مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۳۳۶-۳۴۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.39764.2000

روشی محاسباتی برای یک کمینه‌سازی بازآرایی وابسته به مسئله پواسون روی قرص یکّه در صفحه

محسن زیوری رضاپور [۱]

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۳۱

چکیده: در این مقاله یک مسئله کمینه‌سازی بازآرایی وابسته به معادله پواسون را روی قرص باز یکّه در صفحه درنظر می‌گیریم. ما نشان می‌دهیم این مسئله دارای یک جواب یکتا است که به‌طور شعاعی متقارن است. بعلاوه، با روشی محاسباتی ثابت می‌کنیم این جواب، تابعی افزایشی است.

واژه‌های کلیدی: بازآرایی، کمینه‌سازی، معادله پواسون، متقارن شعاعی، تابع افزایشی

رده‌بندی ریاضی: 35J20; 49J20

۱ مقدمه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^{۲}$ قرص باز یکّه به مرکز مبداء مختصات با مرز ∂D باشد. مسئله پواسون زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{در } D, \\ u = ۰ & \text{روی } \partial D, \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که در این‌جا

$$f \in L^{۲}_{+}(D) := \left\{ g \in L^{۲}(D) \,\middle|\, g \geq ۰ \ \text{در } D \right\}.$$

به‌طور دقیق‌تر ما تابعی انرژی $\Phi : L^{۲}_{+}(D) \to \mathbb{R}$، مربوط به مسئله (۱.۱) را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(f) = \int_D f(x) u_f(x)\, \mathrm{d}x. \qquad (۲.۱)$$

[۱] رایانامه: mzivari@scu.ac.ir (M. Zivari-Rezapour)

در این‌جا $u_f \in H^1_\circ(D)$ جواب یکتای مسئله (۱.۱) می‌باشد. فرض کنیم تابع $f_\circ \in L^2_+(D)$ داده‌شده باشد. رده بازآرایی تابع $f_\circ$ را با $\mathcal{R}(f_\circ)$ و بستار ضعیف آن در فضای $L^2(D)$ را با $\overline{\mathcal{R}}(f_\circ)$ نمایش می‌دهیم. مسئله کمینه‌سازی

$$\inf_{f\in\mathcal{R}(f_\circ)} \Phi(f), \tag{۳.۱}$$

اولین بار در سال ۱۹۸۹ توسط جفری برتون، [۲]، مورد بررسی قرار گرفته است. او ثابت کرد که این مسئله بهینه‌سازی دارای جواب یکتای $f_\sharp \in \mathcal{R}(f_\circ)$ است که به‌طور شعاعی متقارن و افزایشی است؛ یعنی، $f_\sharp(x) = f_\sharp(r)$ (که $r = \|x\|$ همان نرم اقلیدسی x در $\mathbb{R}^2$ است) و $f_\sharp$ نسبت به r تابعی افزایشی است. در دو دهه اخیر، نویسندگان بسیاری به مسایل بهینه‌سازی مانند مسئله (۳.۱)، که مجموعه شدنی آن‌ها رده‌ای از بازآرایی‌های یک تابع مفروض است، پرداخته‌اند. به‌عنوان مثال مراجع [۱، ۴]، [۵]، [۶، ۸] و مراجع داخل آن‌ها دیده شوند. ازاین‌رو در ادبیات مقاله نویسی، این دست از مسایل به مسایل بهینه‌سازی بازآرایی و روش مورد استفاده در آن به نظریه برتون مشهور است.

کمیت $\Phi(f)$ دارای تفسیر فیزیکی جالبی است. مسئله مقدار مرزی (۱.۱) را می‌توان به‌عنوان مدل فیزیکی جابه‌جایی یک غشاء کشسان درنظر گرفت. فرض کنیم یک غشاء کشسان ناحیه D را پوشانده و روی مرز آن ثابت شده باشد. حال اگر این غشاء را تحت نیروی عمودی $f(x)$ قرار دهیم، $u_f(x)$ بیان‌گر میزان جابه‌جایی (خسارت وارده به) غشاء در نقطه x نسبت به حالت اولیه است. درنتیجه کمیت $\Phi(f)$ جابه‌جایی کل غشاء، محدود به تکیه‌گاه تابع f را اندازه گیری می‌کند.

