مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۳۷۲-۳۸۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.40581.2032

پیرامون ویژگی‌های جبرهای بولی القاءشده با یک گروه مشبکه یکانی

سودابه کرمدوست [۱]، سید حسن میرنوری [۲،×]، محمود پورغلامحسین [۳]

[(۱،۲)] گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
[(۳)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی‌آباد

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۱۲

چکیده:
در این مقاله ما به بررسی روابط بین گروه‌های مشبکه‌ی یکانی و جبرهای بولی می‌پردازیم. ابتدا چند ویژگی مهم گروه‌های مشبکه را ثابت خواهیم کرد. در ادامه می‌بینیم که هر گروه مشبکه‌ی یکانی، یک جبر بولی را القاء می‌کند و چند ویژگی این جبر بولی را بررسی می‌کنیم. به‌عنوان نمونه ثابت می‌کنیم که جبر بولی القاءشده با گروه مشبکه‌ی همه توابع اندازه‌پذیر حقیقی‌مقدار بر یک فضای اندازه، متشکل از همه توابع مشخصه است. هم‌چنین خواهیم دید که در برخی حالات، این جبرهای بولی، بدیهی خواهند بود.

واژه‌های کلیدی: MV-جبر، گروه مشبکه، گروه مشبکه‌ی یکانی، یکّه‌ی ترتیبی، جبر بولی.

رده‌بندی ریاضی: 06F20, 06D35, 03G10

۱ مقدمه

گروه‌های جزئاً مرتب و گروه‌های مشبکه از اوایل قرن بیستم مورد توجه ریاضی‌دانان بزرگ جهان بوده است. در سال ۱۹۰۱، هولدر نشان داد که هر گروه کاملاً مرتب ارشمیدسی، با یک زیرگروه از اعداد حقیقی یکریخت است [۹]. در سال‌های بعد از آن نیز ریاضی‌دانانی مانند هان، کنراد، هاروی، کادیسون و هالند نیز به بررسی ویژگی‌های گروه‌های مشبکه و فضاهای ریس پرداختند و تلاش کردند تا گروه‌های مشبکه، با یک سری از ویژگی‌های مشخص را به‌صورت یکی از گروه‌های مشبکه شناخته‌شده و یا فضاهای ریس شناخته‌شده، نمایش دهند [۹]، [۱۳] و [۱۶]. هم‌چنین رابطه بین گروه‌های مشبکه و MV-جبرها نیز توسط ریاضی‌دانانی از جمله موندیچی مورد بررسی قرار گرفت. تا جایی که موندیچی نشان داد که رسته گروه‌های مشبکه‌ی یکانی با رسته‌ی همه MV-جبرها، یکریخت رسته‌ای است [۲۰]. از طرفی مفهوم MV-جبر، تعمیمی از مفهوم جبر بولی است که در سال ۱۹۵۸ میلادی توسط چانگ معرفی شد [۵] و می‌دانیم که در یک MV-جبر، مجموعه همه عناصر خودتوان، همراه با اعمال مشبکه، تشکیل یک جبر بولی می‌دهد [۶]. بنابراین سه مفهوم «گروه مشبکه‌ی

×نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (S. Karamdoust) karamdoost789@gmail.com (H. Myrnouri) myrnouri@gmail.com (M. Pourgholamhossein) m-purghol@qom.ac.ir

یکانی»، «MV -جبر» و «جبر بولی» رابطه نزدیکی با یکدیگر دارند. امروزه بیش‌ترین کاربرد این مفاهیم در علوم رایانه و مباحث مربوط به منطق کوانتومی است [۸]. برای اطلاع از ویژگی‌های اصلی و خواص مقدماتی MV -جبرها و جبرهای بولی به [۶]، [۸]، [۱۴]، [۲۳] و [۱۷] مراجعه شود. در کشور ایران نیز گروه‌های مشبکه و MV -جبرها و جبرهای بولی مورد بررسی ریاضی دانان قرار گرفته‌اند [۱۹] و [۳]. هم‌چنین در سال‌های اخیر، بررسی ساختارهای توپولوژیکی بر روی جبرهای بولی و گروه‌های مشبکه مورد توجه بسیاری از پژوهشگران در ایران و جهان قرار گرفته است [۱۸]، [۱۵]، [۲۱]، [۲۲] و [۲۴]. این توپولوژی‌ها باید به‌گونه‌ای باشند که با اعمال جبری سازگار باشند. بدین معنا که عمل‌های دوتایی و عمل یکتایی تتمیم، تحت این توپولوژی‌ها پیوسته باشند.

در این مقاله، پس از بیان پیش‌نیازها و بیان خواص مقدماتی گروه‌های مشبکه و جبرهای بولی، برخی از ویژگی‌های خاص گروه‌های مشبکه را بررسی خواهیم کرد و چند گزاره را در این زمینه اثبات خواهیم کرد. سپس خواهیم دید که هر گروه مشبکه‌ی یکانی، یک جبر بولی را که زیرمجموعه‌ای از بازه $[\circ, u]$ در G است، القاء می‌کند و برخی از ویژگی‌های اساسی این جبر بولی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از جمله فواید این‌کار، شناخت بهتر گروه مشبکه‌ی مورد نظر است. در واقع جبر بولی القاءشده از یک گروه مشبکه‌ی یکانی، برخی از ویژگی‌های مهم گروه مشبکه را به‌همراه دارد. از طرفی، جبر بولی القاءشده در گروه‌های مشبکه‌ی یکانی، معمولاً زیرمجموعه‌هایی آشنا و مطالعه بر روی آن‌ها ساده‌تر است. به‌عنوان مثال با ارائه برهان خواهیم دید که جبر بولی القاءشده به‌وسیله گروه مشبکه‌ی همه توابع اندازه‌پذیر حقیقی‌مقدار بر یک فضای اندازه، متشکل از توابع مشخصه است، هم‌چنین خواهیم دید که جبر بولی القاءشده با گروه مشبکه‌ی همه دنباله‌های حقیقی کران‌دار، عبارت است از همه دنباله‌ها با مقادیر صفر و یک. هم‌چنین خواهیم دید که اگر X یک فضای توپولوژی هاسدورف، فشرده و همبند باشد، جبر بولی القاءشده به‌وسیله گروه مشبکه‌ی یکانی $C\left(X\right)$ (فضای توابع پیوسته حقیقی‌مقدار بر X)، جبر بولی دو عضوی خواهد بود (یعنی $\{\circ, ۱\}$). هم‌چنین جبر بولی القاءشده با یک گروه کاملاً مرتب نیز جبر بولی دو عضوی خواهد بود. در ادامه نیز ثابت خواهیم کرد که در یک گروه مشبکه‌ی یکانی توپولوژیکی، جبر بولی القاءشده به‌وسیله آن، یک زیرمجموعه بسته از آن خواهد بود. در پایان نیز نشان خواهیم داد که چه توابعی روی گروه‌های مشبکه‌ی یکانی، می‌توانند جبر بولی متناظر را به جبر بولی متناظر بنگارند.

