مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۴۲۸–۴۳۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.40559.2029

جبر ترویلیگر گراف‌های چند بخشی کامل

مسعود کریمی [×]، الهام تفضلی

گروه ریاضی، واحد بجنورد، دانشگاه آزاد اسلامی، بجنورد، ایران

دبیر مسئول: سعید علیخانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱

چکیده: فرض کنیم $\Gamma = K_{p_1,\ldots,p_r}$ گراف r بخشی کامل است و x_0 رأس ثابتی از آن. فرض کنیم T جبر ترویلیگر گراف Γ نسبت به رأس ثابت x_0 است. در این مقاله ساختار مدولی این جبر را مطالعه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که این جبر تا حد یکریختی $s+2$ یا $s+3$ مدول تحویل‌ناپذیر دارد که s تعداد مقادیر متمایز $p_1, \ldots, p_r$ است. به‌علاوه بعدهای این مدول‌ها را به‌عنوان فضاهای برداری مختلط محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گراف چندبخشی کامل، جبر ترویلیگر، جبر نیم‌ساده.

رده‌بندی ریاضی: 05C50

۱ مقدمه

نظریه‌ی جبرهای ترویلیگر، که در اصل جبرهای زیرساختاری نیز نامیده می‌شود، در ابتدا توسط پاول ترویلیگر در دهه‌ی ۹۰ میلادی در [۱] به‌منظور مطالعه‌ی اسکیم‌های شرکت‌پذیر معرفی شد. نمایش این جبرها به‌ویژه برای مطالعه‌ی اسکیم‌های شرکت‌پذیراز نوع (P, Q)-چندجمله‌ای در [۲، ۳] به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار گرفته است. جبرهای ترویلیگر روی گراف‌ها تعریف می‌شوند و نظریه‌ی نمایش آن‌ها به‌طور ویژه در مورد گراف‌های فاصله منظم به‌طور وسیعی مورد بحث و بررسی قرار گرفته شده است. در این مقاله جبر ترویلیگر خانواده‌ی گراف‌های چندبخشی کامل را مورد بررسی قرار داده و ساختار مدول‌های تحویل‌ناپذیر آن را مشخص می‌کنیم. به‌عنوان یک نتیجه‌ی اصلی، خواهیم دید که تعداد زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر مدول استاندارد این جبر، تا حد یکریختی توسط تعداد بخش‌های این گراف مشخص می‌شود.

با توجه به این‌که به‌نظر می‌رسد به‌جز برای گراف‌های فاصله منظم [۴، ۵] هیچ منبعی برای جبرهای ترویلیگر گراف‌ها به‌طور عمومی وجود ندارد، قبل از آغاز مطالعه در این مقاله، تعدادی از نتایج و مفاهیم را درباره جبرهای ترویلیگر بیان و معرفی می‌کنیم.

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: karimimth@yahoo.com (M. Karimi), tafazoli.elham@gmail.com (E. Tafazoli)

۱.۱ جبرهای ترویلیگر

جبرهای ترویلیگر در ابتدا در مقاله‌ی [۱] روی اسکیم‌های شرکت‌پذیر تعریف شد و بعدها تعمیم آن روی گراف‌های ساده در مقاله‌ی [۵] ارایه شد. در مقاله‌ی حاضر، تعریفی از جبرهای ترویلیگر ارایه می‌کنیم که برای هر دو منظور، یعنی اسکیم‌های شرکت‌پذیر و نیز گراف‌های ساده قابل استفاده است.

فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط از بعد متناهی است به‌طوری که مجهز به یک فرم هرمیتی مثبت معین است. فرض کنیم تجزیه‌ای از V به حاصل‌جمعی مستقیم از زیرفضاهای دوبه‌دو متعامد V_i، $i = 0, \ldots, D^*$ داده شده است، یعنی $V = \bigoplus_{i=0}^{D^*} V_i$ و $V_i \perp V_j$ برای $i \neq j$. همچنین فرض کنیم $V = \bigoplus_{i=0}^{D} V_i^*$ تجزیه‌ی دیگری از V به زیرفضاهای دوبه‌دو متعامد V_i^* است که $i = 0, \ldots, D$.

