مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۴۳۷-۴۴۷

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.41194.2053

مدول‌های α-کوتاه موازی

سیدمالک جاودان نژاد [۱]، نسرین شیرعلی [۲،×]، مریم شیرعلی [۲]، سیده فاطمه موسوی نسب [۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: البرز آذرنگ

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱۰

چکیده:
R-مدول M را α-کوتاه موازی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} \leqslant \alpha$ یا $\text{pn-dim}\,N \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. با استفاده از این مفهوم، ویژگی‌های اساسی مدول‌های α-کوتاه را به مدول‌های α-کوتاه موازی تعمیم می‌دهیم. همچنین ارتباط ویژگی α-کوتاه موازی بودن مدول‌ها را با بعد نویتری موازی آن‌ها بررسی کرده و نشان می‌دهیم که اگر M یک مدول α- کوتاه موازی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری موازی است و $\alpha \leqslant \text{pn-dim}\,M \leqslant \alpha + ۱$. علاوه بر این، ثابت می‌کنیم که اگر M یک مدول α-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری است و $\alpha \leq \text{n-dim}\,M \leq \alpha + ۱$.

واژه‌های کلیدی: بعد نویتری موازی، مدول‌های α-کوتاه موازی، مدول‌های α-اتمی موازی، مدول‌های α-تقریباً نویتری موازی.

رده‌بندی ریاضی: 16P60; 16P20 ; 16P40

۱ مقدمه

مفهوم بعد کرول ابتدا توسط رنچلر و گابریل [۸] برای اعداد طبیعی تعریف و سپس توسط کراس [۶] برای هر عدد ترتیبی، به مدول‌ها روی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر تعمیم داده شد. دوگان این مفهوم یعنی بعد نویتری، نیز به‌طور تقریباً همزمان توسط کرمزاده [۳] و لمونیه [۷] معرفی و مورد بررسی قرار گرفت و این دو از مهم‌ترین زمینه‌های پژوهشی حلقه‌های تعویض‌ناپذیرند. البته لازم‌به‌ذکر است که در زمینه بعد نویتری، اهم پژوهش‌های انجام‌شده توسط کرمزاده و شاگردانش در دانشگاه شهید چمران اهواز بوده است و این مقاله نیز پژوهش دیگری در همین زمینه است. بیلهان و اسمیت [۱]، مدول M را کوتاه نامیدند، هرگاه برای هر زیرمدول N، N یا $\frac{M}{N}$ نویتری باشد و نشان دادند که هر مدول کوتاه دارای بعد گلدی متناهی است. به‌علاوه، هر مدول کوتاه، نویتری یا تقریباً نویتری است. کرمزاده و همکاران [۲] با تعمیم این

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: shirali_n@scu.ac.ir (N.Shirali)

مفهوم، به‌ازای هر عدد ترتیبی α، مدول α–کوتاه را تعریف کرده و مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مدول M را α–کوتاه نامیدند، هرگاه برای هر زیرمدول N، $\text{n-dim}\, N \leq \alpha$ یا $\text{n-dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$ و α با این خاصیت کوچک‌ترین عدد ترتیبی باشد. آن‌ها ضمن این تعمیم، همه نتایج [۱] را به‌عنوان حالت خاص به‌دست آوردند. به‌ویژه نشان دادند که هر مدول α– کوتاه دارای بعد نویتری α یا $\alpha + ۱$ است و در نتیجه اگر M یک مدول α– کوتاه و α یک عدد ترتیبی شمارا باشد، آن‌گاه هر زیرمدول M شماراتولیدشده است. هم‌چنین نشان دادند که اگر R یک حلقه نیم‌اول باشد که حلقه بخشی نیست، آن‌گاه برای هر عدد ترتیبی $\alpha \geq ۰$، R یک حلقه α– کوتاه است اگر و تنها اگر بعد نویتری برابر با α داشته باشد. R–مدول‌های A و B را متعامد نامیده و با $A \perp B$ نمایش می‌دهیم، هر گاه دارای زیرمدول‌های ناصفر یکریخت نباشند. هم‌چنین مدول‌های A و B را موازی نامیده و با $A \parallel B$ نمایش می‌دهیم، هرگاه هیچ زیرمدول ناصفری از یکی از این دو با دیگری متعامد نباشد. مدول M را اتمی می‌نامیم، چنان‌چه تمام زیرمدول‌هایش با یکدیگر موازی باشند و در این صورت تمام زیرمدول‌هایش با M موازی‌اند. توجه کنیم که این مدول‌ها با مدول‌های اتمی تعریف‌شده [۴] متفاوت‌اند. به‌آسانی دیده می‌شود که همه مدول‌های یکنواخت، اتمی‌اند و در مثال ۳.۲ از [۹] نشان داده شده است که عکس آن در حالت کلی درست نیست. شیرعلی و هم‌کارش [۹]، بعد کرول موازی M را که همان بعد کرول روی مجموعه‌ی زیرمدول‌های موازی با مدول M است، تعریف کرده و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. می‌دانیم که آرتینی (نویتری) بودن یک مدول، مستلزم نویتری (آرتینی) بودن آن نیست، ولی وجود بعد کرول و بعد نویتری برای یک مدول هم‌ارزند. بعد نویتری موازی یک مدول نیز همان مفهوم بعد نویتری روی مجموعه‌ی زیرمدول‌های موازی با آن است و دوری مدول‌های موازی را از نویتری بودن اندازه‌گیری می‌کند. این بعد، دوگان بعد کرول موازی است در [۹] نشان داده شده است که مدول‌های اساسی، موازی‌اند و از آن‌جایی که از بحث پیرامون زیرمدول‌های اساسی به بعد گلدی مدول می‌رسیم، در این مقاله تقریباً مشابه با [۹] نشان می‌دهیم که یک مدول با بعد گلدی متناهی، دارای بعد نویتری موازی است اگر و تنها اگر دارای بعد نویتری باشد. هم‌چنین مفهوم α–کوتاه موازی را مطرح کرده و به بررسی ویژگی‌ها و ارتباط آن با بعد نویتری موازی یک مدول می‌پردازیم. در سراسر این مقاله حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار و مدول‌ها یکانی راست‌اند. بعد نویتری، بعد نویتری موازی و بعد گلدی مدول M را به‌ترتیب با $\text{n-dim}\, M$، $\text{pn-dim}\, M$ و $\text{G-dim}\, M$ نمایش می‌دهیم.