فرض کنیم $F \subset D$، $\circ < \alpha < |D|$ و $|F| = \alpha$. در این‌جا برای مجموعه $E \subset \mathbb{R}^2$، $|E|$ بیان‌گر اندازه لبگ مجموعه E است. از این پس قرار می‌دهیم $f_\circ = \chi_F$، که در آن χ_F تابع مشخص مجموعه F است. به‌سادگی می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{R}(\chi_F) = \{\chi_E : D \to \mathbb{R} \,|\, |E| = |F|\}.$$

هم‌چنین نتیجه می‌شود که

$$\overline{\mathcal{R}}(\chi_F) = \left\{ f : D \to \mathbb{R} \,\middle|\, \circ \leq f \leq 1 \text{ و } \int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \right\}, \tag{۴.۱}$$

و به‌علاوه، $\overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ محدب و نسبت به توپولوژی ضعیف فضای $L^2(D)$ فشرده است (لم ۵.۲ دیده شود). در این مقاله، هدف ما این است که بدون استفاده از نظریه برتون نشان دهیم مسئله کمینه‌سازی

$$\inf_{f\in\overline{\mathcal{R}}(\chi_F)} \Phi(f), \tag{۵.۱}$$

دارای جواب منحصربه‌فردی است که به‌طور شعاعی متقارن و افزایشی است. مسئله بهینه‌سازی (۵.۱) در [۷] و تعمیم آن در فضای سوبولف–اورلیک در [۳]، از دیدگاه دیگری مورد بررسی قرارگرفته است. در آن‌جا، نویسندگان با استفاده از مفهوم مخروط مماسی نتایج جالبی را به‌دست آورده‌اند.

۲ بازآرایی توابع

در این بخش به معرفی مفهوم بازآرایی و بیان ویژگی‌های رده‌ی بازآرایی تولیدشده توسط یک تابع می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم فضاهای اندازه (X,Σ,μ) و (X',Σ',μ') چنان باشند که $\mu(X) = \mu'(X') < \infty$. می‌گوئیم تابع اندازه‌پذیر $f : (X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}$ یک بازآرایی تابع اندازه‌پذیر $g : (X',\Sigma',\mu') \to \mathbb{R}$ است، هرگاه

$$\lambda_{f,\mu}(\beta) := \mu(\{x \in X :\ f(x) \geq \beta\}) = \mu'(\{x' \in X' :\ g(x') \geq \beta\}) =: \lambda_{g,\mu'}(\beta), \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۲.۲. فرض کنیم تابع اندازه‌پذیر $f : (X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}$ داده شده باشد. رده بازآرایی تولیدشده توسط f را با $\mathcal{R}_\mu(f)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{R}_\mu(f) = \{g : (X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R} \,|\, \lambda_{g,\mu}(\beta) = \lambda_{f,\mu}(\beta),\ \forall \beta \in \mathbb{R}\}.$$

در صورت مشخص بودن تابع اندازه و عدم وجود ابهام، اندیس μ را در نمادگذاری حذف می‌کنیم و برای راحتی در نوشتن، $\mathcal{R}(f_\circ)$ را به‌جای $\mathcal{R}_\mu(f_\circ)$ به‌کار می‌بریم.

در ادامه این بخش فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^{۲}$ یک مجموعه باز و کران‌دار و $f \in L^{۲}(\Omega)$.

تعریف ۳.۲. بازآرایی کاهشی (اساساً یکتای) تابع f را با $f^* : [\circ, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(s) = \inf\{t \geq \circ : \ |\{x \in \Omega : f(x) > t\}| < s\}, \quad s \in [\circ, |\Omega|].$$

برای اثبات لم زیر به لم ۲.۷ از [۲] رجوع شود.

لم ۴.۲. عمل‌گر بازآرایی کاهشی $* : L^{۲}(\Omega) \to L^{۲}(\circ, |\Omega|)$ با ضابطه $*(f) = f^*$ لیپشیتس است؛

$$\|f^* - g^*\|_{۲} \leq \|f - g\|_{۲}, \quad \forall f, g \in L^{۲}(\Omega).$$

حال اگر B بیان‌گر قرص بازی به مرکز مبداء مختصات باشد که $|B| = |\Omega|$، آنگاه توابع $f^\sharp : B \to \mathbb{R}$ و $f_\sharp : B \to \mathbb{R}$ را به‌ترتیب بازآرایی (شوارتز) متقارن کاهشی و بازآرایی (شوارتز) متقارن افزایشی تابع f می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f^\sharp(x) = f^*(\pi\|x\|^{۲}) \qquad \text{و} \qquad f_\sharp(x) = f^*(|\Omega| - \pi\|x\|^{۲}). \tag{۱.۲}$$

در لم زیر علاوه بر برخی ویژگی‌های $\overline{\mathcal{R}}(f)$، بستار ضعیف $\mathcal{R}(f)$ در فضای $L^{۲}(\Omega)$، یک مشخصه‌سازی بسیار اساسی از آن نیز بیان می‌شود.