در این مقاله E_i (E_i^*) نگاشت‌های تصویری از V برروی V_i (V_i^*)اند که

$$I = E_1 + \cdots + E_D \qquad E_iE_j = \delta_{ij}E_i$$

$$(I = E_1^* + \cdots + E_{D^*}^* \qquad E_i^*E_j^* = \delta_{ij}E_i^* \qquad \text{به ترتیب})$$

که در آن I نگاشت همانی و δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است.

فرض کنیم T زیرجبری از جبر درون‌ریختی‌های $End(V)$ است که توسط E_i و E_j^*ها تولید شود، یعنی

$$T = \langle E_i, E_j^* | i = 0, \ldots, D^*, j = 0, \ldots, D\rangle \subseteq End(V).$$

جبر T را جبر ترویلیگر یا فقط T-جبر می‌نامیم.

به‌جای در نظر گرفتن تجزیه‌ی $V = \bigoplus_{i=0}^{D^*} V_i$، در اغلب موارد یک تبدیل نرمال A روی فضای برداری داده می‌شود، یعنی ضرب A در ترانهاده‌ی الحاقی خود، تعویض‌پذیر است. به‌عبارت دیگر

$$A\bar{A}^t = \bar{A}^tA.$$

در این صورت تجزیه‌ی $V = \bigoplus_{i=0}^{D^*} V_i$ را تجزیه بر روی فضای بردارهای ویژه‌ی A دانسته فرض می‌کنیم. در این حالت، با توجه به این‌که نگاشت‌های تصویری متناظر E_i به‌صورت چندجمله‌ای‌هایی بر حسب Aیند، جبر ترویلیگر توسط A و E_i^* تولید می‌شود:

$$T = \langle A, E_j^* | j = 0, \ldots, D\rangle \subseteq End(V). \qquad (۱.۱)$$

آن‌چه که در ادامه ارایه می‌شود، معرفی جبر ترویلیگر T توسط ۱.۱ است که به‌وسیله تبدیل A و نگاشت‌های تصویری E_j^* ساخته می‌شود. از این پس، در هیچ جای متن مقاله نمادهای E_i و V_i برای تجزیه‌ی اول $V = \bigoplus_{i=0}^{D^*} V_i$ استفاده نخواهد شد.

توجه شود که عمل جبر تعریف‌شده در بالا روی فضای برداری V وفادار است. همچنین از آن‌جاکه این جبر توسط عملگرهای نرمال تولید می‌شود، نیم‌ساده است. به‌راحتی می‌توان دید اگر W زیرفضایی باشد که تحت عمل جبر بالا پایا بماند، در این صورت مکمل آن یعنی $W^\perp$ نیز در V تحت T پایا است. V را مدول استاندارد می‌نامیم. بنابراین مدول استاندارد V مجموع مستقیم زیرمدول‌هایی است و هر زیرمدول تحویل‌ناپذیر تا حد یکریختی در V ظاهر می‌شود.

۲.۱ جبرهای ترویلیگر روی گراف‌های همبند متناهی

در این بخش جبرهای ترویلیگر را روی گراف‌های ساده‌ی همبند متناهی تعریف می‌کنیم. فرض کنیم Γ گرافی همبند، ساده و متناهی است. فرض کنیم X مجموعه‌ی رأس‌های Γ است و x_0 رأسی دلخواه اما ثابت از آن است. از این پس آن را رأس مبنا می‌نامیم. مجموعه‌ی رأس‌های Γ را برحسب فاصله‌ی رأس‌ها تا x_0 به زیرمجموعه‌های X_i افراز می‌کنیم، $X = \bigcup_{i=0}^{D} X_i$. بنابراین

$$X_i = \{x \in X | d(x, x_0) = i\} \qquad (۲.۱)$$

که در آن $d(x, x_0)$ طول کوتاهترین مسیر بین x_0 و x است و $D = max\{d(x, x_0) | x \in X\}$.