۲ بعد نویتری موازی مدول‌ها

در [۹] بعد کرول موازی مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است. در این بخش به بررسی دوگان بعد کرول موازی؛ یعنی، بعد نویتری موازی پرداخته و قضایایی تقریباً مشابه با بعد کرول موازی را برای آن بیان می‌کنیم که در بخش بعد برای مدول‌های α–کوتاه موازی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۲. R–مدول‌های A و B را متعامد نامیده و با $A \perp B$ نمایش می‌دهیم هرگاه دارای زیرمدول‌های ناصفر یکریخت نباشند. هم‌چنین R–مدول‌های C و D را موازی می‌گوییم و با $C \parallel D$ نشان می‌دهیم، هرگاه $۰ \neq D_۱ \subseteq D$ وجود نداشته باشد که $C \perp D_۱$ و هم‌چنین $۰ \neq C_۱ \subseteq C$ وجود نداشته باشد که $C_۱ \perp D$. به‌عبارت دیگر، برای هر $۰ \neq C_۱ \subseteq C$، $۰ \neq aR \subseteq C_۱$ و $۰ \neq bR \subseteq D$ وجود داشته باشند به‌طوری که $aR \cong bR$. هم‌چنین برای هر $۰ \neq D_۱ \subseteq D$، $۰ \neq aR \subseteq C$ و $۰ \neq bR \subseteq D_۱$ وجود داشته باشند به‌طوری که $aR \cong bR$.

یادآوری می‌کنیم که N یک زیرمدول اساسی در M است، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر K از M، $N \cap K \neq ۰$ و در این صورت می‌نویسیم $N \underset{e}{\subseteq} M$.

در لم زیر برخی از ویژگی‌های مهم زیرمدول‌های موازی با یک مدول را یادآوری می‌کنیم. خواننده می‌تواند برای جزئیات بیش‌تر به به لم ۲.۲ از [۹] مراجعه کند.

لم ۲.۲. اگر A، B و C زیرمدول‌های R–مدول M باشند، آن‌گاه احکام زیر برقرارند.

۱. $A \| A$.

۲. $A \| B$ اگر و تنها اگر $B \| A$.

۳. اگر $A \underset{e}{\subseteq} M$، آن‌گاه $A \| M$.

۴. اگر برای هر $a \in A \setminus \{۰\}$ و $b \in B \setminus \{۰\}$، $aR \| bR$، آن‌گاه $A \| B$.

۵. اگر $A \| B$ و $B \cong C$، آن‌گاه $A \| C$.

۶. اگر $A \| B$ و $B \| C$، آن‌گاه $A \| C$.

۷. اگر $A \subseteq B \subseteq C$ به طوری که $A||C$، آن‌گاه $A||B$.

۸. هرگاه A و B با M موازی باشند و $A \cap B \neq 0$، آن‌گاه $A \cap B||M$.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. بعد نویتری موازی M را در صورت وجود با $\text{pn-dim}\, M$ نشان داده و با استقرای ترامتناهی تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\text{pn-dim}\, M = -1$ اگر و تنها اگر $M = 0$ و برای هر عدد ترتیبی $\alpha \geqslant 0$، $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ هرگاه $\text{pn-dim}\, M \not< \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های موازی با M، $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \geqslant t$، $\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} < \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. در حالت خاص، بعد نویتری موازی حلقه R را بعد نویتری موازی R-مدول راست R در نظر می‌گیریم. چنان‌که عدد ترتیبی α موجود نباشد که $\text{pn-dim}\, M = \alpha$، گوییم M دارای بعد نویتری موازی نیست.

بنا بر تعریف، $\text{pn-dim}\, M = 0$ اگر و تنها اگر M دارای شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های موازی خود باشد. به‌ویژه اگر M دارای شرط زنجیر صعودی روی زیرمدول‌های موازی خود باشد، آن‌گاه هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های اساسی M نیز ایستا است. همچنین، واضح است که برای هر مدول اتمی M، $\text{pn-dim}\, M = \text{n-dim}\, M$، در صورتی که یکی از آن‌ها وجود داشته باشد.

اکنون به بررسی ارتباط بعد نویتری موازی یک مدول با بعد نویتری موازی زیرمدول‌ها و مدول‌های خارج‌قسمتی از آن مدول می‌پردازیم.

لم ۴.۲. اگر M یک R-مدول با بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول N موازی با M نیز دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, N \leqslant \text{pn-dim}\, M$.

اثبات. بنا بر بند (۶) از لم ۲.۲، هر زنجیر از زیرمدول‌های موازی با N یک زنجیر از زیرمدول‌های موازی با M است. بنابراین N نیز دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, N \leqslant \text{pn-dim}\, M$. $\square$

لم ۵.۲. اگر M یک R-مدول با بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leqslant \text{pn-dim}\, M$.

اثبات. فرض کنیم $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ و $\frac{M_0}{N} \subseteq \frac{M_1}{N} \subseteq \frac{M_2}{N} \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با $\frac{M}{N}$ باشد. بنا بر بند (۷) از لم ۲.۲، $N \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M است. لذا $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $i \geqslant t$، $\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}/N}{M_i/N} = \text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} < \alpha$. بنابراین $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$. $\square$

گزاره ۶.۲. اگر هر زیرمدول سره موازی با M دارای بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه M نیز بعد نویتری موازی دارد و

$$\text{pn-dim}\, M \leqslant \sup\{\text{pn-dim}\, N : N||M\} + 1.$$

اثبات. چون تمام زیرمدول‌های موازی با M یک مجموعه تشکیل می‌دهند، پس $sup\{\text{pn-dim}\, N : N||M\}$ وجود دارد و لذا می‌توانیم آن را α در نظر بگیریم. حال فرض کنیم $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M باشد. بنا بر فرض، برای هر i، M_i دارای بعد نویتری موازی است و بنا بر لم ۵.۲، برای هر i، بعد نویتری موازی $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ وجود دارد و $\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} \leqslant \text{pn-dim}\, M_{i+1} \leqslant \alpha$. بنابراین M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, M \leqslant \alpha + 1$. $\square$