لم ۵.۲. فرض کنیم $f \in L^{۲}(\Omega)$. دراین صورت موارد زیر برقرارند:

(آ) $\overline{\mathcal{R}}(f) = \left\{g \in L^{۱}(\Omega) : \int_\circ^s g^* \, \mathrm{d}t \leq \int_\circ^s f^* \, \mathrm{d}t, \ \forall s \in (\circ, |\Omega|), \ \& \ \int_\circ^{|\Omega|} g^* \, \mathrm{d}t = \int_\circ^{|\Omega|} f^* \, \mathrm{d}t\right\}$.

(ب) $\overline{\mathcal{R}}(f)$ محدب است.

(ت) $\overline{\mathcal{R}}(f)$ در فضای $L^{۲}(\Omega)$ فشرده ضعیف است.

اثبات. لم‌های ۲.۲ و ۲.۳ از [۲] دیده شوند. □

نتیجه زیر، نتیجه مستقیم از بند (آ) لم ۵.۲ است.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم $f \in L^{۲}(\Omega)$. اگر $g \in \overline{\mathcal{R}}(f)$، آنگاه $\overline{\mathcal{R}}(g) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(f)$.

۳ نتایج اصلی

این بخش را با اثبات وجود و یکتایی جواب مسئله بهینه سازی (۵.۱) شروع می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) دارای جواب یکتا است.

اثبات. می‌دانیم که تابع $u_f \in H^{۱}_\circ(D)$، جواب یکتای مسئله (۱.۱)، کمینه‌کننده یکتای تابعی $J_f : H^{۱}_\circ(D) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر است:

$$J_f(u) := \int_D |\nabla u|^{۲} \, \mathrm{d}x - ۲\int_D fu \, \mathrm{d}x.$$

همچنین می‌دانیم

$$\Phi(f) = \int_D fu_f \, \mathrm{d}x = \int_D |\nabla u_f|^{۲} \, \mathrm{d}x = -J_f(u_f) = -\min_{u \in H^{۱}_\circ(D)} J_f(u). \tag{۱.۳}$$

تابعی $\Phi : L^{۲}_{+}(D) \to \mathbb{R}$ به‌طور دنباله‌ای پیوسته ضعیف است. برای اثبات این موضوع فرض کنیم دنباله $\{f_i\}$ در فضای $L^{۲}(D)$ به تابع f همگرای ضعیف باشد. چون دنباله $\{f_i\}$ کران‌دار است، با به‌کارگیری (۱.۳) و نامساوی‌های هولدر و پوانکاره نتیجه می‌گیریم:

$$\|u_{f_i}\|^{۲}_{H^{۱}_\circ(D)} = \int_D |\nabla u_{f_i}|^{۲} \, \mathrm{d}x = \int_D f_i u_{f_i} \, \mathrm{d}x \leq \|f_i\|_{۲} \, \|u_{f_i}\|_{۲} \leq C\|u_{f_i}\|_{H^{۱}_\circ(D)}, \ \ \forall \, i \in \mathbb{N}.$$

پس دنباله $\{u_{f_i}\}$ در فضای $H^1_0(D)$ کران‌دار است. درنتیجه زیردنباله‌ای از آن (که برای راحتی در نوشتن دوباره آن را با $\{u_{f_i}\}$ نمایش می‌دهیم)، $\bar{u} \in H^1_0(D)$ و $w \in L^2_+(D)$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$u_i \rightharpoonup \bar{u} \ \text{در}\ H^1_0(D), \quad u_i \to \bar{u} \ \text{در}\ L^2(D), \quad \text{و} \quad |u_{f_i}(x)| \leq w(x) \ \text{برای تقریباً هر}\ x \in D.$$