فضای برداری مختلط $V = \mathbb{C}X$ را که به‌طور صوری توسط اعضای مجموعه‌ی X به‌عنوان پایه گسترده می‌شود، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب چون X یک پایه‌ی متعامد یکه است، فضای برداری V مجهز به یک فرم هرمیتی مثبت معین است و افراز $X = \bigcup_{i=0}^{D} X_i$ منجر به تشکیل یک تجزیه‌ی متعامد برای V به‌صورت $V = \bigoplus_{i=0}^{D} V_i^*$ می‌شود که در آن $V_i^* = \mathbb{C}X_i$ زیرفضایی از $V = \mathbb{C}X$ است که توسط X_i تولید می‌شود.

فرض کنیم A ماتریس مجاورت گراف Γ است. یعنی درایه‌ی واقع در سطر x و ستون y برابر یک است اگر دو رأس x و y با یالی به یکدیگر وصل باشند، در غیر این صورت صفر است. به این ترتیب ماتریس A یک تبدیل خطی نرمال برروی فضای برداری V است.
گیریم E_i^* تصویر متعامد V برروری زیرفضای V_i^* است. زیرجبر تولیدشده توسط A و E_i^*ها را با نماد $T(x_0)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را جبر ترویلیگر گراف Γ نسبت به رأس مبنا x_0 می‌نامیم. توجه شود که نگاشت‌های تصویری متعامد E_i^* به‌طور طبیعی دارای یک ترتیب‌اند که به‌واسطه‌ی تعریف فاصله تا رأس مبنا القا می‌شود. در ادامه، اگر رأس مبنا دانسته فرض شده باشد، برای سادگی به‌جای $T(x_0)$ فقط می‌نویسیم T. گزاره‌ی زیر از [۴] است.

گزاره ۱.۱. فرض کنیم $W_0 = Tx_0$ کوچک‌ترین زیرمدولی از V است که شامل رأس مبنا یعنی x_0 است. در این صورت W تحویل‌ناپذیر است.

T–زیرمدول بالا را زیرمدول اصلی جبر ترویلیگر می‌نامند. با توجه به‌این‌که درس‌نامه‌ی [۴] به‌طور رسمی منتشر نشده است، اثباتی از گزاره فوق را در این‌جا بیان می‌کنیم: با توجه به این‌که T نیم‌ساده است، W_0 حاصل‌جمعی مستقیم از زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر است. حال E_0 را روی زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر ظاهرشده در تجزیه‌ی W اثر دهیم. چون $E_0W_0 = V_0^* = \mathbb{C}x_0$، یک زیرمدول تحویل‌ناپذیر از W از W_0 موجود است که شامل x_0 است. این یعنی $W = Tx_0$. پس $W_0 = Tx_0$ تحویل‌ناپذیر است.
در سرتاسر این مقاله، حالتی را در نظر می‌گیریم که گراف Γ چندبخشی کامل است. گراف $\Gamma = K_{p_1,\ldots,p_r}$ با مجموعه‌ی رأس‌های X را r بخشی کامل می‌نامند هرگاه بتوان مجموعه‌ی رأس‌های آن را به r زیرمجموعه چنان افراز کرد که زیرگراف القا شده توسط رأس‌های هر بخش، تهی و هر رأس واقع در یک بخش به همه‌ی رأس‌های سایر بخش‌ها متصل است.
از آن‌جا که نیاز داریم زیرفضاهای برداری را روی بخش‌های این گراف تعریف کنیم، نمادگذاری‌های مناسبی را باید معرفی نماییم.
بخش‌های گراف $\Gamma = K_{p_1,\ldots,p_r}$ را با زیرمجموعه‌های $X^k(p_i^*)$ نمایش می‌دهیم که در آن

$$i = 1\ldots,s \qquad k = 1,\ldots,m_i, \qquad p_i^* \neq p_j^* \qquad (i \neq j)$$