۲ مقدمه و پیش‌نیازها

در این بخش برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی را یادآور می‌شویم که در ادامه از آن‌ها استفاده خواهیم کرد. یک گروه مشبکه عبارت است از یک گروه جزئاً مرتب (یک گروه به‌همراه یک رابطه ترتیب $\leq$ بر روی آن که تحت انتقال پایا است؛ بدین معنا که اگر $x \leq y$ ، آن‌گاه برای هر عنصر z در گروه، $x + z \leq y + z$) که هر زیرمجموعه متناهی از آن، دارای سوپریمم و اینفیمم باشد. (سوپریمم مجموعه دو عضوی x, y را با $x \vee y$ و اینفیمم آن را با $x \wedge y$ نمایش می‌دهیم). برای اطلاع از خواص گروه‌های جزئاً مرتب و گروه‌های مشبکه به منبع [۱۲] مراجعه شود. در این‌جا ما گروه مشبکه $(G, +, \leq)$ را همواره آبلی در نظر می‌گیریم و به‌اختصار با G نمایش می‌دهیم و عضو خنثی نیز همواره با $\circ$ نمایش داده می‌شود. هم‌چنین مجموعه همه عناصر $x \in G$ را که در رابطه $\circ \leq x$ صدق کند، با G^+ نمایش می‌دهیم که مجموعه عناصر مثبت نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲. عنصر مثبت u در گروه مشبکه G را یکّه‌ی ترتیبی نامند، هرگاه برای هر $x \in G$، عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری که $x \leq nu$. هم‌چنین یک گروه مشبکه‌ی یکانی یا ℓ -گروه یکانی، عبارت است از یک گروه مشبکه که دارای یکّه‌ی ترتیبی باشد.

ملاحظه ۲.۲. لازم به‌ذکر است که یک گروه یکانی (نه لزوماً مشبکه) عبارت است از یک گروه جزئاً مرتب مانند G به‌همراه یکّه‌ی ترتیبی u که همه عناصر گروه را بتوان با استفاده از عناصر بازه بسته $[\circ, u]$ و با اعمال جبری تولید کرد (برای اطلاع بیش‌تر ر.ک. [۱۱]). البته بررسی حالت کلی گروه‌های یکانی خارج از بحث ما در این مقاله است و در این مقاله به بررسی گروه‌های مشبکه یکانی می‌پردازیم.

تعریف ۳.۲. اگر G, H گروه‌های مشبکه باشند، آن‌گاه همریختی گروهی $f : G \to H$ را یک همریختی ترتیبی یا همریختی مثبت نامیم اگر داشته باشیم، $f\left(G^+\right) \subseteq H^+$. هم‌چنین همریختی f را همریختی گروه‌های مشبکه نامیم، اگر $f\left(x \wedge y\right) = f\left(x\right) \wedge f\left(y\right)$ و $f\left(x \vee y\right) = f\left(x\right) \vee f\left(y\right)$.

تعریف ۴.۲. مجموعه غیرتهی M با عنصر مشخص $\circ$ و عمل دوتایی $\oplus$ و عمل یکتایی $\sim$ بر آن را یک MV -جبر می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in M$ موارد زیر برقرار باشند:

(۱) $x \oplus \left(y \oplus z\right) = \left(x \oplus y\right) \oplus z$.

(۲) $x \oplus y = y \oplus x$.

(۳) $x \oplus \circ = x$.

(۴) $\sim\left(\sim x\right) = x$.

(۵) با این قرار که $۱ = \sim \circ$ داریم $۱ \oplus x = ۱$.

(۶) $\sim(\sim x \oplus y) \oplus y =\sim(\sim y \oplus x) \oplus x$.

گزاره **۵.۲.** [۶] برای هر گروه مشبکه دارای یکّه‌ی ترتیبی u، یک MV -جبر روی بازه‌ی ترتیبی

$$[\circ, u] = \{x \in G : \circ \leq x \leq u\}$$

ساخته می‌شود که در آن اعمال جبری به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x \oplus y = (x + y) \wedge u$$

و

$$\sim x = u - x.$$

این MV -جبر را با $\Gamma(G, u)$ نشان می‌دهند.

ملاحظه **۶.۲.** در گزاره بالا اگر تنها شرط مثبت بودن عنصر u را به‌کار گیریم، باز هم با اعمال تعریف‌شده در بالا بر $[\circ, u]$، یک MV -جبر القاء می‌شود، ولی این MV -جبر، همه خواص گروه مشبکه G را به‌همراه ندارد. لازم به‌ذکر است که در گروه مشبکه یکانی (G, u)، هر عنصر مثبت را می‌توان با عناصر $[\circ, u]$ تولید کرد (ر.ک [۱۱] قضیه ۶.۳) و چون در هر گروه مشبکه G داریم $G = G^+ - G^+$، بنابراین هر عنصر گروه مشبکه G را می‌توان با عناصر بازه $[\circ, u]$ تولید کرد.

گزاره **۷.۲.** [۲۰] رستۀ MV -جبرها به‌طور رسته‌ای یکریخت با رسته همه گروه‌های مشبکه‌ی یکانی است. به‌عبارت دیگر به‌ازای هر MV -جبر مانند M ، یک گروه مشبکه‌ی یکانی مانند (G, u) وجود دارد به‌طوری که M و $\Gamma(G, u)$ یکریخت MV -جبری‌اند.