گزاره ۷.۲. اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری موازی است و

$$\text{pn-dim}\, M = \sup\{\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} : N||M\}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} : N||M\}$. فرض کنیم $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq \cdots$ یک زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های موازی با M باشد. بنابراین $\frac{M_2}{M_1} \subseteq \frac{M_3}{M_1} \subseteq \cdots$ یک زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های $\frac{M}{M_1}$ است. $\frac{N}{M_1} \subseteq \frac{M}{M_1}$ وجود دارد به‌طوری که $\frac{N}{M_1} \oplus \frac{M_2}{M_1} \subseteq_e \frac{M}{M_1}$ و در این صورت بنا بر لم ۲.۲، $\frac{N}{M_1} \oplus \frac{M_2}{M_1} || \frac{M}{M_1}$ و در نتیجه $\frac{N}{M_1} \oplus \frac{M_2}{M_1} \subseteq \frac{N}{M_1} \oplus \frac{M_3}{M_1} \subseteq \cdots$ یک زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های موازی با $\frac{M}{M_1}$ است. چون برای هر $i \geq 1$، $\frac{M_{i+1}}{M_i} \simeq \frac{M_{i+1}/M_1 \oplus N/M_1}{M_i/M_1 \oplus N/M_1}$، بنابراین عدد طبیعی m وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq m$

$$\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} = \text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}/M_1 \oplus N/M_1}{M_i/M_1 \oplus N/M_1} < \text{pn-dim}\, \frac{M}{M_1}.$$

لذا برای هر $i \geq m$، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ دارای بعد نویتری موازی است، پس M دارای بعد نویتری موازی است. ازاین‌رو $\text{pn-dim}\, M \leq \alpha \leq \text{pn-dim}\, \frac{M}{M_1}$ اما بنا بر لم ۵.۲، $\text{pn-dim}\, M \geq \alpha$. بنابراین

$$\text{pn-dim}\, M = \sup\{\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} : N||M\}.$$

$\square$

گزاره ۸.۲. اگر M یک مدول با بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{G-dim}\frac{M}{N} < \infty$.

اثبات. با توجه به گزاره ۳.۴ از [۹]، اگر M دارای بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه دارای بعد کرول موازی است. حال بنا بر گزاره ۹.۳ از [۹]، برای هر زیرمدول N موازی M داریم $\text{G-dim}\, \frac{M}{N} < \infty$. $\square$

در قضیه بعد، رابطه بین وجود بعد نویتری و بعد نویتری موازی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۹.۲. مدول M دارای بعد نویتری است اگر و تنها اگر دارای بعد نویتری موازی با بعد گلدی متناهی باشد و در این صورت $\text{pn-dim}\, M = \text{n-dim}\, M$.

اثبات. اگر $\text{n-dim}\, M$ موجود باشد، آن‌گاه $\text{G-dim}\, M$ متناهی است. با استقرا روی $\text{n-dim}\, M = \alpha$ نشان می‌دهیم که M دارای بعد نویتری موازی است. برای $\alpha = 0$ حکم واضح است. حال فرض کنیم $\alpha > 0$ و حکم برای مدول‌های با بعد نویتری از هر عدد ترتیبی $\gamma < \alpha$ برقرار باشد. همچنین فرض کنیم $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ زنجیری از زیرمدول‌های موازی با M باشد. چون $\text{n-dim}\, M = \alpha$ پس $n \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $i \geq n$، $\text{n-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} < \alpha$. بنا بر فرض استقرا، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} = \text{n-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} < \alpha$. بنابراین M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, M \leq \alpha = \text{n-dim}\, M$. برای اثبات تساوی، کافی است عکس آن را ثابت کنیم و نشان دهیم که $\text{n-dim}\, M \leq \text{pn-dim}\, M$. برای این منظور، با استقرا روی $\text{pn-dim}\, M = \beta$ عمل می‌کنیم. اگر $\beta = 0$ و $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ زنجیری از زیرمدول‌های M باشد، آن‌گاه با توجه به متناهی بودن بعد گلدی M، عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $i \geq k$، $M_i \parallel M_k$. حال مشابه اثبات گزاره ۷.۲، می‌توان زنجیری از زیرمدول‌های موازی با $\frac{M}{M_k}$ ساخت و چون $\text{pn-dim}\, \frac{M}{M_k} \leq \text{pn-dim}\, M = 0$، این زنجیر می‌ایستد. اکنون فرض کنیم $\beta > 0$ و حکم برای هر عدد ترتیبی $\gamma < \beta$ صادق است. اگر $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ زنجیری نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد، آن‌گاه زیرمدول N در M وجود دارد به طوری که $N \oplus M_1 \parallel M$ و $N \oplus M_1 \subseteq N \oplus M_2 \subseteq N \oplus M_3 \subseteq \cdots$ زنجیری از زیرمدول‌های موازی با M است. بنابراین برای هر i، $\text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} = \text{pn-dim}\, \frac{N \oplus M_{i+1}}{N \oplus M_i} < \beta$. بنا بر فرض استقرا، $\text{n-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} \leq \text{pn-dim}\, \frac{M_{i+1}}{M_i} < \beta$ و لذا $\text{n-dim}\, M \leq \beta = \text{pn-dim}\, M$. بنابراین $\text{n-dim}\, M = \text{pn-dim}\, M$. $\square$

بنا بر قضیه قبل، لم ۵.۲ و گزاره ۸.۲، نتیجه بعد به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۰.۲. اگر M دارای بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\frac{M}{N}$ بعد نویتری دارد.

گزاره ۱۱.۲. اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نویتری موازی است.