از طرف دیگر، با توجه به (۱.۱) و قضیه دیورژانس نتیجه می‌گیریم که

$$\int_D |\nabla u_{f_i} - \nabla u_f|^2 \, dx = \int_D (f_i - f) u_{f_i} \, dx - \int_D (f_i - f) u_f \, dx. \qquad (۲.۳)$$

بنابراین، از (۲.۳)، هم‌گرایی ضعیف $\{f_i\}$ به f در فضای $L^2(D)$ و به‌کارگیری قضیه هم‌گرایی تسلطی لبگ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{i\to\infty} \int_D |\nabla u_{f_i} - \nabla u_f|^2 \, dx = 0.$$

پس u_{f_i} در فضای $H^1_0(D)$ به u_f هم‌گرا است. دراین‌صورت $\Phi(f_i) \to \Phi(f)$؛ یعنی، Φ به‌طور دنباله‌ای پیوسته ضعیف است. بنابراین، از آن‌جا که $\overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ در فضای $L^2(D)$ فشرده ضعیف است، نتیجه می‌گیریم که مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) حل‌پذیر است.
از سوی دیگر، با توجه به (۱.۳) داریم:

$$\Phi(f) = \max_{u \in H^1_0(D)} (-J_f(u)).$$

چون $J_f(u)$ نسبت به f یک تابع آفین است، پس Φ تابعی محدب است. با روشی مشابه لم ۲.۱ از مرجع [۸]، ثابت می‌شود که Φ به‌طور اکید محدب است. بنابراین جواب مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) یکتا است و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که جواب بهین مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) به‌طور شعاعی متقارن است.

قضیه ۲.۳. اگر $\hat{f} \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ جواب یکتای مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) باشد، آنگاه $\hat{f}$ به‌طور شعاعی متقارن است.

اثبات. فرض کنیم R_θ بیان‌گر نگاشت دوران به اندازه زاویه $\theta \in [0, 2\pi]$ باشد. تابع $\hat{f}_\theta$ را به‌صورت $\hat{f}_\theta(x) := \hat{f}(R_\theta x)$ تعریف می‌کنیم. همچنین تابع g را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_\theta(x) d\theta, \quad \forall x \in D.$$

برای $x \in D$ به‌سادگی می‌توان نشان داد که $g(R_\theta x) = g(x)$ برای هر $\theta \in [0, 2\pi)$. بنابراین g به‌طور شعاعی متقارن است. با توجه به شکل دامنه D و ساختار $\hat{f}_\theta$ واضح است که $\hat{f}_\theta \in \mathcal{R}(\hat{f})$. حال از $\hat{f} \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ و نتیجه ۶.۲ خواهیم داشت $\hat{f}_\theta \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ و سپس از (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که $g \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$. حال چون برای هر $\theta \in [0, 2\pi)$، $\Phi(\hat{f}_\theta) = \Phi(\hat{f})$ و تابع Φ محدب است با به‌کارگیری نامساوی ینسن داریم:

$$\Phi(g) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\hat{f}_\theta) d\theta = \Phi(\hat{f}).$$

بنابراین از یکتایی جواب نتیجه می‌گیریم که $\hat{f} = g$ تقریباً همه‌جا روی D، و این اثبات را کامل می‌کند. □

در لم زیر یک نامساوی را ثابت می‌کنیم که نقشی اساسی در اثبات قضیه بعدی ایفاء می‌کند.

لم ۳.۳. اگر $0 < c < d < a < b < 1$ و $b^2 - a^2 = d^2 - c^2$ آنگاه

$$4c^4 \ln(\frac{d}{c}) - 4a^4 \ln(\frac{b}{a}) > (d^4 - c^4) - (b^4 - a^4). \qquad (۳.۳)$$

اثبات. قرار می‌دهیم $x = d/c$، $y = a/c$ و $z = b/c$، پس $1 < x < y < z$ و از برابری $b^2 - a^2 = d^2 - c^2$ داریم $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. حال تابع $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta(x, y, z) := 1 + 4\ln(x) - x^4 + z^4 - y^4 - 4y^4(\ln(z) - \ln(y)).$$