اگر M یک MV-جبر باشد، آن‌گاه رابطه ترتیب جزئی " $\preceq$ " را بر آن می‌توان بدین صورت تعریف کرد که اگر $x, y \in M$، آن‌گاه $x \preceq y$ هرگاه داشته باشیم $\sim x \oplus y = ۱$. از طرفی اگر $M = \Gamma(G, u)$، آن‌گاه رابطه ترتیب تعریف‌شده در بالا و رابطه ترتیب به‌ارث رسیده از گروه مشبکه G یکی است. زیرا در این‌حالت $\sim x \oplus y = u$ اگر و تنها اگر $((u - x) + y) \wedge u = u$ و این نیز برقرار است، اگر و تنها اگر $u \leq y - x + u$ و درنتیجه $x \leq y$ (ر.ک [۶]، لم ۳.۱.۲). تا جایی‌که ابهام وجود نداشته باشد، ما همه رابطه‌های ترتیب را با $\leq$ نمایش می‌دهیم.

گزاره **۸.۲.** [۶] یک MV-جبر مانند M به‌همراه رابطه ترتیب تعریف‌شده در بالا یک مشبکه توزیع‌پذیر تشکیل می‌دهد که ۱ و ۰ در آن، به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عناصر آن‌اند و اعمال " $\vee$ " و " $\wedge$ " بر آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x \vee y =\sim(\sim x \oplus y) \oplus y\,, \quad x \wedge y =\sim(\sim x \vee \sim y).$$

تعریف **۹.۲.** در یک مشبکه مانند L با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر ۰ و ۱، دو عنصر x, y را متمم یکدیگر نامیم اگر $x \wedge y = \circ$ و $x \vee y = ۱$.

می‌دانیم در یک مشبکه توزیع‌پذیر، متمم هر عنصر مانند x در صورت وجود منحصر به‌فرد است و آن‌را با $\neg x$ نمایش می‌دهیم و روشن است که $\neg(\neg x) = x$.

اگر L یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر ۰ و ۱ باشد، آن‌گاه عناصری از L را که دارای متمم‌اند، عناصر بولی می‌نامیم و با $B(L)$ نمایش می‌دهیم [۶].

گزاره **۱۰.۲.** [۶] اگر M یک MV-جبر (همراه با رابطه‌ی ترتیب گفته شده در بالا) باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل‌اند.

الف) $x \in B(M)$.

ب) $x \vee \sim x = ۱$.

ج) $x \oplus x = x$.

د) $x \oplus y = x \vee y$ (برای هر $y \in M$).

همچنین $B(M)$ یک زیرجبر M است که همراه با دو عمل دوتایی " $\vee$ " و " $\wedge$ " یک جبر بولی است که شامل همه جبرهای بولی مشمول در M است.

گزاره **۱۱.۲.** [۷] در هر گروه مشبکه آبلی G، برای هر $x, y \in G$ و هر عدد طبیعی n داریم:

$$n(x \vee y) = nx \vee ny\,, \quad n(x \wedge y) = nx \wedge ny.$$

ملاحظه **۱۲.۲.** در مورد گزاره بالا، لازم به توضیح است که هر گروه مشبکه آبلی، نمایش‌پذیر است (ر.ک [۷]، گزاره ۶.۴۷) بدین معنا که ℓ -زیرگروه حاصل‌ضربی از گروه‌های کاملاً مرتب است. حال، گزاره بالا به‌طور مستقیم از گزاره ۱۰.۴۷ (در همین مرجع) نتیجه می‌شود.

۳ گروه‌های مشبکه و جبرهای بولی

فرض کنیم (G,u) یک گروه مشبکه‌ی یکانی باشد. مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{B}\,(G,u)=\{x\in[\circ,u]:(\text{۲}x)\wedge u=x\}\,.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $\{\circ\,,\,u\}\ \subseteq\mathcal{B}\,(G,u)$ و بنابراین $\mathcal{B}(G,u)\neq\emptyset$.

قضیه ۱.۳. در یک گروه مشبکه‌ی یکانی، مجموعه $\mathcal{B}\,(G,u)$ به‌همراه اعمال $\wedge$ و $\vee$ و عمل یکتایی $\sim x=u-x$ یک جبر بولی است.

اثبات. به‌طور مستقیم از گزاره ۱۰.۲ نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۲.۳. اهمیت قضیه‌ی بالا ازاین‌جهت است که می‌توان به‌کمک آن، رابطه بین رسته گروه‌های مشبکه‌ی یکانی و رسته جبرهای بولی را به‌طور مستقیم مورد بررسی قرار داد. چون $\mathcal{B}\,(G,u)$ یک زیر جبر $\Gamma\,(G,u)$ است، لذا $\mathcal{B}\,(G,u)$ نسبت به عمل $\oplus$ بسته است. ازاین‌رو برای هر $x,y\in\mathcal{B}\,(G,u)$، خواهیم داشت: $x\oplus y\in\mathcal{B}\,(G,u)$. و این یعنی این‌که

$$(x+y)\wedge u=x\oplus y=\text{۲}(x\oplus y)\wedge u=\text{۲}((x+y)\wedge u)\wedge u=\text{۲}(x+y)\wedge\text{۲}u\wedge u=\text{۲}(x+y)\wedge u.$$

در این تساوی، از گزاره ۱۱.۲ استفاده شده است.

تعریف ۳.۳. [۱۲](ص. ۱۲۷) در گروه مشبکه یکانی (G,u)، عنصر $x\in[\circ,u]$ را عنصر مشخصه نامند، هرگاه $x\wedge(u-x)=\circ$.

نتیجه ۴.۳. در گروه مشبکه یکانی (G,u)، $x\in\mathcal{B}(G,u)$ اگر و تنها اگر x یک عنصر مشخصه باشد.

اثبات. اگر $x\in\mathcal{B}(G,u)$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\circ=x-x=(\text{۲}x)\wedge u-x=x\wedge(u-x).$$

عکس آن نیز به‌طریق مشابه ثابت می‌شود. □

ملاحظه ۵.۳. با توجه به نتیجه فوق، می‌توان دید که رابطه نزدیکی بین عناصر جبر بولی در یک گروه مشبکه و نگاشت‌های انقباض روی G وجود دارد. به‌طور دقیق‌تر، هر عنصر این جبر بولی، کانون یک انقباض روی G است و به‌عکس (برای اطلاع بیش‌تر [۱۰] دیده شود).