اثبات. فرض کنیم $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M باشد. اگر $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $\frac{M}{M_k}$ دارای بعد نویتری موازی است، آن‌گاه بنا بر گزاره ۸.۲ و قضیه ۹.۲، $\frac{M}{M_k}$ دارای بعد نویتری است. لذا برای هر $t \geqslant k$، $\text{n-dim}\, \frac{M_{t+1}}{M_t} = \text{n-dim}\, \frac{M_{t+1}/M_k}{M_t/M_k} \leqslant \text{n-dim}\, \frac{M_{t+1}}{M_k} \leqslant \text{n-dim}\, \frac{M}{M_k}$. بنابراین برای هر $t \geqslant k$، $\frac{M_{t+1}}{M_t}$ دارای بعد نویتری است. بنا بر قضیه ۹.۲، $\frac{M_{t+1}}{M_t}$ دارای بعد نویتری موازی است، لذا بعد نویتری موازی M وجود دارد. در غیر این صورت برای هر n، M_n دارای بعد نویتری موازی است. بنا بر لم ۵.۲، برای هر i، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ بعد نویتری موازی دارد. بنابراین M نیز دارای بعد نویتری موازی است. $\square$

نتیجه ۱۲.۲. اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، N بعد نویتری موازی یا $\frac{M}{N}$ بعد نویتری داشته باشد، آن‌گاه M بعد نویتری موازی دارد.

تذکر ۱۳.۲. مدول‌های اتمی لزوماً بعد نویتری موازی ندارند. به‌عنوان مثال، $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول یکنواخت و لذا اتمی است و $\text{G-dim}\, \mathbb{Q} = 1$. اما بعد نویتری موازی ندارد؛ زیرا در غیر این صورت بنا بر قضیه قبل، $\mathbb{Q}$ باید بعد نویتری داشته باشد و این تناقض است.

در ادامه این مقاله، اشتراک همه زیرمدول‌های موازی با مدول M را با نماد $T(M)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که اگر $T(M)=M$، آن‌گاه M زیرمدول اساسی سره ندارد. به‌عبارت دیگر M نیم‌ساده است.

گزاره **۱۴.۲.** فرض کنیم M یک R-مدول باشد به‌طوری که $T(M)\lneq M$ و $M \parallel T(M)$. در این صورت M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, M=\alpha$ اگر و تنها اگر $\text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)}=\alpha$. به‌علاوه

$$\text{pn-dim}\, M = \text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)} = \sup\{\text{n-dim}\,\frac{M}{N} : N \parallel M\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\text{pn-dim}\, M=\alpha$. بنا بر گزاره ۸.۲، برای هر $N||M$، $\text{G-dim}\,\frac{M}{N}<\infty$. همچنین طبق لم ۵.۲، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی است. پس با توجه به قضیه ۹.۲، $\text{n-dim}\,\frac{M}{N}=\text{pn-dim}\,\frac{M}{N}$. از طرفی $M \parallel T(M)$، بنابراین بعد نویتری $\frac{M}{T(M)}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $\text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)}=\beta$. لذا

$$\beta = \text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)} = \text{pn-dim}\,\frac{M}{T(M)} \le \text{pn-dim}\, M=\alpha.$$

پس $\beta \leqslant \alpha$. حال برای هر زنجیر صعودی $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های موازی با M، زنجیر $\frac{M_1}{T(M)} \subseteq \frac{M_2}{T(M)} \subseteq \frac{M_3}{T(M)} \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های $\frac{M}{T(M)}$ را داریم. اما $\frac{M}{T(M)}$ دارای بعد نویتری است، پس $k\in\mathbb{N}$ به‌گونه‌ای موجود است که برای تمام $i\ge k$، $\text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}/T(M)}{M_i/T(M)}<\beta$ $=\text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}$. بنا بر قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}=\text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}<\beta$. بنابراین $\text{pn-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}<\beta$. در نتیجه $\alpha\le\beta$ و لذا $\alpha=\beta$. با توجه به گزاره ۷.۲، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)} = \text{pn-dim}\, M = \sup\{\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} : N\parallel M\} = \sup\{\text{n-dim}\,\frac{M}{N} : N \parallel M\}.$$

به‌عکس، فرض کنیم $\text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)}=\alpha$. با استقرا روی α نشان می‌دهیم بعد نویتری موازی M وجود دارد. اگر $\alpha=0$، آن‌گاه $\frac{M}{T(M)}$ نویتری است. اکنون چون از هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M، یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های $\frac{M}{T(M)}$ به‌دست می‌آید $\text{pn-dim}\, M=0$. حال فرض کنیم $\alpha>0$ و برای هر $\gamma<\alpha$ ، گزاره برقرارباشد. اگر $M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M باشد، آن‌گاه $\frac{M_1}{T(M)}\subseteq\frac{M_2}{T(M)}\subseteq\cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های $\frac{M}{T(M)}$ است. بنابراین $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد که برای هر $i\ge k$،

$$\text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i} = \text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}/T(M)}{M_i/T(M)} < \text{n-dim}\,\frac{M}{T(M)} = \alpha.$$

بنا بر قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}=\text{n-dim}\,\frac{M_{i+1}}{M_i}<\alpha$ و بنابراین $\text{pn-dim}\, M\le\alpha$. □

یادآوری می‌کنیم که مدول M دارای خاصیت بعد خارج‌قسمتی متناهی $(q.f.d)$ است، هرگاه هر مدول خارج‌قسمتی آن دارای بعد گلدی متناهی باشد. در ادامه به قضیه ۲.۲ [۷] نیاز داریم.

گزاره **۱۵.۲.** برای R-مدول M و عدد ترتیبی $\alpha\geqslant 0$ احکام زیر هم‌ارزند.

۱. M یک R-مدول $q.f.d$ است و برای هر $N\subset P\subseteq M$، زیرمدول X وجود دارد به‌طوری که $N\subseteq X\subset P$ و $\text{n-dim}\,\frac{P}{X}\le\alpha$.

۲. $\text{n-dim}\, M\le\alpha$.

قضیه **۱۶.۲.** اگر M یک R-مدول $q.f.d$ باشد به‌طوری که هر زیرمدول آن، دارای یک مدول خارج‌قسمتی با بعد نویتری موازی حداکثر α باشد. در این صورت $\text{n-dim}\, M\le\alpha$.

