}$ بخش کامل از $\widehat{H}$ است. □

نتیجه **۴.۳.** فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه با اسکالر همانی و $A \subseteq H$ بخش کامل باشد. در این صورت $\widehat{A} \subseteq \widehat{H}$ بخش کامل است.

قضیه **۵.۳.** فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه با اسکالر همانی و T بخش کامل از $\widehat{H}$ باشد. در این صورت

$$T_\alpha = \{x \in H : [(x,\alpha)]_\Theta \in T\}$$

نیز بخش α- کامل از H است.

اثبات. فرض کنیم

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}) \cap T_\alpha \neq \emptyset.$$

در این صورت $x \in \prod_{i=1}^{n}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1})$ موجود است که $[(x,\alpha)]_\Theta \in T$. بنابراین

$$\prod_{i=1}^{n}[(x_i,\alpha)]_\Theta \cap T \neq \emptyset.$$

با توجه به این‌که T بخش کامل است،

$$\prod_{i=1}^{n}[(x_i,\alpha)]_\Theta \subseteq T.$$

لذا

$$\left\{[(t,\alpha)]_\Theta \in \widehat{H} : t \in \prod_{i=1}^{n-1}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}\right\} \subseteq T.$$

پس برای هر $t \in \prod_{i=1}^{n-1}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}$ نتیجه می‌گیریم که $t \in T_\alpha$. لذا T_α بخش کامل است. $\square$

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه و $C \subseteq \widehat{H}$ بخش کامل است. در این صورت

$$C' = \{x \in H \mid \exists \alpha \in \Gamma : [(x,\alpha)]_\rho \in C\}$$

بخش کامل است.

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم T بخش کامل از $\widehat{H}$ باشد. در این صورت $T = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} T_\alpha$ و برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، T_α نیز بخش کامل است. همچنین فرض کنیم برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، T_α بخش کامل باشد. در این صورت T لزوماً بخش کامل نیست.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه با عضو اسکالر همانی و $A \subseteq H$ ، Γ- اَبَرایده‌آل باشد. در این صورت

$$C(\widehat{A}) = \widehat{C(A)}.$$

اثبات. فرض کنیم $C(A) = T$. بنابراین T کوچک‌ترین بخش کامل شامل A است. فرض کنیم $B \subseteq \widehat{H}$ بخش کامل باشد به‌طوری که $\widehat{A} \subseteq B$. در این صورت $(\widehat{A})' \subseteq B'$. از طرفی B' بخش کامل است و $(\widehat{A})' = A$ ، چون A ، Γ- اَبَرایده‌آل است. پس $T \subseteq B'$ و در نتیجه $\widehat{T} \subseteq \widehat{(B')} = B$. بنابراین $\widehat{T}$ کوچک‌ترین بخش کامل شامل $\widehat{A}$ است:

$$C(\widehat{A}) = \widehat{T} = \widehat{C(A)}.$$ $\square$

مثال ۹.۳. مثال ۷.۲ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی ρ_α ، $[a]_{\rho_\alpha} = a \underset{\alpha}{\otimes} a = \{a\},$. مجموعه‌ی $\{a\}$ ، α- بخش کامل نیست، چون

$$a \underset{\alpha}{\otimes} b = H, \quad H \cap \{a\} \neq \emptyset,$$

ولی $a \underset{\alpha}{\otimes} b \nsubseteq \{a\}$. همچنین در مثال ۷.۲ ، تنها بخش کامل از Γ - نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب H خودش است.

گزاره ۱۰.۳. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد و A را یک بخش کامل آن در نظر می‌گیریم. در این صورت $A = H$ یا $x \in H$ موجود است به‌طوری که $A = \{x\}$.

اثبات. فرض کنیم A بخش کامل از H باشد به‌طوری که $|A| \geq 2$. $x \in H$ و $a \in A$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت طبق قضیه ۸.۲ ، رابطه‌ی هم‌ارزی ρ_α موجود است که $a \underset{\alpha}{\otimes} x = [a]_{\rho_\alpha} \cup [x]_{\rho_\alpha}$. بنابراین $a \underset{\alpha}{\otimes} x \cap A \neq \emptyset$. از طرفی A بخش کامل است، بنابراین

$$a \underset{\alpha}{\otimes} x = [a]_{\rho_\alpha} \cup [x]_{\rho_\alpha} \subseteq A.$$

پس $A = H$. $\square$

گزاره ۱۱.۳. فرض کنیم C بخش کامل از نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب $\widehat{H}$ و H دارای عضو اسکالر همانی باشد. در این صورت $C = \widehat{H}$ یا $x \in H$ موجود است به‌طوری که $C = [(x,\Gamma)]_\rho$.