لم ۶.۳. اگر (G,u) یک گروه مشبکه‌ی یکانی باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}\,(G,u)$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از G، شامل یک و فقط یک عنصر یکّه‌ی ترتیبی است.

اثبات. همان‌طور که پیش از این گفته شد $u\in\mathcal{B}\,(G,u)$. حال فرض کنیم $r\in\mathcal{B}\,(G,u)$ یکّه‌ی ترتیبی باشد. نشان می‌دهیم $r=u$. بنابراین عدد طبیعی n وجود دارد که $u\leq nr$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $k\geq\text{۱}$ داریم $\text{۲}^kr\wedge u=r$. این‌کار را با استقراء روی k انجام می‌دهیم. چون r خودتوان است داریم $\text{۲}r\wedge u=r$. بنابراین برای $k=\text{۱}$ تساوی برقرار است. فرض کنیم $\text{۲}^kr\wedge u=r$. نشان می‌دهیم $\text{۲}^{k+\text{۱}}r\wedge u=r$. داریم:

$$\text{۲}^{k+\text{۱}}r\wedge u=\text{۲}^{k+\text{۱}}r\wedge(\text{۲}u\wedge u)=\left(\text{۲}^{k+\text{۱}}r\wedge\text{۲}u\right)\wedge u=\text{۲}\left(\text{۲}^kr\wedge u\right)\wedge u=\text{۲}\,(r)\wedge u=r.$$

حال کافی است عدد k را طوری انتخاب کنیم که $\text{۲}^k\geq n$. پس $u\leq nr\wedge u\leq\text{۲}^kr\wedge u=r$. از طرفی $r\leq u$، که این نتیجه می‌دهد $r=u$. □

نتیجه ۷.۳. اگر $x\in\mathcal{B}(G,u)$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، $nx\wedge u=x$.

اثبات. به‌طور مستقیم از آن‌چه در اثبات لم ۶.۳ بیان شد، نتیجه به‌دست می‌آید. □

نتیجه ۸.۳. اگر $x\in\mathcal{B}(G,u)$ و $x\neq\circ,u$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی $n>\text{۱}$، nx و u قابل مقایسه نیستند.

اثبات. اگر $x\in\mathcal{B}(G,u)$ و $\text{۲}x\leq u$، آن‌گاه $\text{۲}x=\text{۲}x\wedge u=x$ و این یعنی این‌که $x=\circ$ و یا $x=u$. بنابراین، حکم برای $n=\text{۲}$ برقرار است. اگر $n>\text{۲}$، آن‌گاه $\text{۲}x\leq nx$ و درنتیجه $u\not\leq nx$ و اگر $u\leq nx$، آن‌گاه x نیز یکّه‌ی ترتیبی است و بنابر لم ۶.۳ خواهیم داشت $x=u$. □

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم (G,u) یک گروه مشبکه‌ی یکانی باشد، آن‌گاه

$$\mathcal{B}\left(G,u\right)\cap\left\{x\in\left[\circ,u\right]:nx\leq u,\forall n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\circ\right\}.$$

اثبات. به‌طور مستقیم از نتیجه ۸.۳ به‌دست می‌آید. □

ملاحظه ۱۰.۳. اهمیت قضیه بالا زمانی آشکار می‌شود که گروه مشبکه‌ی یکانی (G,u) ارشمیدسی نباشد. در این‌حالت قضیه بالا بیان می‌کند که عناصر مثبتی مانند x که برای هر n، $nx\leq u$، نمی‌توانند عنصری از جبر بولی باشند.

نتیجه ۱۱.۳. اگر (G,u) یک گروه کاملاً مرتب یکانی باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}\left(G,u\right)=\left\{\circ,u\right\}$.

اثبات. به‌طور مستقیم از نتیجه ۸.۳ به‌دست می‌آید.

□

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس نتیجه بالا درست نیست.

مثال ۱۲.۳. اگر X یک فضای توپولوژی همبند باشد، مجموعه توابع حقیقی‌مقدار پیوسته و کران‌دار روی X را با $C_b\left(X\right)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $C_b\left(X\right)$ یک گروه مشبکه (با رابطه‌ی ترتیب $f\leq g$ هرگاه $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ برای هر x در X) است (در واقع $C_b(X)$ با این رابطه ترتیب، یک حلقه مشبکه است، ولی بررسی آن خارج از بحث ما در این مقاله است). حال نتیجه بالا را برای آن بررسی می‌کنیم. یکّه‌ی ترتیبی u را تابع ثابت ۱ در نظر می‌گیریم (البته لازم‌به‌ذکر است که هر تابع $f\in C_b(X)$ که $\inf\left\{f(x):x\in X\right\}>\circ$ یکّه‌ی ترتیبی است و بررسی آن ساده است). می‌بینیم که مجموعه همه توابع پیوسته مثبت f روی X که در شرط

$$f\wedge u=(۲f)\wedge u=f$$

صدق می‌کنند، جبر بولی $\mathcal{B}\left(C_b(X),۱\right)$ را معرفی می‌کنند. با توجه به این‌که f روی X پیوسته و X همبند است، به‌راحتی معلوم می‌شود که تنها توابع $f=\circ$ و $f=۱$ می‌توانند در چنین شرایطی صدق کنند؛ یعنی $\mathcal{B}\left(C_b(X),۱\right)=\left\{\circ.u\right\}$، درحالی‌که $C_b(X)$ کاملاً مرتب نیست، مگر آنکه X تک نقطه‌ای باشد.

ملاحظه ۱۳.۳. در مثال بالا، شرط همبندی ضروری است. اگر فضای X ناهمبند باشد، آن‌گاه تعداد اعضای $\mathcal{B}\left(C(X),۱\right)$ حتی می‌تواند نامتناهی باشد. به‌عنوان مثال، اگر $X=\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}\cup\left\{\circ\right\}$، آن‌گاه X با توپولوژی زیرفضایی، فشرده و البته ناهمبند است. برای هر عدد طبیعی k تابع f_k را بر X به‌صورت $f_k(\frac{۱}{k})=۱$ و $f_k(x)=\circ$ اگر $x\neq\frac{۱}{k}$ تعریف می‌کنیم و بدیهی است که $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}\subseteq\mathcal{B}\left(C(X),۱\right)$.