به‌طوری‌که

$$m_1 + \cdots + m_s = r, \qquad |X^k(p_i^*)| = p_i^*.$$

در این صورت داریم $m_1p_1^* + \cdots + m_sp_s^* = p_1 + \cdots + p_r$. هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$X(p_i^*) := \bigcup_{k=1}^{m_i} X^k(p_i^*).$$

در نتیجه داریم

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} X(p_i^*).$$

فرض کنیم H زیرگروهی از گروه خودریختی‌های گراف $K_{p_1,\ldots,p_r}$ باشد که رأس x_0 را ثابت نگه می‌دارد. در این صورت دیده می‌شود که جبر–گروه $\mathbb{C}H$ روی فضای برداری V عمل می‌کند. این یعنی V ساختار $\mathbb{C}H$–مدولی نیز دارد. چون عناصر جبر $T(x_0)$ با عناصر $\mathbb{C}H$ جابه‌جا می‌شوند، داریم:

$$T(x_0) \subseteq \mathrm{End}_H(V)$$

که در آن $\mathrm{End}_H(V)$ جبر مرکزساز $\mathbb{C}H$ است، یعنی زیرجبری از جبر تبدیلات خطی فضای برداری V که با عناصر جبر $\mathbb{C}H$ در عمل روی عناصر V جابه‌جا می‌شود.
در سرتاسر این مقاله منظور از A ماتریس مجاورت گراف است و اگر دو رأس x و y به یکدیگر وصل باشند، آن‌ها را با نماد xy نمایش می‌دهیم. ترانهاده‌ی بردار مفروض u را با نماد u^t نمایش خواهیم داد. تمام فضاهای برداری مختلط‌اند.

۲ مدول استاندارد جبر ترویلیگر گراف چند بخشی

در این بخش از مقاله، به مطالعه‌ی مدول استاندارد جبر ترویلیگر یک گراف چند بخشی در حالت کلی می‌پردازیم و تجزیه‌ی آن را به زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر نمایش می‌دهیم. از این پس هر رأس u از گراف را با بردار نظیرش در مدول استاندار جبر ترویلیگر گراف به‌طور یکسان نشان می‌دهیم. از این پس u را برای نمایش برداری مدول استاندارد استفاده می‌کنیم، یعنی درایه‌ی نظیر رأس مورد نظر برابر ۱ و در سایر درایه‌ها ۰ است. به این ترتیب اگر Y زیرمجموعه‌ای از رأسها باشد، حاصل‌جمع بردارهای نظیر واقع در آن را با نماد $\underline{Y}$ نشان می‌دهیم. یعنی $\underline{Y} = \sum_{y\in Y} y$.

لم زیر در یافتن مدول‌های تحویل‌ناپذیر یک‌بعدی کمک‌کننده است و اثبات آن سرراست است.

لم ۱.۲. فرض کنیم Γ یک گراف با دو رأس دلخواه u و v است، که در یکی از شرایط زیر صدق می‌کنند:

- u و v غیرمجاورند و مجموعه‌ی همسایه‌های آن‌ها برابرند.
- u و v مجاور هستند و به‌جز خودشان با رئوسی یکسان مجاورند.

در این‌صورت مدول تولید شده توسط بردار $u - v$ تحویل‌ناپذیر است.

با توجه به این‌که در گراف $K_{p_1,\dots,p_r}$ فاصله‌ی هر دو رأس حداکثر ۲ است، با انتخاب رأس مبنا x_0 برای جبر ترویلیگر گراف، مجموعه‌ی رأس‌ها، X، به سه زیرمجموعه بر حسب فاصله تا x_0 افراز می‌شود.