اثبات. فرض کنیم $C \subseteq \widehat{H}$ بخش کامل باشد. در این صورت $C' \subseteq (\widehat{H})' = H$. از طرفی C' بخش کامل H است، بنابراین طبق گزاره ۱۰.۳ ، $x \in H$ موجود است به‌طوری که $C' = H$ یا $C' = \{x\}$. پس $\widehat{C'} = \widehat{H}$ یا $\widehat{C'} = \widehat{\{x\}}$ و نتیجه می‌گیریم که $C = \widehat{H}$ یا $C = [(x,\Gamma)]_\rho$. $\square$

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم H، Γ– نیم‌اَبَرگروه و n عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$x\beta_n^\alpha y :\Longleftrightarrow \exists x_1, x_2, \cdots, x_n \in H : \{x, y\} \subseteq \prod_{i=1}^{n-1}(x_i \underset{\alpha}{\otimes} x_{i+1}).$$

در این صورت $\beta_\alpha = \bigcup_{n\geq 1} \beta_n^\alpha$ و $\beta = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \beta_\alpha$. رابطه‌ی β را رابطه‌ی اساسی گوییم و بستار انتقالی این رابطه را با β^* نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنیم H، Γ– نیم‌اَبَرگروه و β^* رابطه‌ی اساسی روی آن باشد. در این صورت $\beta^* = \beta$.

اثبات. فرض کنیم $a\beta^* b$. در این صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ و $\alpha \in \Gamma$ موجودند به‌طوری که $x_1 = a$ ، $x_n = b$ و

$$\{x_i, x_{i+1}\} \subseteq \prod_{i=1}^{n_i}(x_{ji} \underset{\alpha}{\otimes} x_{(j+1)i}),$$

که در آن به‌ازای $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n_i$ ، $x_{ji} \in H$. با توجه به قضیه ۸.۲، رابطه‌ی هم‌ارزی ρ_α وجود دارد که

$$\{x_i, x_{i+1}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_i}[x_{ij}]_{\rho_\alpha}.$$

فرض کنیم $a\rho_\alpha x_{ij_1}$ ، $x_{ij_1}\rho_\alpha x_{ij_2}$ ، $\cdots$ ، $x_{ij_{n-1}}\rho_\alpha b$. لذا برای هر $1 \leq t \leq n-1$ ، $x_{ij_{t+1}} \in x_{it} \underset{\alpha}{\otimes} x_{ij_t}$. با توجه به این‌که H ، Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است، نتیجه می‌گیریم که

$$b \in (a \underset{\alpha}{\otimes} a) \underset{\alpha}{\otimes} a(a \underset{\alpha}{\otimes} a) \cdots (a \underset{\alpha}{\otimes} a) \subseteq (a \underset{\alpha}{\otimes} a).$$

بنابراین $\{a, b\} \subseteq [a]_{\rho_\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $\beta^* = \beta$. □

گزاره ۱۴.۳. فرض کنیم H ، Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد. همچنین β_H و $\beta_{\widehat{H}}$ را به‌ترتیب روابط اساسی روی H و $\widehat{H}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $[(x,\alpha)]_\Theta \beta_{\widehat{H}} [(y,\gamma)]_\Theta$ اگر و تنها اگر $x\beta_H y$ که در آن $x, y \in H$ و $\alpha, \gamma \in \Gamma$.

اثبات. فرض کنیم $[(x,\alpha)]_\Theta, [(y,\gamma)]_\Theta \in \widehat{H}$ به‌طوری که $[(x,\alpha)]_\Theta \beta_{\widehat{H}} [(y,\gamma)]_\Theta$. در این صورت طبق تعریف

$$\{[(x,\alpha)]_\Theta, [(y,\gamma)]_\Theta\} \subseteq \prod_{i=1}^{n}[(z_i,\delta_i)]_\Theta = \left\{[(t,\delta_n)]_\Theta \in \widehat{H} : t \in \prod_{i=1}^{n-1}(z_i \underset{\delta_i}{\otimes} z_{i+1})\right\},$$

که در آن $[(z_i,\delta_i)]_\Theta \in \widehat{H}$. بنابراین

$$[(x,\alpha)]_\Theta = [(t_1,\delta_n)]_\Theta, \quad [(y,\gamma)]_\Theta = [(t_2,\delta_n)]_\Theta,$$