ملاحظه ۱۴.۳. در مثال بالا، شرط کران‌داری برای توابع، برای تضمین وجود یکّه‌ی ترتیبی است. به‌عنوان مثال فرض کنیم $X=(\circ,۱)\subseteq\mathbb{R}$. نشان می‌دهیم که $C(X)$ یکّه‌ی ترتیبی ندارد. نخست می‌بینیم که $C(X)$ شامل توابع بی‌کران نیز است (به‌عنوان مثال $f(x)=\frac{۱}{x}$). بنابراین اگر تابعی مانند u یکّه‌ی ترتیبی آن باشد، آن‌گاه باید بی‌کران باشد. حال اگر تابع g را روی X به‌صورت $g(x)=(u(x))^۲$، تعریف کنیم، آن‌گاه نخست $g\in C(X)$ بی‌کران است و دوم این‌که برای هر عدد مثبت k، $g\nleq ku$. بنابراین u یکّه‌ی ترتیبی نیست.

مثال ۱۵.۳. فرض کنیم (X,Λ,λ) یک فضای اندازه باشد و $M_b\left(X\right)$ مجموعه همه توابع اندازه‌پذیر کران‌دار حقیقی‌مقدار روی X باشد. با توجه به خواص ابتدایی توابع اندازه‌پذیر می‌دانیم که $M_b\left(X\right)$ همراه با جمع نقطه‌ای توابع، یک گروه آبلی است (در واقع به‌همراه ضرب اسکالر یک فضای برداری است). اگر رابطه ” $\leq$ “ را بر $M_b\left(X\right)$ به‌صورت $f\leq g$ هرگاه $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ (تقریباً همه جا) تعریف کنیم، آن‌گاه با یک بررسی ساده می‌بینیم که $M_b\left(X\right)$ یک گروه مشبکه است و تابع ثابت ۱ یکّه‌ی ترتیبی آن است. به‌عبارت دیگر، $\left(M_b\left(X\right),۱\right)$ یک گروه مشبکه‌ی یکانی است. همچنین برای هر مجموعه $E\in\Lambda$، تابع مشخصه χ_E عضوی از $\mathcal{B}\left(M_b\left(X\right),۱\right)$ است. در این‌باره قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۳. برای فضای اندازه (X,Λ,λ) داریم $\mathcal{B}\left(M_b\left(X\right),۱\right)=\left\{\chi_E:E\in\Lambda\right\}$.

اثبات. برای هر $E\in\Lambda$، اگر $x\in E$ داریم:

$$\left(۲\chi_E\left(x\right)\right)\wedge۱=۲\wedge۱=۱=\chi_E\left(x\right)$$

و اگر $x\notin E$، آن‌گاه

$$\left(۲\chi_E\left(x\right)\right)\wedge۱=\circ\wedge۱=\circ=\chi_E\left(x\right)$$

(مگر بر مجموعه‌ای با اندازه صفر). بنابراین $\chi_E \in \mathcal{B}\left(M_b\left(X\right), ۱\right)$. حال فرض کنیم $f \in \mathcal{B}\left(M_b\left(X\right), ۱\right)$. تقریباً برای هر $x \in X$ خواهیم داشت:

$$\left(۲f\left(x\right)\right) \wedge ۱ = f\left(x\right), ۰ \leq f\left(x\right) \leq ۱.$$

فرض کنیم $f\left(x\right) \neq ۰$. در این‌صورت یا $۲f\left(x\right) \leq ۱$ و یا $۲f\left(x\right) > ۱$. اگر $۲f\left(x\right) \leq ۱$، آن‌گاه

$$f\left(x\right) = ۲f\left(x\right) \wedge ۱ = ۲f\left(x\right).$$

بنابراین $f\left(x\right) = ۲f\left(x\right)$ که این نتیجه می‌دهد $f\left(x\right) = ۰$. حال، فرض کنیم $۲f\left(x\right) > ۱$. بنابراین $f\left(x\right) = ۲f\left(x\right) \wedge ۱ = ۱$، ازاین‌رو $f\left(x\right) = ۱$ و این یعنی این‌که $f\left(x\right)$ فقط می‌تواند مقادیر ۰ و ۱ را به‌خود بگیرد. قرار می‌دهیم:

$$E = \left\{x \in X : f\left(x\right) = ۱\right\}.$$

در این‌صورت E یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر از X است و لذا $f = \chi_E$. □

نتیجه **۱۷.۳**. اگر X فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(C_b(X), ۱) = \{\chi_E :$ یک زیرمجموعه باز و بسته است $E\}$.

اثبات. همانند استدلال مثال بالا، به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید. □

نتیجه زیر نیز رابطه همبندی یک فضای توپولوژی با ساختار جبر بولی القاءشده با $C_b(X)$ را نشان می‌دهد.

نتیجه **۱۸.۳**. فضای توپولوژی X همبند است، اگر و تنها اگر

$$\mathcal{B}(C_b(X), ۱) = \{۰, u\}.$$

اثبات. اگر X همبند باشد، آن‌گاه با توجه به این‌که $\emptyset, X$ تنها مولفه‌های همبندند، لذا از نتیجه ۱۷.۳ حکم به‌دست می آید. عکس آن نیز به‌طور مستقیم نتیجه می‌شود. □

مثال **۱۹.۳**. می‌دانیم که فضای دنباله‌های حقیقی کران‌دار با عمل جمع مولفه‌ای، یک گروه است. این فضا را $\mathcal{M}$ می‌نامیم. (به‌طور دقیق‌تر $\mathcal{M} = C_b(\mathbb{N})$.) رابطه ترتیبی زیر را روی $\mathcal{M}$ در نظر می‌گیریم. برای هر دو عضو (a_i) و (b_i) در $\mathcal{M}$، $(a_i) \leq (b_i)$ هرگاه برای هر i، نامساوی $a_i \leq b_i$، برقرار باشد. گروه $\mathcal{M}$ با این رابطه‌ی ترتیب به یک گروه مشبکه تبدیل می‌شود. زیرا اینفیمم هر دو عضو بالا یعنی $(a_i) \wedge (b_i) = (a_i \wedge b_i)$ عضوی از این گروه خواهد بود. به‌طور مشابه سوپریمم هر دو عضو نیز، عضوی از این گروه می‌شود. چون هر دنباله این گروه کران‌دار است. دنباله‌ی ثابت (۱) یکّه‌ی ترتیبی آن است. باتوجه به قضیه ۱۶.۳ می‌توان دید که جبر بولی $\mathcal{B}\left(\mathcal{M}, ۱\right)$ برابر با مجموعه دنباله‌هایی است که مقادیر آن‌ها فقط شامل ۰ و ۱اند. لازم‌به‌ذکر است که اگر دو دنباله $(a_i), (b_i) \in \mathcal{B}\left(\mathcal{M}, ۱\right)$ متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه برای هر i، $a_i + b_i = ۱$ و $a_i b_i = ۰$.