اثبات. کافی است نشان دهیم M در بند (۱) از گزاره قبل صدق می‌کند. برای هر $N\subset P\subseteq M$ قرار می‌دهیم $A=\frac{P}{N}$. لذا A دارای مدول خارج‌قسمتی ناصفر مانند $\frac{A}{C}$ است به‌طوری که $\frac{A}{C}$ بعد نویتری موازی دارد. بنابراین $\text{pn-dim}\,\frac{A}{C}\le\alpha$. از طرفی $\text{G-dim}\,\frac{A}{C}<\infty$ و با توجه به قضیه ۹.۲، $\text{n-dim}\,\frac{A}{C}\le\alpha$. بنا بر گزاره بالا، $\text{n-dim}\, M\le\alpha$. □

بنا بر قضیه قبل و نتیجه ۸.۱ از [۵]، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه **۱۷.۲.** فرض کنیم M یک R-مدول $q.f.d$ و α یک عدد ترتیبی شمارا باشد. اگر هر زیرمدول M دارای یک مدول خارج‌قسمتی با بعد نویتری موازی حداکثر α باشد، آن‌گاه هر زیرمدول M شماراتولیدشده است.

۳ مدول‌های α-کوتاه موازی

کرمزاده و هم‌کاران [۲]، مدول‌های α-کوتاه را تعریف کرده و مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که هر مدول α-کوتاه دارای بعد نویتری α یا $\alpha + ۱$ است. در این بخش، ما به بررسی مدول‌های α-کوتاه موازی پرداخته و به تعمیم قضایایی در مرجع [۲]، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. R-مدول M را α-کوتاه موازی گوییم، هرگاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{n-dim}\ \frac{M}{N} \leqslant \alpha$ یا $\text{pn-dim}\ N \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این خاصیت باشد.

بدیهی است که اگر M یک مدول (-۱)-کوتاه موازی باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول موازی سره نیست.

لم ۲.۳. اگر $\text{pn-dim}\ M = \alpha$، آن‌گاه M یک مدول β-کوتاه موازی است به‌طوری که $\beta \leq \alpha$.

اثبات. بنا بر لم ۴.۲، برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{pn-dim}\ N \leq \text{pn-dim}\ M = \alpha$. بنابراین M یک مدول β-کوتاه موازی است به‌طوری که $\beta \leq \alpha$. □

لم ۳.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول موازی با آن نیز یک مدول β-کوتاه موازی است به‌طوری که $\beta \leq \alpha$.

اثبات. فرض کنیم $N||M$. در این صورت اگر $K||N$، آن‌گاه با توجه به لم ۲.۲، $K||M$. پس $\text{n-dim}\ \frac{M}{K} \leq \alpha$ یا $\text{pn-dim}\ K \leq \alpha$. در نتیجه $\text{n-dim}\ \frac{N}{K} \leq \text{n-dim}\ \frac{M}{K} \leq \alpha$ یا $\text{pn-dim}\ K \leq \alpha$. بنابراین N یک مدول β-کوتاه موازی است به‌طوری که $\beta \leq \alpha$. □

لم ۴.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\ M \geq \alpha$.

اثبات. با توجه به فرض، برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{pn-dim}\ N \leq \alpha$ یا $\text{pn-dim}\ \frac{M}{N} \leq \alpha$. بنا بر نتیجه ۱۲.۲، M دارای بعد نویتری موازی است و طبق قضیه ۵.۲ و ۴.۲، $\alpha \leq \text{pn-dim}\ M$. □

با توجه به لم بالا و قضیه ۹.۲، نتیجه زیر به‌راحتی به‌دست می‌آید.

نتیجه ۵.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\ M = \text{n-dim}\ M \geq \alpha$.

نتیجه ۶.۳. مدول M دارای بعد نویتری موازی است اگر و تنها اگر برای یک عدد ترتیبی α، α-کوتاه موازی باشد.

گزاره ۷.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\ M = \alpha$ یا $\text{pn-dim}\ M = \alpha + ۱$.

اثبات. بنا بر لم ۴.۳، $\text{pn-dim}\ M \geq \alpha$. حال اگر $\text{pn-dim}\ M \neq \alpha$، آن‌گاه $\text{pn-dim}\ M \geq \alpha + ۱$. فرض کنیم $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های موازی با M باشد. چون M یک مدول α-کوتاه موازی است، لذا برای هر i، $\text{pn-dim}\ M_i \leqslant \alpha$ یا $\text{n-dim}\ \frac{M}{M_i} \leqslant \alpha$. اگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $\text{n-dim}\ \frac{M}{M_n} \leqslant \alpha$، آن‌گاه برای هر $i \geqslant n$، $\text{n-dim}\ \frac{M_{i+۱}}{M_i} \leq \text{n-dim}\ \frac{M}{M_i} = \text{n-dim}\ \frac{M/M_n}{M_i/M_n} \leq \text{n-dim}\ \frac{M}{M_n} \leq \alpha$. حال بنا بر قضیه ۹.۲،

$$\text{pn-dim}\ \frac{M_{i+۱}}{M_i} = \text{n-dim}\ \frac{M_{i+۱}}{M_i} \leq \text{n-dim}\ \frac{M}{M_n} = \text{pn-dim}\ \frac{M}{M_n} \leq \alpha.$$

در نتیجه $\text{pn-dim}\ M \leq \alpha + ۱$. در غیر این صورت برای هر n، $\text{pn-dim}\ M_n \leq \alpha$. از طرفی همه عناصر این زنجیر، با هم موازی و دارای نویتری موازی‌اند. پس بنا بر لم ۵.۲، برای هر i، $\frac{M_{i+۱}}{M_i}$ دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\ \frac{M_{i+۱}}{M_i} \leq \text{pn-dim}\ M_{i+۱} \leq \alpha$. بنابراین $\text{pn-dim}\ M \leq \alpha + ۱$؛ یعنی، $\text{pn-dim}\ M = \alpha + ۱$. □

با توجه به گزاره ۴.۳ و قضیه ۹.۲، نتیجه به‌دست می‌آید.

نتیجه ۸.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری است و

$$\alpha \leq \text{n-dim}\ M \leq \alpha + ۱.$$

تعریف بعد در [۹] نیز آمده است.

تعریف ۹.۳. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. تعریف می‌کنیم $P_s(M) = \Sigma M_i$ به‌طوری که برای هر i، M_i یک زیرمدول سره موازی با M باشد.

می‌دانیم که هر مدول با بعد گلدی متناهی، یک زیرمدول سره اساسی دارد که بنا بر لم ۲.۲، زیرمدول موازی نیز است. بنابراین اگر M یک R-مدول با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه $P_s(M) \neq 0$. همچنین بنا به تعریف و بند (۷) از لم ۲.۲، $P_s(M)||M$.