که $t_1, t_2 \in \prod_{i=1}^{n-1}(z_i \underset{\delta_i}{\otimes} z_{i+1})$. لذا به‌ازای هر $z \in H$ نتیجه می‌گیریم که

$$x \underset{\alpha}{\otimes} z = t_1 \underset{\delta_n}{\otimes} z, \quad y \underset{\gamma}{\otimes} z = t_2 \underset{\delta_n}{\otimes} z.$$

با توجه به این‌که H ، Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است،

$$x \underset{\alpha}{\otimes} z = (x \underset{\alpha}{\otimes} x) \cup (z \underset{\alpha}{\otimes} z), \quad y \underset{\gamma}{\otimes} z = (y \underset{\gamma}{\otimes} y) \cup (z \underset{\gamma}{\otimes} z).$$

از طرفی $x \in x \underset{\alpha}{\otimes} x$ و $y \in y \underset{\alpha}{\otimes} y$ نتیجه می‌دهد که

$$\{x, y\} \subseteq (\prod_{i=1}^{n-1}(z_i \underset{\alpha_i}{\otimes} z_{i+1}) \underset{\delta_n}{\otimes} z.$$

بنابراین $x\beta_H y$. به‌عکس، فرض کنیم $x\beta_H y$ و $\alpha, \gamma \in \Gamma$. طبق تعریف به‌راحتی می‌توان نشان داد که $[(x,\alpha)]_\Theta \beta_{\widehat{H}} [(y,\gamma)]_\Theta$.
□

قضیه ۱۵.۳. فرض کنیم H ، Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد. هم‌چنین β_H و $\beta_{\widehat{H}}$ را به‌ترتیب روابط اساسی روی H و $\widehat{H}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $[\widehat{H} : \beta_{\widehat{H}}] \cong [H : \beta_H]$.

اثبات. فرض کنیم $\phi : [\widehat{H} : \beta_{\widehat{H}}] \longrightarrow [H : \beta_H]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\phi([([(x,\alpha)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}) = [x]_{\beta_H}.$$

با توجه به گزاره‌ی ۱۴.۳ ، $[([(x,\alpha)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}} = [([(y,\gamma)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}$ اگر و تنها اگر $[x]_{\beta_H} = [y]_{\beta_H}$. بنابراین ϕ خوش‌تعریف و یک‌به‌یک است. هم‌چنین برای هر $[([(x,\alpha)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}, [([(y,\gamma)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}} \in \widehat{H}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
\phi([([(x,\alpha)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}} \circ [([(y,\gamma)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}) &= \phi([([(z,\gamma)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}) \ \ : \ \ z \in x \underset{\alpha}{\otimes} y \\
&= [z]_{\beta_H} \ \ : \ \ z \in x \underset{\alpha}{\otimes} y \\
&= [x]_{\beta_H} \underset{\alpha}{\otimes} [y]_{\beta_H} \\
&= \phi([([(x,\alpha)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}) \underset{\alpha}{\otimes} \phi([([(y,\gamma)]_\Theta)]_{\beta_{\widehat{H}}}).
\end{aligned}$$

بنابراین ϕ یک‌ریختی است. □

۴ Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های نرم ناهموار شبه‌مرتب

در این بخش مفهوم Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب را به Γ- نیم‌اَبَرگروه‌های نرم ناهموار شبه‌مرتب تعمیم داده و مثال‌هایی از این Γ- اَبَرساختار جبری جدید ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم H ، یک Γ- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی Θ روی H را در نظر می‌گیریم. در این صورت تقریب‌های بالایی و پایینی زیر مجموعه ناتهی A در H را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{Apr}_\Theta(A) = \{x \in H \mid [x]_\Theta \cap A \neq \emptyset\},$$

$$\underline{Apr}_\Theta(A) = \{x \in H \mid [x]_\Theta \subseteq A\}.$$

مثال ۲.۴. مجموعه $\mathbb{Z}_۵$ با اَبَرعمل تعریف‌شده به‌صورت زیر یک $\mathbb{Z}_۳$- نیم‌اَبَرگروه است:

$$x \underset{\alpha}{\otimes} y = \{x, \alpha, y\},$$

هرگاه $x, y \in \mathbb{Z}_۵$ و $\alpha \in \mathbb{Z}_۳$. برای هر $x \in \mathbb{Z}_۵$ و $\alpha \in \mathbb{Z}_۳$ ،

$$\begin{aligned}
x \underset{\alpha}{\otimes} x \underset{\alpha}{\otimes} x &= \bigcup_{t \in x \underset{\alpha}{\otimes} x} t \underset{\alpha}{\otimes} x \\
&= \bigcup_{t \in \{x,\alpha\}} \{t, \alpha, x\} \\
&= \{x, \alpha, x\} \cup \{\alpha, \alpha, x\} \\
&= \{\alpha, x\} \\
&= x \underset{\alpha}{\otimes} x.
\end{aligned}$$