حال فرض کنیم که (G, u, τ) یک گروه مشبکه‌ی یکانی توپولوژیکی باشد. یعنی گروه مشبکه‌ی یکانی (G, u) به‌همراه توپولوژی گروهی τ روی آن که اعمال مشبکه‌ای، تحت آن پیوسته باشند [۲]. در زیر یک ویژگی توپولوژیکی $\mathcal{B}\left(G, u\right)$ را بیان خواهیم کرد.

قضیه **۲۰.۳**. در یک گروه مشبکه‌ی یکانی توپولوژیکی (G, u, τ)، جبر بولی $\mathcal{B}\left(G, u\right)$ به‌عنوان زیرمجموعه G، بسته است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_i\}_{i\in I}$ یک تور در $\mathcal{B}\left(G, u\right)$ و همگرا به $x \in G$ باشد. کافی است نشان دهیم که $x \in \mathcal{B}\left(G, u\right)$. به این منظور نشان می‌دهیم $۲x \wedge u = x$. با توجه به این‌که بازه $[۰, u]$ نسبت به هر ℓ–توپولوژی بسته است، لذا $x \in [۰, u]$. حال با توجه به پیوستگی عمل دوتایی اینفیمم داریم:

$$(۲x) \wedge u = (۲lim_{i\in I}x_i) \wedge u = (lim_{i\in I}۲x_i) \wedge u = lim_{i\in I}(۲x_i \wedge u) = lim_{i\in I}x_i = x$$

و برهان تمام می‌شود. □

در زیر، رابطه همریختی مشبکه‌ای و جبرهای بولی تولیدشده به‌وسیله گروه‌های مشبکه را بررسی می‌کنیم .

قضیه **۲۱.۳**. فرض کنیم (G, u) یک گروه مشبکه یکانی و H یک گروه مشبکه و $\phi : G \to H$ یک همریختی گروه‌های مشبکه باشد. در این‌صورت ϕ، جبر بولی $\mathcal{B}\left(G, u\right)$ را به یک زیر جبر بولی از $\mathcal{B}\left(\phi(G), \phi(u)\right)$ می‌نگارد.

اثبات. روشن است که $\phi(G)$ یک زیرگروه مشبکه از H است. همچنین اگر $x \in G$ و $x \leq nu$، $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه $\phi(x) \leq n\phi(u)$ و لذا $v = \phi(u)$ یکّه‌ی ترتیبی در $\phi(G)$ است. حال، اگر $x \in \mathcal{B}\left(G, u\right)$، آن‌گاه

$$۲\phi(x) \wedge v = \phi(۲x) \wedge \phi(u) = \phi(۲x \wedge u) = \phi(x)$$

و این نشان می‌دهد که $\phi\left(\mathcal{B}\left(G, u\right)\right) \subseteq \mathcal{B}\left(\phi(G), v\right)$. همچنین برای هر $x, y \in \mathcal{B}\left(G, u\right)$ داریم $\sim x \wedge y \in \mathcal{B}\left(G, u\right)$ و درنتیجه

$$\phi(\sim x \wedge y) = \phi((u-x) \wedge y) = (\phi(u) - \phi(x)) \wedge \phi(y) =\sim \phi(x) \wedge \phi(y).$$

بنابراین $\sim \phi(x) \wedge \phi(y) \in \phi\left(\mathcal{B}\left(G, u\right)\right)$ و این یعنی این‌که $\phi\left(\mathcal{B}\left(G, u\right)\right)$ یک زیرجبر $\mathcal{B}\left(\phi(G), \phi(u)\right)$ است. □

در مثال زیر نشان می‌دهیم که در قضیه بالا، شرط این‌که تابع f همریختی گروه‌های مشبکه باشد، الزامی است و این قضیه در مورد همریختی‌های گروهی مثبت برقرار نیست.

مثال ۲۲.۳. فرض کنیم $X = [۰, ۳] \cup [۴, ۵]$ با توپولوژی زیرفضایی باشد و گروه مشبکه $C\left(X\right)$ را در نظر می‌گیریم (با رابطه ترتیب نقطه‌ای). تابع $S : C\left(X\right) \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S\left(f\right) = \int_X f\left(x\right) dx.$$

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که S یک همریختی مثبت است . حال تابع ثابت یک را به‌عنوان یکّه‌ی ترتیبی در $C\left(X\right)$ و هر عدد $r > ۰$ نیز یکّه‌ی ترتیبی در $\mathbb{R}$ می‌تواند باشد . با توجه به قضیه ۱۶.۳ و این واقعیت که $C\left(X\right)$ یک زیرگروه مشبکه از $M_b\left(X\right)$ است، می‌توان دید که عناصر جبر بولی $\mathcal{B}\left(C\left(X\right), ۱\right)$ توابع مشخصه مانند χ_Eاند و همان‌طور که می‌دانیم، χ_E پیوسته است، اگر و فقط اگر E باز و بسته باشد. درنتیجه E فقط می‌تواند یکی از مجموعه‌های X، $[۴, ۵]$، $[۰, ۳]$ و یا $\emptyset$ باشد. از طرفی باتوجه به ۱۱.۳، می‌دانیم که $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}, r\right) = \{۰, r\}$. حال توابع مشخصه $\chi_{[۰,۳]}, \chi_{[۴,۵]} \in \mathcal{B}\left(C\left(X\right), ۱\right)$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$S\left(\chi_{[۰,۳]}\right) = \int_{[۰,۳]} ۱ dx = ۳, \quad S\left(\chi_{[۴,۵]}\right) = \int_{[۴,۵]} ۱ dx = ۱$$

و این نشان می‌دهد که $S(\mathcal{B}\left(C\left(X\right), ۱\right)$ یک جبر بولی نیست.