برای $s, t \geq 0$ قرار می‌دهیم

$$x = \sqrt{1+s}, y = \sqrt{1+s+t} \text{ و } z = \sqrt{1+2s+t}.$$

حال با تغییر متغیرهای بالا، تابع ξ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\xi(s,t) :&= \eta(\sqrt{1+s}, \sqrt{1+s+t}, \sqrt{1+2s+t})\\ &= 2(1+s+t)^2 \ln\left(\frac{1+s+t}{1+2s+t}\right) + 2\ln(1+s) + 2s^2 + 2st.\end{aligned}$$

به‌آسانی می‌توان دید که $\xi(0, t) = 0$ برای هر $t \geq 0$. همچنین $\{(0, t) : t \geq 0\}$ مجموعه تمام نقاط بحرانی تابع ξ است. از آن‌جا که $\xi(s, t) \to +\infty$ وقتی $s \to +\infty$، درمی‌یابیم که $\xi(s, t) > 0$ برای هر $s, t > 0$. بنابراین $\eta(d/c, a/c, b/c) > 0$ و این بلافاصله نامساوی (۳.۳) را نتیجه می دهد. □

فرض کنیم $r > 0$. از این پس، قرص باز به شعاع r و مرکز مبداء مختصات را با B_r نمایش می‌دهیم. حال در زیر، به بیان و اثبات یکی از نتایج مهم این مقاله می‌پردازیم.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم $0 < c < d < a < b < 1$، $G := B_b \setminus B_a$ و $H := B_d \setminus B_c$ چنان باشند که $|G| = |H|$؛ یعنی،

$$b^2 - a^2 = d^2 - c^2. \tag{۴.۳}$$

اگر $\hat{E} = D \setminus B_a$ و $E = H \cup (D \setminus B_b)$ آنگاه

$$\Phi(\chi_{\hat{E}}) = \int_D \chi_{\hat{E}} u_{\hat{E}} \,\mathrm{d}x < \int_D \chi_E u_E \,\mathrm{d}x = \Phi(\chi_E), \tag{۵.۳}$$

که در آن

$$\begin{cases} -\Delta u_{\hat{E}} = \chi_{\hat{E}}(x) & \text{در } D,\\ u_{\hat{E}} = 0 & \text{روی } \partial D,\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -\Delta u_E = \chi_E(x) & \text{در } D,\\ u_E = 0 & \text{روی } \partial D.\end{cases}$$

اثبات. با انجام محاسبات به‌دست می‌آوریم:

$$u_{\hat{E}}(r) = \begin{cases} \frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} & ;0 \leq r \leq a,\\ \frac{a^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4} + \frac{1}{4} & ;a \leq r < 1,\end{cases}$$

و

$$u_E(r) = \begin{cases} \frac{c^2}{2}\ln(c) - \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{2}\ln(b) - \frac{d^2}{2}\ln(d) + \frac{d^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} & ;0 \leq r \leq c,\\ \frac{c^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4} + \frac{b^2}{2}\ln(b) - \frac{d^2}{2}\ln(d) + \frac{d^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} & ;c \leq r < d,\\ (\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2})\ln(r) + \frac{b^2}{2}\ln(b) - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} & ;d \leq r < b,\\ (\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2} + \frac{b^2}{2})\ln(r) - \frac{r^2}{4} + \frac{1}{4} & ;b \leq r < 1.\end{cases}$$

از (۴.۳) نتیجه می‌شود $u_E(r) = u_{\hat{E}}(r)$ برای $b \leq r < 1$. بنابراین، برای اثبات (۵.۳)، کافی است نشان دهیم:

$$\int_G u_{\hat{E}}(x)\,\mathrm{d}x < \int_H u_E(x)\,\mathrm{d}x. \tag{۶.۳}$$

با انجام محاسبات نتیجه می‌گیریم که

$$I_۱ = \int_G u_{\hat{E}}(r) r \,\mathrm{d}r = \frac{a^۲ b^۲}{۴}\ln(b) - \frac{a^۴}{۴}\ln(a) + \frac{۳a^۴}{۱۶} - \frac{a^۲b^۲}{۸} - \frac{b^۴}{۱۶} + \frac{b^۲ - a^۲}{۸},$$