هم‌چنین $x \in x \underset{\alpha}{\otimes} x \underset{\alpha}{\otimes} x$. بنابراین $\mathbb{Z}_۵$ ، $\mathbb{Z}_۳$- نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است. رابطه‌ی Θ روی $\mathbb{Z}_۵$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \Theta y :\Longleftrightarrow \exists ۱ \neq \alpha \in \mathbb{Z}_۳,\ t \in \mathbb{Z} \ :\ x = y + \alpha t.$$

در این صورت Θ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. فرض کنیم $x \in \mathbb{Z}_5$. در این صورت $0 \in \mathbb{Z}_3$ موجود است به‌طوری که برای هر $t \in \mathbb{Z}$، $x = x + 0t$. بنابراین $x\Theta x$ و Θ بازتابی است. حال فرض کنیم $x\Theta y$. در این صورت $x = y + \alpha t$ و

$$y = x - \alpha t = x + \alpha(-t).$$

از این‌که $t \in \mathbb{Z}$، نتیجه می‌گیریم که $y\Theta x$ و Θ تقارنی است. حال نشان می‌دهیم که Θ انتقالی است. $x\Theta y$ و $y\Theta z$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_3$ و $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ موجودند که

$$x = y + \alpha_1 t_1, \quad y = z + \alpha_2 t_2,$$

که نتیجه می‌دهد: $x = y + \alpha_1 t_1 = z + \alpha_2 t_2 + \alpha_1 t_1$. پس $1 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_3$ و $t \in \mathbb{Z}$ موجودند که $\alpha_2 t_2 + \alpha_1 t_1 = \alpha t$. بنابراین $x\Theta z$ و Θ انتقالی است. همچنین

$$[0]_\Theta = [2]_\Theta = [4]_\Theta = \{0, 2, 4\}, \quad [1]_\Theta = [3]_\Theta = \{1, 3\}.$$

تقریب‌های بالایی و پایینی مجموعه‌های $A = \{0, 2\}$ و $B = \{0, 2, 3, 4\}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{Apr}_\Theta(A) = \{0, 2, 4\}, \quad \underline{Apr}_\Theta(A) = \emptyset, \quad \overline{Apr}_\Theta(B) = \mathbb{Z}_5, \quad \underline{Apr}_\Theta(B) = \{0, 2, 4\}.$$

تعریف ۳.۴. ساختار جبری دوتایی (H, Θ) را فضای تقریب پاولاک می‌نامیم هرگاه H، Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب و Θ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی آن باشد.

تعریف ۴.۴. فرض کنیم (H, Θ) فضای تقریب پاولاک باشد. مجموعه‌ی نرم $G = (F, A)$ را روی H در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $\underline{Apr}_\Theta(G)$ را Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب نرم ناهموار پایینی نسبت به رابطه‌ی Θ می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $\underline{Apr}_\Theta(F(x))$، Γ– زیر نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب باشد. به‌طور مشابه Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب نرم ناهموار بالایی قابل تعریف است. به‌علاوه، مجموعه‌ی نرم G، Γ– نیم‌اَبَرگروه نرم ناهموار شبه‌مرتب نسبت به Θ است هرگاه برای هر $x \in A$، $\underline{Apr}_\Theta(F(x))$ و $\overline{Apr}_\Theta(F(x))$، Γ– زیر نیم‌اَبَرگروه‌های شبه‌مرتب باشند.

مثال ۵.۴. فرض کنیم $\Gamma = \{0, 2\}$. مجموعه $\mathbb{Z}_5$ با ابرعمل تعریف‌شده در مثال ۲.۴، Γ– نیم‌اَبَرگروه شبه‌مرتب است. مجموعه‌ی نرم $G = (F, A)$ را روی H تعریف می‌کنیم به‌طوری که

$$A = \{m, n\}, \quad F(m) = H, \quad F(n) = \{0, 2, 3, 4\}.$$

در این صورت طبق رابطه‌ی هم‌ارزی Θ تعریف‌شده در مثال ۲.۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\underline{Apr}_\Theta(F(m)) = \overline{Apr}_\Theta(F(m)) = \mathbb{Z}_5,$$

$$\underline{Apr}_\Theta(F(n)) = \{0, 2, 4\}, \quad \overline{Apr}_\Theta(F(n)) = \mathbb{Z}_5.$$

بنابراین $\mathbb{Z}_5$، Γ– نیم‌اَبَرگروه نرم ناهموار شبه‌مرتب است.