گزاره ۲۳.۳. اگر G یک گروه مشبکه و $u, v \in G$ یکّه‌ی ترتیبی باشند، آن‌گاه یک یکریختی جبرهای بولی از $\mathcal{B}(G, u)$ به $\mathcal{B}(G, v)$ وجود دارد.

اثبات. اگر u یکّه‌ی ترتیبی باشد، آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $v \leq nu$. عدد n را ثابت می‌گیریم. نگاشت h را روی G با ضابطه $h(x) = nx \wedge v$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که h یک یکریختی جبرهای بولی از $\mathcal{B}(G, u)$ به $\mathcal{B}(G, v)$ القاء می‌کند. نخست می‌بینیم که $h(۰) = ۰$ و $h(u) = v$. همچنین برای هر $x \in \mathcal{B}(G, u)$ داریم: $۰ \leq h(x) \leq v$ و همچنین

$$۲h(x) \wedge v = ۲(nx \wedge v) \wedge v = ۲nx \wedge v = ۲nx \wedge nu \wedge v = n(۲x \wedge u) \wedge v = nx \wedge v = h(x)$$

و این یعنی $h(x) \in \mathcal{B}(G, v)$. برای اثبات یک‌به‌یک بودن، فرض کنیم $x, y \in \mathcal{B}(G, u)$ و $h(x) = h(y)$ و یا به‌عبارت دیگر $nx \wedge v = ny \wedge v$. چون v نیز یکّه‌ی ترتیبی است، لذا عدد طبیعی k وجود دارد که $u \leq kv$ (عدد k را نیز ثابت می‌گیریم). باتوجه به نتیجه ۷.۳ داریم:

$$x = x \wedge u = knx \wedge u \leq knx \wedge kv = k(nx \wedge v) = k(ny \wedge v) \leq k(ny \wedge nu) = kn(y \wedge u) = kny.$$

بنابراین $x \leq kny$ و با استدلال مشابه خواهیم داشت $y \leq knx$. درنتیجه

$$x = x \wedge u \leq kny \wedge u \leq k^۲n^۲x \wedge u = x.$$

لذا $x = kny \wedge u = y$. حال، نشان می‌دهیم که h پوشا است. اگر $y \in \mathcal{B}(G, v)$، نشان می‌دهیم $h(ky \wedge u) = y$. نخست داریم:

$$۲(ky \wedge u) \wedge u = ۲ky \wedge u = ۲ky \wedge (u \wedge kv) = (۲ky \wedge kv) \wedge u = k(۲y \wedge v) \wedge u = ky \wedge u$$

که این نشان می‌دهد $ky \wedge u \in \mathcal{B}(G, u)$. دوم می‌بینیم که

$$h(ky \wedge u) = n(ky \wedge u) \wedge v = nky \wedge (nu \wedge v) = nky \wedge v = y.$$

در تساوی آخر، باز هم از نتیجه ۷.۳ استفاده شده است. □

ملاحظه **۲۴.۳.** در گزاره بالا، نگاشت h لزوماً یک یکریختی از $\Gamma(G, u)$ به $\Gamma(G, v)$ نیست. در حالت کلی نیز ممکن است که $\Gamma(G, u)$ و $\Gamma(G, v)$ یکریخت MV -جبری نباشند. به‌عنوان مثال در گروه مشبکه $\mathbb{Z}$ اعداد ۱،۳ یکّه‌های ترتیبی‌اند و روشن است که $\Gamma(\mathbb{Z}, ۱)$ و $\Gamma(\mathbb{Z}, ۳)$ یکریخت MV -جبری نیستند. در زیر مثال دیگری را در این‌باره خواهیم آورد.

مثال **۲۵.۳.** گروه مشبکه $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ (با عمل جمع مختصاتی و رابطه ترتیب مختصاتی) را درنظر می‌گیریم. روشن است که $u = (۱, ۱)$ و $v = (۳, ۳)$ یکّه‌های ترتیبی در Gاند. فرض کنیم نگاشت $h : \Gamma(G, u) \to \Gamma(G, v)$ یک یکریختی MV -جبری باشد. عنصر $y = (۱, ۱) \in \Gamma(G, v)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = (n, r) \in \Gamma(G, u)$ چنان باشد که $h(x) = y$. در این‌صورت $۰ \leq r \leq ۱$ و همچنین $n \in \{۰, ۱\}$ و لذا همواره خواهیم داشت $x \oplus x = (n, ۲r \wedge ۱)$. از طرفی داریم: $\sim x = (\acute{n}, ۱ - r)$ که در آن $\acute{n} \in \{۰, ۱\}$ و $\acute{n} \neq n$. همچنین در $\Gamma(G, v)$ داریم: $\sim y = (۲, ۲) = y \oplus y$. بنابراین

$$h((n, ۲r \wedge ۱)) = h(x \oplus x) = h(x) \oplus h(x) = y \oplus y = (۲, ۲) = \sim y =$$
$$\sim h(x) = h(\sim x) = h((\acute{n}, ۱ - r))$$

و چون طبق فرض h یک‌به‌یک است، لذا $n = \acute{n}$ که تناقض است.

در زیر نشان می‌دهیم که در برخی گروه‌های مشبکه یکانی خاص، MV -جبرهای $\Gamma(G, u)$ و $\Gamma(G, v)$ برای هر دو یکّه ترتیبی u, v، یکریخت MV -جبری‌اند.

قضیه **۲۶.۳.** اگر X یک فضای توپولوژی و u, v یکّه‌های ترتیبی در گروه مشبکه یکانی $G = C_b(X)$ باشند، آن‌گاه $\Gamma(G, u)$ و $\Gamma(G, v)$ یکریخت MV -جبری‌اند.