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \qquad X_i = \{y \in X | d(x_0, y) = i\}$$

هم‌چنین فرض بر این است که همواره برای رأس مبنا یعنی x_0 داریم $x_0 \in X^1(p_1^*)$.
به این ترتیب با فرض $m_1 \neq 1$ داریم:

$$X_0 = \{x_0\} \qquad X_1 = \bigcup_{i=1}^{s}\bigcup_{k=2}^{m_i} X^k(p_i^*) \qquad X_2 = X^1(p_1^*) - \{x_0\}.$$

و برای $m_1 = 1$ داریم:

$$X_1 = \bigcup_{i=2}^{s}\bigcup_{k=1}^{m_i} X^k(p_i^*).$$

در ادامه می‌خواهیم $\dim(W_0 \bigcap V_i^*)$ را برای $i = 0, 1, 2$ محاسبه کنیم که در آن V_i^* زیرفضای تولیدشده توسط بردارهای واقع در X_i است.

قبل از شروع، تعریف می‌کنیم $\underline{X}_1(p_1^*) := \underline{X}(p_1^*) - \underline{X}^1(p_1^*)$.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $W_0 = Tx_0$ زیرمدول اصلی جبر ترویلیگر گراف چند بخشی کامل باشد. در این صورت

الف اگر $m_1 \neq 1$، آن‌گاه

$$W_0 = Span\{x_0, \underline{X}_2, \underline{X}_1(p_1^*), \underline{X}(p_i^*) \quad | \quad i = 2, \dots, s\}$$

و

$$\dim(W_0) = s + 2,$$

و اگر $m_1 = 1$، آن‌گاه

$$W_0 = Span\{x_0, \underline{X}_2, \underline{X}(p_i^*) \quad | \quad i = 2, \dots, s\}$$

و

$$\dim(W_0) = s + 1.$$

ب سایر T–زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر V یک‌بعدی‌اند.

اثبات. اگر x هر رأسی دلخواه از گراف باشد، در این صورت

$$Ax = \sum_{y x} y.$$

داریم:

$$Ax_0 = \underline{X}_1 = \underline{X}_1(p_1^*) + \sum_{i=2}^{s} \underline{X}(p_i^*).$$

با فرض $m_1 \neq 1$ داریم:

$$W_0 = Tx_0 \subseteq Span\{x_0, \underline{X}_2, \underline{X}_1(p_1^*), \underline{X}(p_i^*) | i = 2, \ldots, s\}.$$

از طرفی

$$\begin{aligned} &A\underline{X}(p_i^*) = m_i p_i^* \mathbf{1} - p_i^* \underline{X}(p_i^*), \qquad i = 2, \ldots, s. \\ &A(\underline{X}_1(p_1^*)) = (m_1 - 1)p_1^* \mathbf{1} - p_1^* \underline{X}(p_1^*) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

به ازای هر عدد طبیعی k خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &A^k \underline{X}(p_i^*) = a(i)_k \mathbf{1} + (-1)^k (p_i^*)^k \underline{X}(p_i^*), \qquad i = 2, \ldots, s \\ &A^k(\underline{X}_1(p_1^*)) = b_k \mathbf{1} + (-1)^k (p_1^*)^k \underline{X}_1(p_1^*) \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که در آن $a(i)_k$ها و b_k ها عناصری در $T(x_0)$اند. این بدان معنی است که

$$A^k \sum_{i=2}^{s} \underline{X}(p_i^*) = \sum_{i=2}^{s} a(i)_k \mathbf{1} + (-1)^k \sum_{i=2}^{s} (p_i^*)^k \underline{X}(p_i^*).$$

در نتیجه

$$A^k(\underline{X}_1(p_1^*) + \sum_{i=2}^{s} \underline{X}(p_i^*)) = c_k \mathbf{1} + (-1)^k((p_1^*)^k \underline{X}_1(p_1^*) + \sum_{i=2}^{s} (p_i^*)^k \underline{X}(p_i^*)).$$