لم ۱۰.۳. اگر M یک مدول ۰-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\, P_s(M) = \text{pn-dim}\, M = 0$ و یا زیرمدول سره موازی با M مانند N وجود دارد که $\frac{M}{N}$ نویتری است.

اثبات. فرض می‌کنیم M مدول ۰-کوتاه موازی است. پس برای هر زیرمدول موازی با M مانند N، $\text{pn-dim}\, N \leq 0$ یا $\text{n-dim}\, \frac{M}{N} \leq 0$. اگر برای هر زیرمدول موازی با M مانند N، $\text{pn-dim}\, N \leq 0$، آن‌گاه $N = 0$ یا $\text{pn-dim}\, N = 0$. اما $\text{G-dim} M < \infty$، پس M دارای زیرمدول موازی ناصفر است. بنابراین هر زیرمدول موازی ناصفر با M مانند N، $\text{pn-dim}\, N = 0$. در نتیجه $\text{pn-dim}\, P_s(M) = \text{pn-dim}\, M = 0$. اما اگر زیرمدول موازی با M مانند N وجود داشته باشد به‌طوری که $\text{n-dim}\, \frac{M}{N} \leq 0$، آن‌گاه M زیرمدول موازی سره ندارد یا $\frac{M}{N}$ نویتری است. بنا بر قضیه ۹.۲، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim} \frac{M}{N} = \text{n-dim}\, \frac{M}{N} = 0$ و اثبات تمام است. $\square$

گزاره ۱۱.۳. اگر $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ و α یک عدد ترتیبی حدی باشد، آن‌گاه M یک مدول α-کوتاه موازی است.

اثبات. با توجه به لم ۲.۳، M برای یک $\beta \leqslant \alpha$، یک مدول β-کوتاه موازی است. حال اگر $\beta < \alpha$، با توجه به گزاره ۷.۳، $\text{pn-dim}\, M \leq \beta + 1 < \alpha$ و این تناقض است. بنابراین $\alpha = \beta$. $\square$

گزاره ۱۲.۳. اگر $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ که $\alpha = \beta + 1$، آن‌گاه M یک مدول α-کوتاه موازی یا β-کوتاه موازی است.

اثبات. با توجه به لم ۲.۳، M یک مدول γ-کوتاه موازی به‌طوری که $\alpha \leqslant \gamma$ است. اگر $\beta < \gamma$، آن‌گاه بنا بر گزاره ۷.۳، $\text{pn-dim}\, (M) \leq \gamma + 1 < \beta + 1$ که تناقض است. بنابراین $\beta \leq \gamma \leq \beta + 1 = \alpha$. $\square$

تعریف ۱۳.۳. M را یک مدول α-اتمی موازی گوییم، هرگاه $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ و برای هر زیرمدول سره N موازی با M، $\text{pn-dim}\, N < \alpha$. M را اتمی موازی می‌نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به طوری که M یک مدول α-اتمی موازی باشد. دقت می‌کنیم که یک مدول ۰-اتمی موازی است اگر و تنها اگر زیرمدول موازی نابدیهی نداشته باشد.

گزاره ۱۴.۳. اگر M یک مدول α-کوتاه موازی ناصفر باشد که اتمی موازی نیست، آن‌گاه M شامل یک زیرمدول موازی مانند N است به‌طوری که $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$.

اثبات. چون M اتمی موازی نیست، دارای زیرمدول سره موازی مانند N است که $\text{pn-dim}\, N = \text{pn-dim}\, M$. با توجه به گزاره ۷.۳، $\text{pn-dim}\, M = \alpha$ یا $\text{pn-dim}\, M = \alpha + 1$. اگر $\text{pn-dim}\, M = \alpha$، آن‌گاه با توجه به لم ۲.۵ $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$. حال اگر $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} = \text{pn-dim}\, M = \alpha + 1$، آن‌گاه با توجه به قضیه ۹.۲ و گزاره ۸.۲، $\text{n-dim}\, \frac{M}{N} = \alpha + 1$. بنابراین M یک مدول $\alpha + 1$-کوتاه موازی است و این یک تناقض است. ازاین‌رو $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$. $\square$

گزاره ۱۵.۳. اگر M یک مدول α-اتمی موازی باشد و $\alpha = \beta + 1$، آن‌گاه M یک مدول β-کوتاه موازی است.

اثبات. فرض کنیم N زیرمدول موازی با M باشد. چون M یک مدول α-اتمی موازی است، $\text{pn-dim}\, N < \alpha$. ازاین‌رو $\text{pn-dim}\, N \leq \beta$. لذا M یک مدول γ-کوتاه موازی، برای یک $\gamma \leqslant \beta$ است. حال اگر $\gamma < \beta$، آن‌گاه $\gamma + 1 \leq \beta < \alpha$. اما بنا بر گزاره ۷.۳، $\text{pn-dim}\, M \leq \gamma + 1 \leq \beta < \alpha$ و این یک تناقض است. بنابراین $\gamma = \beta$. $\square$

گزاره ۱۶.۳. اگر $\text{pn-dim}\, M = \alpha + 1$، آن‌گاه M یک مدول α-کوتاه موازی است یا یک زیرمدول N موازی با M وجود دارد به‌طوری که $\text{pn-dim}\, N = \text{n-dim}\, \frac{M}{N} = \alpha + 1$.

اثبات. بنا بر گزاره ۱۲.۳، M یک مدول α-کوتاه موازی یا $\alpha + 1$-کوتاه موازی است. فرض کنیم M مدول α-کوتاه موازی نباشد. بنابراین زیرمدول N موازی با M وجود دارد که $\text{pn-dim}\, N \geq \alpha + 1$ و $\text{n-dim}\, \frac{M}{N} \geq \alpha + 1$. بنا بر گزاره ۸.۲ و قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} = \text{n-dim}\, \frac{M}{N}$. بنابراین

$$\text{pn-dim}\, N = \text{pn-dim}\, \frac{M}{N} = \text{n-dim}\, \frac{M}{N} = \alpha + 1.$$

$\square$

تعریف ۱۷.۳. M را یک مدول α–تقریباً نویتری موازی گوییم، هرگاه برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} < \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

گزاره ۱۸.۳. اگر M یک R–مدول α–تقریباً نویتری موازی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\,M \leq \alpha$.