۵ نتیجه گیری

از مفاهیم اَبَرساختارهای جبری در مدل‌بندی کردن پدیده‌ها نظیر برهم‌کنش کاتیون‌ها، ذرات بنیادی و . . . استفاده می‌شود. لذا معرفی و بررسی اَبَرساختارهای جبری جدید و کاربردهای آن‌ها اهمیت زیادی دارد. بنابراین در این مقاله به معرفی اَبَرساختار جدیدی پرداختیم و برخی از ویژگی‌های آن را مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم. از جمله به مشخصه‌سازی آن پرداخته و رابطه‌ی اساسی و بخش کامل را معرفی و بررسی کردیم. در آینده مفهوم مجموعه‌ها را در قالب برهم‌کنش عناصر کاتیون‌ها مورد استفاده قرار خواهیم داد و این برهم‌کنش را در قالب اَبَرساختارهای جبری مدل‌بندی خواهیم کرد.

فهرست منابع

[1] F. Marty, Sur une generalization de la notion de group, 8^{th} Congress of Mathematicians Scandinaves. (1934) 45–49.

[2] P. Corsini, *Prolegomena of hypergroup theory*, 2nd edition, Aviani Editore, 1993.

[3] B. Davvaz and V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring theory and applications*, International Academic Press USA, 2007.

[4] S. O. Dehkordi, B. Davvaz, A strong regular relation on Γ -semihyperrings, J. Sci. I. R. I. **22**(3) (2011) 257–266.

[5] S. O. Dehkordi, B. Davvaz, Γ -semihyperrings: Approximations and rough ideals, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **35**(4) (2012) 1035–1047.

[6] S. O. Dehkordi, m-Ary hypervector space: Convergent sequence and Bundle Subsets, Iran. J. Math. Sci. Inform. **11**(2) (2016) 23–41.

[7] S. O. Dehkordi, B. Davvaz, A note on isomorphism theorems of Krasner (m,n)-hyperrings, Arab. J. Math. **5** (2016) 103–115.

[8] S. O. Dehkordi, M. Heidari, General Γ -hypergroups: θ relation, T-Functor and Fundamental groups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **37**(2) (2014) 907–921.

On order and quasi order Γ-semihypergroups

Sohrab Ostadhadi-Dehkordi[1, ¶] **, Bijan Davvaz**[2] **, Noureh Rakhsh-khorshid**[3]

[(1,3)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Hormozgan University, Bandar Abbas, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Faculty of Mathematic Science, Yazd University, Yazd, Iran

Communicated by: Mohammad Shahryari

Received: 2021/5/8 Accepted: 2022/8/20

Abstract: The hypergroup notion was introduced in 1934 by F. Marty, at the 8^th Congress of Scandinavian Mathematicians. He published some notes on hypergroups, using them in different contexts: algebraic functions, rational fractions, non-commutative groups. Hypergroups are a suitable generalization of groups. We know in a group, the composition of two elements is an element, while in a hypergroup, the composition of two elements is a set. Several kinds of hypergroups have been intensively studied, such as regular hypergroups, reversible regular hypergroups, canonical hypergroups and polygroups. Also, there are homomorphisms of various types between hypergroups and there are several kinds of subhypergroups, such as: closed, invertible, ultraclosed, conjugable. Moreover, there are applications to the following subjects: geometry, hypergraphs, binary relations, lattices, fuzzy sets, combinatorics, code, probabilities and etc. The algebraic Γ- hyperstructres are generalization of hypestructures algebraic and classical structures. One of them is Γ- semihypergroup that is a generalization of semihypergroups and semigroup. In this paper, we introduce the concept of quasi order Γ- semihypergroup and order Γ- semihypergroup as a generalization of quasi order semihypergroup and order semihypergroup, respectively. Also, we characterize quasi order Γ- semihypergroup by quasi order relation and introduce complete parts and fundamental relation in quasi order Γ- semihypergroup. Finally, we construct quasi order semihypergroup and order semihypergroup by quasi order Γ- semihypergroup and order Γ- semihypergroup.

Keywords: Fundamental relation, Complete part, Transitive closure, Regular and strongly regular relation, Rough soft set.

[¶]Corresponding author.
E-mail addresses: Ostadhadi@hormozgan.ac.ir (Ostadhadi-Dehkordi), davvaz@yazd.ac.ir (Davvaz) n.rakhshkhorshid.phd@hormozgan.ac.ir (Rakhsh-khorshid).