که در آن c_kها عناصری از $T(x_0)$اند. به‌طور معادل داریم:

$$A^k \underline{X}_1 = c_k \mathbf{1} + (-1)^k((p_1^*)^k \underline{X}_1(p_1^*) + \sum_{i=2}^{s} (p_i^*)^k \underline{X}(p_i^*)).$$

از رابطه‌ی اخیر و توجه به این مطلب که

$$\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)^t = x_0 + Ax_0 + E_2^* A^2 x_0 \in W_0$$

بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$(p_1^*)^k \underline{X}_1(p_1^*) + \textstyle\sum_{i=2}^{s} (p_i^*)^k \underline{X}(p_i^*) \in W_0. \tag{۳.۲}$$

حال T–مدول خارج قسمتی $\dfrac{V}{W_0}$ را در نظر می‌گیریم. تصویر همریخت عضوی چون a در V را با نماد $\widehat{a}$ در $\dfrac{V}{W_0}$ نشان می‌دهیم. بنابراین رابطه‌ی ۳.۲ بیان می‌کند که

$$p_1^{*k} \widehat{\underline{X}_1(p_1^*)} + \textstyle\sum_{i=2}^{s} p_i^{*k} \widehat{\underline{X}(p_i^*)} = 0. \tag{۴.۲}$$

چون $p_1^*, \dots, p_s^*$ اعداد طبیعی متمایزاند، بنابر قانون دترمینان ماتریس واندرموند داریم:

$$\widehat{\underline{X}_1(p_1^*)} = 0, \qquad \widehat{\underline{X}(p_i^*)} = 0, \qquad i = 2, \dots, s.$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\underline{X}_1(p_1^*) \in W_0, \qquad \underline{X}(p_i^*) \in W_0, i = 2, \dots, s.$$

از طرفی به‌راحتی می‌توان دید که

$$E_2^* A^2 x_0 = \underline{X}_2$$

و در نتیجه

$$\underline{X}_2 \in W_0.$$

برای تکمیل اثبات در قسمت الف، برای فرض $m_1 \neq 1$ کافی است توجه کنیم مجموعه‌ی

$$\{x_0, \underline{X}_2, \underline{X}_1(p_1^*), \underline{X}(p_i^*) \quad | \quad i = 2, \dots, s\}$$

یک مجموعه‌ی متعامد از بردارها است که در نتیجه مستقل خطی‌اند، در نتیجه

$$\dim(W_0) = s + 2.$$

با استدلالی مشابه بالا به‌راحتی دیده می‌شود که برای فرض $m_1 = 1$ داریم:

$$\dim(W_0) = s + 1.$$

ب) فرض کنیم $(i, k) \neq (1, 1)$ و $u, v \in X^k(p_i^*)$ رأس‌های متمایزی‌اند. در این‌صورت زیرفضای تک‌بعدی تولیدشده توسط $u - v$ تحت عمل ماتریس‌های A و E_0^*, E_1^*, E_2^* پایا است، زیرا داریم:

$$A(u - v) = 0, E_0^*(u - v) = 0, E_1^*(u - v) = u - v, E_2^*(u - v) = 0$$

.

به‌عبارت دیگر $T(u - v)$ یک T-زیرمدول تحویل‌ناپذیر است. بدین ترتیب زیرمدول‌های تک‌بعدی $Y_j(i, k)$ با ساختاری که در بالا شرح داده شد وجود دارند که

$$\mathbb{C}X^k(p_i^*) = \underline{X}^k(p_i^*) \oplus \bigoplus_{j=1}^{p_i^*-1} Y_j(i, k).$$