اثبات. چون M یک مدول α–تقریباً نویتری موازی است، برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} < \alpha$. بنا بر قضیه ۹.۲، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} = \text{n-dim}\,\frac{M}{N} < \alpha$ و با توجه به گزاره ۷.۲، M بعد نویتری موازی دارد و $\text{pn-dim}\,M \leq \alpha$. □

با توجه به گزاره قبل، لم بعد به‌آسانی به‌دست می‌آید.

لم ۱۹.۳. اگر M یک مدول α–تقریباً نویتری موازی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول موازی با آن یک مدول β–تقریباً نویتری موازی است به‌طوری که $\beta \leqslant \alpha$. هم‌چنین برای هر زیرمدول موازی با M مانند N، مدول خارج‌قسمتی $\frac{M}{N}$ نیز γ–تقریباً نویتری موازی است به‌طوری که $\gamma \leqslant \alpha$.

لم ۲۰.۳. اگر M یک مدول باشد که $\text{pn-dim}\,M = \alpha$، آن‌گاه M یک مدول α–تقریباً نویتری موازی یا $\alpha + ۱$–تقریباً نویتری موازی است.

اثبات. بنا بر لم ۵.۲، برای هر زیر مدول N موازی با M، $\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} \leqslant \text{pn-dim}\,M = \alpha$. از طرفی طبق گزاره ۸.۲ و قضیه ۹.۲، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری است و $\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} = \text{n-dim}\,\frac{M}{N} \leq \alpha$. حال اگر $\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} < \alpha$، آن‌گاه M یک مدول α–تقریباً نویتری موازی است. در غیر این صورت زیرمدول موازی با M مانند K وجود دارد که $\text{pn-dim}\,\frac{M}{K} = \alpha < \alpha + ۱$ و لذا M یک مدول $\alpha + ۱$–تقریباً نویتری موازی است. □

نتیجه ۲۱.۳. M دارای بعد نویتری موازی است اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α، M یک مدول α–تقریباً نویتری موازی باشد.

۴ ویژگی‌های مدول‌های α–کوتاه موازی

در این بخش به بیان برخی از ویژگی‌های مدول‌های α–کوتاه موازی می‌پردازیم. به‌ویژه، نشان می‌دهیم که اگر α یک عدد ترتیبی و M یک مدول α–کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نویتری است.

گزاره ۱.۴. اگر M یک مدول α–کوتاه باشد، آن‌گاه M یک مدول γ–کوتاه موازی است که $\alpha \in \{\gamma, \gamma + ۱\}$.

اثبات. بنا بر [۲]، هر مدول α–کوتاه مانند M دارای بعد نویتری است و برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{n-dim}\,N \leq \alpha$ یا $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} \leq \alpha$. بنا بر قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\,N = \text{n-dim}\,N \leq \alpha$ یا $\text{n-dim}\,\frac{M}{N} \leq \alpha$. ازاین‌رو M یک مدول γ–کوتاه موازی است به‌طوری که $\gamma \leq \alpha$. از طرفی طبق گزاره ۷.۳، $\text{pn-dim}\,M = \gamma$ یا $\text{pn-dim}\,M = \gamma + ۱$. لذا با توجه به قضیه ۹.۲، $\gamma \leq \text{pn-dim}\,M = \text{n-dim}\,M \leq \gamma + ۱$. بنابراین $\alpha \leq \text{n-dim}\,M \leq \alpha + ۱$. پس $\alpha \in \{\gamma, \gamma + ۱\}$. □

گزاره ۲.۴. اگر M یک مدول γ–کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه M یک مدول α–کوتاه است که $\alpha \in \{\gamma, \gamma + ۱\}$.

اثبات. با توجه به گزاره ۷.۳، M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\,M = \gamma$ یا $\text{pn-dim}\,M = \gamma + ۱$. از طرفی طبق قضیه ۹.۲، $\gamma \leq \text{n-dim}\,M \leq \gamma + ۱$. بنا به تذکر ۲.۱ از [۲]، M یک مدول α– کوتاه، برای عدد ترتیبی α می‌باشد. بنابراین $\alpha \in \{\gamma, \gamma + ۱\}$. □

نتیجه ۳.۴. اگر R–مدول M دارای بعد گلدی متناهی و α یک عدد ترتیبی حدی باشد، آن‌گاه M یک مدول α–کوتاه است اگر و تنها اگر α–کوتاه موازی باشد.

گزاره ۴.۴. اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، $\frac{M}{N}$ یک مدول γ–کوتاه موازی برای عدد ترتیبی حدی $\gamma \leq \alpha$ باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\,M \leq \alpha + ۱$. به‌علاوه اگر M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه M یک مدول μ–کوتاه است به‌طوری که $\mu \leq \alpha + ۱$.

اثبات. فرض کنیم N یک زیرمدول موازی دلخواه با M باشد. پس $\frac{M}{N}$ یک مدول γ–کوتاه موازی $\gamma \leq \alpha$ است. بنا بر گزاره ۷.۳، $\frac{M}{N}$ دارای بعد نویتری است و $\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} \leq \gamma + ۱ \leq \alpha + ۱$. حال با توجه به گزاره ۷.۲، $\text{pn-dim}\,M = \sup\{\text{pn-dim}\,\frac{M}{N} : N||M\} \leq \alpha + ۱$. □

گزاره **۵.۴.** اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، N یک مدول γ-تقریباً نویتری موازی، برای عدد ترتیبی حدی $\gamma \leq \alpha$ باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\, M \leq \alpha + ۱$. به‌ویژه، M یک مدول μ-تقریباً نویتری موازی، برای یک عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha + ۱$ است.