اثبات. نگاشت

$$h : \Gamma(G, u) \to \Gamma(G, v)$$

را به‌صورت $h(f) = \dfrac{v}{u}f$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که h یکریختی MV -جبرها است. لازم‌به‌ذکر است که با توجه به مثال ۱۲.۳، توابع u, v همواره دور از صفرند لذا وارون آن‌ها نیز پیوسته و کران‌دار است و درنتیجه $h \in C_b(X)$. همچنین اگر $۰ \leq f \leq u$، آن‌گاه $fv \leq uv$ و لذا $\dfrac{v}{u}f \leq v$. پس این نگاشت خوش‌تعریف است. بررسی یک‌به‌یک بودن h نیز ساده است. اگر $f \in \Gamma(G, v)$، آن‌گاه $\dfrac{u}{v}f \in \Gamma(G, u)$ و $h(\dfrac{u}{v}f) = f$ و این پوشا بودن نگاشت h را نشان می‌دهد. همچنین

$$h(\sim f) = \frac{v}{u}(u - f) = v - \frac{v}{u}f = \sim h(f).$$

حال نشان می‌دهیم $h(f \oplus g) = h(f) \oplus h(g)$. داریم:

$$h(f \oplus g) = \frac{v}{u}((f + g) \wedge u) = (\frac{v}{u}f + \frac{v}{u}g) \wedge v = (h(f) + h(g)) \wedge v = h(f) \oplus h(g).$$

لازم‌به‌ذکر است که در تساوی دوم در بالا، از خواص حلقه مرتب اعداد حقیقی استفاده شده است. بدین‌صورت که برای هر $x \in X$، مقادیر $f(x), g(x), u(x)$ و $h(v(x))$، همگی در $\mathbb{R}$اند و داریم:

$$\frac{v(x)}{u(x)}(f(x) + g(x)) \wedge u(x) = (\frac{v(x)}{u(x)}f(x) + \frac{v(x)}{u(x)}g(x)) \wedge v(x).$$

□

تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله بر خود لازم می‌دانند از آقای دکتر محمدعلی رنجبر که از پیشنهادها و راهنمایی‌های ایشان در مقاله استفاده شده است و هم‌چنین داور محترم این مقاله تشکر و قدردانی نمایند. یادآور می‌شویم که نتیجه ۴.۳ و گزاره ۲۳.۳ و مطالب بعد از آن، بنابر پیشنهاد داور ارجمند ایجاد شده است.

فهرست منابع

[1] Aliprantis, C. D and Burkinshaw, O., *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, Math Surveys and Monographs, Volume 105, American Math. Society, 2003. MR 2005b:46010.

[2] Ball R. N., *Topological lattice-ordered groups*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 83, No. 1 (1979) 1-26.

[3] Banaschewski B., Ebrahimi M.M. and Mahmoudi M., *On the normal completion of Boolean algebra*, Journal of pure and applied algebra (2003) 1-14.

[4] Birkhoff, G.,*Lattice Theory*, A.M.S. Colloquium Publications XXV, Providence, RI 1967.

[5] Chang C.C., *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 88 (1958) 467-490.

[6] Cignoli R., Ottaviano I. M. L. D and Mundici D., *Algebraic Foundations of many-valued Reasoning*, Kluwer Academic Publ, Dordrecht (2000).

[7] Darnel M. R, *Theory of lattice − ordered groups*, Marcel Dekker, New York (1995).

[8] Dvurecenskij D. and Pulmannova S., *New trends in quantum structures*, Springer Science-Dortrecht (2000).

[9] Glass A. M. W., *Partially Ordered Groups*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (1999).

[10] Foulis D. J., *Compressions on partially ordered abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 3581–3587.

[11] Foulis D. J. and Pulmannova. S., *Monotone σ-Complete RC-Groups*, J. London Math. Soc, Vol. 73, No. 2 (2006) 304-324.

[12] Goodearl K. R., *Partially Ordered Abelian Groups With Interpolation*, Amer. Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs) (2010).

[13] Hahn H., *Uber die nichtarchimedischen Groben-systeme*, Sitz. ber. K. Akad. der Wiss., Math. Nat. KI. IIa Vol. 116 (1907) 601-655.

[14] Halmos P. and Givant S., *Introduction to Boolean Algebras*, Springer-Verlag New York (Undergraduate Texts in Mathematics) (2009).

[15] Jordan F. and Pajoohesh H., *Topologies on abelian lattice ordered groups induced by a positive filter and completeness*, Algebra Universalis, 79(62) (2018) 1-18.

[16] Kadison R.V., *A representation theory for commutative topological algebra*, Mem. A M S, No. 7 (1951).

[17] Koppelberg S., *Handbook of Boolean algebras*, Vol. 1. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1989).

[18] Kopperman R., Pajoohesh H. and Richmond T., *Topologies arising from metrics valued in abelian l-groups*, Algebra Universalis, 65 (2011) 315-330.

[19] Mahmoudi M., *M-Boolean envelope of M-distributive lattices*, Italian journal of pure and applied mathematics (2001) 133-138.

[20] Mundici D., *Interpretation of AF C*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus*, J. Funct. Anal, 65 (1986) 15-63.

[21] Pourgholamhossein M. and Ranjbar M.A., *On the topological mass Lattice Groups*, Positivity, 23(4) (2019) 811-827.

[22] Ranjbar M.A and Pourgholamhossein M., *Filter and weak link topologies*, Algebra Universalis, 81, 41 (2020). https://doi.org/10.1007/s00012-020-00670-w.

[23] Vladimirov D.A., *Boolean algebras in analysis*, Springer Science Business Media Dordrecht (2002).

[24] Wu S., Luan W. and Yang Y., *Filter topologies on MV-algebras ll*, Soft Computing, 24 (2020) 3173–3177.

On the properties of the Boolean algebras induced by a unital tattice ordered group

Soudabeh Karamdoust[1], **S. Hassan Myrnouri**[2, †], **Mahmood Pourgholamhossein**[3]

(1,2) Department of Mathematics, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran.
(3) Faculty of Mathematics, Department of Science., University of Qom, Qom, Iran.

Communicated by: A. R. Aliabad

Received: 2022/5/8 Accepted: 2022/9/3

Abstract: In this work we study the relations between Boolean algebras and unital lattice-ordered groups. At first we prove some main results about the properties of lattice-ordered groups. Then we see that every unital lattice-ordered groups induces a Boolean algebra and we investigate some properties of the Boolean algebra. For instance, we prove that the Boolean algebra induced by the lattice-ordered group of all measurable real valued functions on a measure space, consists of all characteristic functions. We also see that in some cases, these Boolean algebras are trivial.

Keywords: MV-algebra, Lattice ordered group, Unital lattice ordered group, order unit, Boolean algebra.

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: S.karamdoost789@gmail.com (S. Karamdoust), myrnouri@gmail.com (H. Myrnouri)., m-purghol@qom.ac.ir(M. Pourgholamhossein)