با توجه به عمل تعریف‌شده روی $Y_j(i, k)$ به‌راحتی می‌توان دید به ازای همه‌ی i, j, k ها این زیرمدول‌ها یکریخت‌اند.
حال اگر قرار دهیم

$$H(i, k) := \bigoplus_{j=1}^{p_i^*-1} Y_j(i, k),$$

آن‌گاه $\dim H(i, k) = (p_i^* - 1)$.
حال با فرض $m_1 \neq 1$ داریم:

$$F := \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{k=2}^{m_i} H(i, k) \oplus \bigoplus_{i=2}^{s} H(i, 1)$$

و اگر $m_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$F := \bigoplus_{i=2}^{s} \bigoplus_{k=1}^{m_i} H(i, k),$$

در هر دو حالت دیده می‌شود که
$$\dim(F) = n - p_1^* - r + 1.$$
جهت ادامه‌ی جستجو برای سایر زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر، می‌توان بررسی نمود که برای $(i,k) \neq (1,1)$ عمل $T(x_0)$ روی بردارهای $\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{l} A(\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)) = (p_i^* - p_j^*)\mathbf{1} - p_i^*\underline{X}^k(p_i^*) + p_j^*\underline{X}^{k'}(p_j^*), \\ E_0^*(\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)) = 0 \\ E_1^*(\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)) = \underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*) \\ E_2^*(\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)) = 0. \end{array} \tag{۵.۲}$$

در نتیجه $i=j$ اگر و تنها اگر زیرفضای برداری تک‌بعدی تولیدشده توسط $\underline{X}^k(p_i^*) - \underline{X}^{k'}(p_j^*)$ یک T–زیرمدول تحویل‌ناپذیر است.
با فرض $m_1 \neq 1$ و قراردادن
$$Z(i,k) := \underline{X}^1(p_i^*) - \underline{X}^k(p_i^*)$$
دیده می‌شود که زیرفضای
$$Z(i) := \bigoplus_{k=2}^{m_i} Z(i,k), \qquad i = 1, \dots s$$
مجموع مستقیم زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر یکریخت است. همچنین همه‌ی چنین T–زیرمدول‌هایی از V متعامدند و نیز با توجه به عمل تعریف‌شده در رابطه‌ی ۵.۲، یکریخت‌اند. اگر $i \neq 1$ آن‌گاه،

$$\dim Z(i) = m_i - 1$$

در غیر این صورت
$$\dim Z(1) = m_1 - 2.$$

به این ترتیب s نوع زیر مدول تحویل‌ناپذیر غیر یکریخت حاصل می‌شود که دوبه‌دو متعامدند. بعد فضای برداری تولیدشده توسط همه‌ی چنین زیرمدولهایی برابر خواهد بود با

$$m_1 + \cdots + m_s - s - 1 = r - s - 1.$$

اگر $m_1 = 1$، آن‌گاه
$$Z(i) := \bigoplus_{k=2}^{m_i} Z(i,k), \qquad i = 2, \dots s.$$
به این ترتیب $s-1$ نوع زیرمدول تحویل‌ناپذیر غیر یکریخت حاصل می‌شود که دوبه‌دو متعامدند. بعد فضای برداری تولید شده توسط همه‌ی چنین زیرمدول‌هایی برابر خواهد بود با
$$m_2 + \cdots + m_s - s - 1 = r - s.$$
بدین ترتیب آن‌چه تا کنون حاصل شده است بر حسب این‌که $m_1 \neq 1$ یا $m_1 = 1$ به ترتیب تجزیه‌های زیر را داریم:

$$V_1^* = \bigoplus_{i=1}^{s} Z(i) \oplus F \oplus (w_0 \cap V_1^*)$$

یا

$$V_1^* = \bigoplus_{i=2}^{s} Z(i) \oplus F \oplus (w_0 \cap V_1^*)$$

و در نتیجه در هر دو حالت

$$\dim V_1^* = n - p_1^*$$

تایید می‌شود.
حال فرض کنیم $(i,k)=(1,1)$ و $u,v\in X^1(p_1^*)$ رأس‌های متمایزی باشند. به‌عبارت دیگر $u,v\in X_2$. در این صورت زیرفضای تک‌بعدی تولیدشده توسط $u-v$ تحت عمل ماتریس‌های A و E_0^*,E_1^*,E_2^* پایا است، زیرا