اثبات. فرض کنیم N زیرمدول موازی با M باشد. پس N یک مدول γ-تقریباً نویتری موازی است و بنا بر تعریف، برای هر زیرمدول K موازی با N، $\text{n-dim}\, \frac{N}{K} < \gamma$. بنا بر قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\, \frac{N}{K} = \text{n-dim}\, \frac{N}{K} < \gamma$. طبق گزاره ۷.۲، N دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, N < \gamma$. بنا بر گزاره ۶.۲، M دارای بعد نویتری موازی است و $\text{pn-dim}\, M \leq \sup\{\text{pn-dim}\, N : N\|M\} + ۱ \leq \gamma + ۱ \leq \alpha + ۱$. □

گزاره **۶.۴.** اگر برای هر زیرمدول N موازی با M، $\frac{M}{N}$ یک مدول γ-تقریباً نویتری موازی، برای عدد ترتیبی حدی $\gamma \leq \alpha$ باشد، آن‌گاه $\text{pn-dim}\, M \leq \alpha$. به‌ویژه، M یک مدول μ-تقریباً نویتری موازی، برای یک عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha$ است.

اثبات. بنا بر اثبات گزاره قبل کافی است نشان دهیم که برای هر زیرمدول N موازی با M، $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} < \gamma$ که $\gamma \leq \alpha$. فرض کنیم N یک زیرمدول موازی با M باشد. بنا بر فرض گزاره $\frac{M}{N}$ یک مدول γ-تقریباً نویتری موازی است و $\gamma \leq \alpha$. در نتیجه برای هر زیرمدول موازی $\frac{K}{N}$ با $\frac{M}{N}$، $\text{n-dim}\, \frac{M/N}{K/N} < \gamma$. بنا بر گزاره ۸.۲ و قضیه ۹.۲، $\text{pn-dim}\, \frac{M/N}{K/N} = \text{n-dim}\, \frac{M/N}{K/N} < \gamma$. بنابراین طبق گزاره ۷.۲، $\text{pn-dim}\, \frac{M}{N} \leq \gamma \leq \alpha$ و در نتیجه $\text{pn-dim}\, M \leq \alpha$. □

قبل از آخرین نتیجه این بخش، لازم است که قضیه ۲.۳ از [۴] را بیان کنیم.

قضیه **۷.۴.** احکام زیر برای حلقه تعویض‌پذیر R هم‌ارزند.

۱. هر R-مدول با بعد نویتری متناهی، نویتری است.

۲. هر R-مدول آرتینی، نویتری است.

۳. هر R-مدول با بعد نویتری، نویتری و آرتینی است.

اکنون از قضیه ۹.۲، گزاره ۱۸.۳، نتیجه ۸.۳ و قضیه ۷.۴، گزاره زیر نتیجه می‌شود.

گزاره **۸.۴.** برای حلقه تعویض‌پذیر R گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

۱. هر R-مدول آرتینی، نویتری است.

۲. هر مدول m-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی برای تمام اعداد $m \geq ۱$، آرتینی و نویتری است.

۳. هر مدول α-کوتاه موازی با بعد گلدی متناهی برای تمام اعداد ترتیبی α، آرتینی و نویتری است.

۴. هر مدول m-تقریباً نویتری موازی با بعد گلدی متناهی برای تمام اعداد $m \geq ۱$، نویتری و آرتینی است.

۵. هر مدول α-تقریباً نویتری موازی با بعد گلدی متناهی برای هر عدد ترتیبی α، نویتری و آرتینی است.

تشکر و قدردانی: نویسندگان مقاله از داوران محترم که پیشنهادهای سازنده و موثری در راستای بهبود این مقاله ارائه کرده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین، نویسنده دوم از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز (در قالب پژوهانه **SCU.MM1400/473**) در انجام این پژوهش تشکر و قدردانی می‌نماید.

فهرست منابع

[1] Bilhan. G and Smith. P. F, *Short modules and almost Noetherian modules*, Math. Scand., **98** (2006), 12-18.

[2] Davoudian. M, Karamzadeh. O. A. S and Shirali. N, *On α-short modules*, Math. Scand., **114**(1) (2014), 26-37.

[3] Karamzadeh. O. A. S, *Noetherian dimension*, Ph.D. thesis, Exeter, 1974.

[4] Karamzadeh. O. A. S and Sajedinejad. A. R, *Atomic modules*, Comm. Algebra, **29**(7) (2001), 2757-2773.

[5] Karamzadeh. O. A. S and Shirali. N, *On the countablity of Noetherian dimension of modules*, Comm. Algebra, **32**(10) (2004), 4073-4083.

[6] Krause. G, *On the Krull dimension of left Noetherian left Matlis rings*, Math. Z., **118**(3) (1970), 207-214.

[7] Lemonnier. B, *Dimension de Krull et codeviation, Application au theorem dÉakin*. Comm. Algebra, **6** (1978), 1647-1665.

[8] Rentschler. R and Gabriel. P, *Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés*, CR Acad. Sci. Paris, **265**(2) (1967), 712-715.

[9] Shirali. M and Shirali. N, *On parallel Krull dimension of modules*, Comm. Algebra, **50**(12) (2022), 5284-5295.

On α-parallel short modules

Sayed Malek javdannezhad [1], **Sayedeh Fatemeh Mousavinasab** [2], **Maryam Shirali** [2], **Nasrin Shirali** [2, †]

[1] Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran
[2] Faculty of Mathematics and Computer Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Alborz Azarang

Received: 2022/6/26 Accepted: 2022/11/1

Abstract: An R-module M is called α-parallel short modules, if for each parallel submodule N to M either $\mathrm{pn\text{–}dim}\, N \leq \alpha$ or $\mathrm{n\text{–}dim}\, \frac{M}{N} \leq \alpha$ and α is the least ordinal number with this property. Using this concept, we extend some of the basic results of α-short modules to α-parallel short modules. Also, we have studied the relationship between α-parallel short modules and their parallel Noetherian dimension and we show that if M is a α-parallel short module, then M has parallel Noetherian dimension and $\alpha \leq \mathrm{pn\text{–}dim}\, M \leq \alpha + 1$. Furthermore, we prove that if M is an α-parallel short module with finite Goldie dimension, then M has Noetherian dimension and $\alpha \leq \mathrm{n\text{–}dim}\, M \leq \alpha + 1$.

Keywords: parallel Noetherian dimension, α-parallel short modules, α-parallel atomic modules, α-almost parallel Noetherian modules.

---

† Corresponding author.
E-mail addresses: shirali_n@scu.ac.ir,