و

$$I_۲ = \int_H u_E(r) r \,\mathrm{d}r = \left(\frac{۲c^۲d^۲ - d^۴}{۴}\right)\ln(d) + \left(\frac{b^۲d^۲ - b^۲c^۲}{۴}\right)\ln(b) - \frac{c^۴}{۴}\ln(c)$$
$$- \frac{c^۲d^۲}{۴} + \frac{b^۲c^۲}{۸} - \frac{b^۲d^۲}{۸} + \frac{۳c^۴}{۱۶} + \frac{d^۴}{۱۶} + \frac{d^۲ - c^۲}{۸}.$$

سپس، با به‌کارگیری رابطه (۴.۳) داریم:

$$I_۲ - I_۱ = \frac{c^۲d^۲}{۲}\left(\ln(d) - \frac{۱}{۲}\right) - \frac{a^۲b^۲}{۲}\left(\ln(b) - \frac{۱}{۲}\right) + \frac{b^۴}{۴}\left(\ln(b) - \frac{۱}{۴}\right) - \frac{d^۴}{۴}\left(\ln(d) - \frac{۱}{۴}\right)$$
$$+ \frac{a^۴}{۴}\left(\ln(a) - \frac{۳}{۴}\right) - \frac{c^۴}{۴}\left(\ln(c) - \frac{۳}{۴}\right).$$

از رابطه‌های $(b^۲ - c^۲)^۲ = (d^۲ - c^۲)^۲$ و $d^۴ + c^۴ \geq ۲c^۲d^۲$ خواهیم داشت:

$$I_۲ - I_۱ \geq \frac{c^۴}{۴}\ln(\frac{d}{c}) - \frac{a^۴}{۴}\ln(\frac{b}{a}) + \frac{b^۴ - a^۴}{۱۶} - \frac{d^۴ - c^۴}{۱۶} > ۰,$$

که در این‌جا، آخرین نامساوی از (۳.۳) حاصل می‌شود. بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه زیر تعمیمی از گزاره ۴.۳ است.

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم $۰ < \alpha_۱ < \alpha_۲ < \cdots < \alpha_n$ و $۰ < r_۱ < \cdots < r_n < ۱$. قرار می‌دهیم $D = B_۱$، $D_i = B_{r_{i+۱}} \backslash B_{r_i}$ برای $i = ۱, \ldots, n-۱$ و $D_n = D \backslash B_{r_n}$. همچنین فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=۱}^n \alpha_i \chi_{D_i}(x)$. برای $j, k \in \{۱, \ldots, n\}$ که $j+۱ < k$، فرض کنیم $r_j < b < r_{j+۱}$، $r_k < b' < r_{k+۱}$ و $۰ < c < d < c' < d' < r_۱$ به‌طوری‌که $b^۲ - r_j^۲ = d^۲ - c^۲$ و $b'^۲ - r_k^۲ = d'^۲ - c'^۲$. اگر

$$g(x) = \alpha_j \chi_{E_j} + \alpha_k \chi_{E_k} + \sum_{i=۱}^{j-۱} \alpha_i \chi_{D_i}(x) + \sum_{i=j+۱}^{k-۱} \alpha_i \chi_{D_i}(x) + \sum_{i=k+۱}^{n} \alpha_i \chi_{D_i}(x),$$

که در آن $E_j = (B_d \setminus B_c) \cup (B_{r_{j+۱}} \setminus B_b)$ و $E_k = (B_{d'} \setminus B_{c'}) \cup (B_{r_{k+۱}} \setminus B_{b'})$، آنگاه $\Phi(f) < \Phi(g)$.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_۰ = ۰$ و $D_۰ = B_{r_۱}$. با به‌کارگیری گزاره ۴.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi(f) = \sum_{i,l=۰}^{n} \int_{D_i} \alpha_i u_{\chi_{D_l}} \,\mathrm{d}x$$
$$< \sum_{i,l \neq j,k} \int_{D_i} \alpha_i u_{\chi_{D_l}} \,\mathrm{d}x + \sum_{i=j,k} \int_{E_i} \alpha_i u_{\chi_{E_i}} \,\mathrm{d}x = \Phi(g).$$

□

سرانجام در قضیه زیر نشان می‌دهیم که جواب یکتا و متقارن شعاعی مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) تابعی افزایشی است.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $\hat{f} \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ جواب یکتای (متقارن شعاعی) مسئله کمینه‌سازی (۵.۱) باشد. دراین‌صورت $\hat{f} = \hat{f}_\sharp$ تقریباً همه‌جا روی D.