$$A(u-v)=0,E_0^*(u-v)=0,E_1^*(u-v)=,E_2^*(u-v)=u-v$$

به‌عبارت دیگر $T(u-v)$ یک T-زیرمدول تحویل‌ناپذیر است. بدین ترتیب زیرمدول‌های تک‌بعدی $L(i)$ با ساختاری که در بالا شرح داده شد وجود دارند که

$$\mathbb{C}X_2=\underline{X}_2\oplus\bigoplus_{i=1}^{p_1^*-2}L(i).$$

با توجه به عمل تعریف‌شده روی $L(i)$ به‌راحتی می‌توان دید که همه‌ی چنین زیرمدول‌هایی یکریخت‌اند.
بدین ترتیب با توجه به دو قسمت الف و ب و قراردادن

$$L:=\bigoplus_{i=1}^{p_1^*-2}L(i)$$

تجزیه‌ی متعامد مدول استاندارد V را برحسب مولفه‌های همگن آن بر حسب این‌که $m_1\neq 1$ یا $m_1=1$ به‌ترتیب به یکی از دو صورت زیر است:

$$V=W_0\oplus\bigoplus_{i=1}^{s}Z(i)\oplus F\oplus L,$$

$$V=W_0\oplus\bigoplus_{i=2}^{s}Z(i)\oplus F\oplus L.$$

□

آن‌چه از قضیه‌ی فوق حاصل شد بیان می‌کند که اگر رأس مبنا در بخشی باشد که چندگانگی آن یعنی m_i یک است، آن‌گاه تعداد زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر تا حد یکریختی برابر است با $S+1$، در غیر این صورت برابر است با$S+2$.
از آن‌جا که زیرمدول اصلی تحت عمل ماتریس مجاورت پایا است، برخی از مقادیر ویژه A در آن ظاهر می‌شود. مطالعه درباره‌ی مقادیر ویژه‌ی این گراف هم‌چنان مورد توجه است.

فهرست منابع

[1] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme I*, J. Algebraic Comb., **1** (1992), 363–388.

[2] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme II*, J. Algebraic Comb., **2** (1993) 73–103.

[3] P. Terwilliger, *The subconstituent algebra of an association scheme III*, J. Algebraic Comb., **3** (1993) 177–210.

[4] P. Terwilliger, *Algebraic Graph Theory*, unpublished lecture notes taken by H.Suzuki.

[5] P. Terwilliger, Arjana Zitnik, *The quantum adjacency algebra and subconstituent algebra of a graph*, J. Comb. Theory, Ser. A 166 (2019) 297–314.

Terwilliger algebras of complete multipartite graphs

Masoud Karimi [†] , Elham Tafazoli

Department of Mathematics, Bojnourd Branch, Islamic Azad University, Bojnourd, Iran

Communicated by: Saeid Alikhani

Received: 2022/4/15 Accepted: 2022/10/23

Abstract: Let $\Gamma = K_{p_1,\dots,p_r}$ be complete multipartite graph and x_0 be a fix vertex. Let T be Terwilliger algebra of Γ with base point x_0. In this paper, we study the modular structure of this algebra and it will be shown that up to isomorphism there are either $s + 2$ or $s + 3$ irreducible modules in which s is the number of distinct numbers in $p_1, \dots, p_r$. Along with other results, the dimensions of these modules will be computed as complex vector spaces.

Keywords: Complete multipartite graph, Terwilliger algebra, Semi simple algebra.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: karimimth@yahoo.com (M. Karimi), tafazoli.elham@gmail.com (E. Tafazoli).