اثبات. دنباله‌ای از توابع ساده‌ی متقارن شعاعی مانند $\sigma_i : D \to \mathbb{R}$، $i = ۱, ۲, \dots$ وجود دارد به‌طوری که

$$\circ \leq \sigma_۱ \leq \sigma_۲ \leq \cdots \leq \hat{f}, \quad \text{روی } D \quad \text{و} \quad \sigma_i(x) \to \hat{f}(x), \quad \forall x \in D. \tag{۷.۳}$$

از (۷.۳) و قضیه تسلطی همگرایی لبگ داریم $\|\sigma_i - \hat{f}\|_۲ \to \circ$. پس بنابر لم ۴.۲ و (۱.۲) نتیجه می‌گیریم $\|\sigma_{i\sharp} - \hat{f}_\sharp\|_۲ \to \circ$.
حال از آن‌جا که Φ در فضای $L^۲(D)$ به‌طور دنباله‌ای پیوسته ضعیف است (اثبات قضیه ۱.۳ دیده شود) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{i\to\infty} \Phi(\sigma_i) = \Phi(\hat{f}) \quad \text{و} \quad \lim_{i\to\infty} \Phi(\sigma_{i\sharp}) = \Phi(\hat{f}_\sharp). \tag{۸.۳}$$

از طرف دیگر بنابر نتیجه ۵.۳ داریم:

$$\Phi(\sigma_{i\sharp}) \leq \Phi(\sigma_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{۹.۳}$$

حال از روابط (۸.۳) و (۹.۳) وقتی $i \to \infty$، به‌دست می‌آوریم $\Phi(\hat{f}_\sharp) \leq \Phi(\hat{f})$. از طرف دیگر، از آن‌جا که $\hat{f}_\sharp \in \mathcal{R}(\hat{f})$ و $\hat{f} \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$ از نتیجه ۶.۲ داریم: $\hat{f}_\sharp \in \overline{\mathcal{R}}(\chi_F)$. بنابراین باتوجه به یکتایی جواب نتیجه می‌گیریم که $\hat{f} = \hat{f}_\sharp$ تقریباً همه‌جا در D. □

۴ سپاس‌گزاری

نویسنده مقاله از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارد (SCU.MM۱۴۰۱/۴۴۱).

فهرست منابع

[1] Amiri, N., Zivari-Rezapour, M., *Maximization and minimization problems related to a p-Laplacian equation on a multiply conected domain*, Taiwanese J. Math., **19** (1) (2015), 243-252.

[2] Burton, G. R., *Variational problems on classes of rearrangements and multiple configurations for steady vortices*, Ann. Inst. Henri Poincare, **6** (1989) 295-319.

[3] Donyari, Z., Zivari-Rezapour, M., Emamizadeh, E., *Optimization problems and mathematical analysis of optimal values in Orlicz spaces*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No. 38, pp. 1-14.

[4] Emamizadeh, B., Liu, Y., *Bang-Bang and multiple valued optimal solutions of control problems related to quasi-linear elliptic equations*, SIAM J. Control Optim. **58** (2), (2020), 1103-1117.

[5] Emamizadeh, B., Farjudian, A., Zivari-Rezapour, M., *Optimization related to some nonlocal problems of Kirchhoff type*, Canadian. J. Math. Vol. **68** (3), (2016), 521-540.

[6] Liu, Y., Emamizadeh, B., *Converse symmetry and intermediate energy values in rearrangement optimization problems*, SIAM J. Control Optim., **55** (3), (2017), 2088-2107.

[7] Liu, Y., Emamizadeh, B., *Monotonicity and stability of optimal solutions of a minimization problem*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **25**, (2015), 94-101.

[8] Marras M., *Optimization in problems involving the p-Laplacian*, Electron J. Differ. Eqs., (2010) 1–10.

A computational method for a rearrangement minimization related to the Poisson problem on the unit disk in the plane

Mohsen Zivari-Rezapour [2]

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences & Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 2022/1/15 Accepted: 2022/8/22

Abstract: In this paper, we consider a rearrangement minimization problem related to the Poisson equation on the unit open disk in the plane. We show that this problem has a unique solution that is radially symmetric. In addition, we prove by computational method that this solution is an increasing function.

Keywords: Rearrangement, Minimization, Poisson equation, Radially symmetric, Increasing function.

©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2] *E-mail addresses:* mzivari@scu.ac.ir